Scientific Bulletin of Namangan State University

Volume 1 | Issue 11 Article 1

11-11-2019

ASYMPTOTICAL MINIMAXITY OF LINEAR KERNEL ESTIMATORS OF DISTRIBUTION FUNCTION

Abdurakhim Akhmedovich Abdushukurov
Prof.(DSc) of Dpt. Applied Mathematics and Informatics of Tashkent Branch of Moscow State University

Azam Latifkhonovich Muminov
Senior teacher of Dpt. Higher Mathematics of Namangan Engineering Construction Institute

ASYMPTOTICAL MINIMAXITY OF LINEAR KERNEL ESTIMATORS OF DISTRIBUTION FUNCTION

Cover Page Footnote

???????

Erratum

???????

ISSN:2181-0427

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

НАМАНГАН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ ИЛМИЙ АХБОРОТНОМАСИ

НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК НАМАНГАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

2019 йил 11 сон

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МИНИМАКСНОСТЬ ЛИНЕЙНО-ЯДЕРНЫХ ОЦЕНОК ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Абдушукуров Абдурахим Ахмедович[1], Муминов Аъзам Латифханович[2]
[1] профессор кафедры «Прикладная математика и информатика» Филиала Московского Государственного университета в городе Ташкенте,
[2] старший преподаватель кафедры «Высшая математика» Наманганского инженерно-строительного института

Аннотация. *В работе рассмотрены задачи минимаксного и байесовского оценивания функции распределения. Установлено, что линейно-ядерные оценки являются асимптотически минимаксными.*

Ключевые слова: *Минимаксные и байесовские оценки, функции потерь и риска, процесс Дирихле, ядерные оценки.*

ASYMPTOTICAL MINIMAXITY OF LINEAR KERNEL ESTIMATORS OF DISTRIBUTION FUNCTION

Abdushukurov Abdurakhim Akhmedovich[1], Muminov Azam Latifkhonovich[2]
[1]Prof.(DSc) of Dpt. Applied Mathematics and Informatics of Tashkent Branch of Moscow State University,
[2]Senior teacher of Dpt. Higher Mathematics of Namangan Engineering Construction Institute.

Abstract. *In paper the problems of minimax and Bayesian estimation of distribution function is considered. The asymptotical minimaxity of linear kernel estimators of distribution function is proved.*

Key words: *Minimax and Bayesian estimation, loss and risk functions, Dirichle process, kernel estimators.*

ТАҚСИМОТ ФУНКЦИЯСИНИНГ ЧИЗИҚЛИ ЯДРОВИЙ БАҲОЛАРИНИНГ АСИМПТОТИК МИНИМАКСЛИГИ

Абдушукуров Абдурахим Ахмедович[1], Муминов Аъзам Латифханович[2]
[1]Тошкент шаҳридаги Москва Давлат Университетининг филиали, «Амалий математика ва информатика» кафедраси профессори,
[2]Наманган муҳандислик-қурилиш институти «Олий математика» кафедраси катта ўқитувчиси.

Аннотация. *Мақолада тақсимот функциясини минимакс ва Байес усулида баҳолаш масалалари кўрилган. Чизиқли ядровий баҳоларнинг асимптотик минимакслиги ўрнатилган.*

Калит сўзлар. *Минимакс ва Байес баҳолари, талофат ва риск функциялари, Дирихле процесси, ядровий баҳолар.*

1. Введение. При байесовском подходе оценивания фнкционала от неизвестного распределения предпологается,что оцениваемый функционал (параметр) сам есть случайная величина (с.в.), хотя ненаблюдаемая, с известным распределением. Это априорное распределение затем модифицируется с полученными данными, и тем самым определяется апостериорное распределение(условное распределение параметра относительно данных). Методы непараметрического байесовского оценивания функционалов от неизвестных распределений начали применятся с появлением фундаментальной работы Томаса Фергюсона [1] в 1973 году. Он в качестве априорного распределения для неизвестной вероятностной меры предлагал распределение Дирихле. К настоящему времени этот подход стал самым полезным по сравнению с остальными подходами выбора априорного распределения.

Пусть $X_1,\dots,X_n$- независимые и одинаково распределённые (н.о.р.) с.в. с общей функцией распределения (ф.р.) F, принадлежащей к некоторому классу $\mathcal{F}$. Предположим, что $\mathcal{F}$ является измеримым подмножеством более широкого класса $\mathcal{P}$ с σ-алгеброй $\mathcal{A}$ и пусть Q - вероятностная мера на $(\mathcal{P},\mathcal{A})$ с Q $(\mathcal{P})$ =1. Через $\mathcal{D}$ обозначим класс решающих правил d. Пусть L(F;d)- функция потерь, действительнозначная функция, измеряющая потери при использовании решающей правилы $d = d\ (X_1,\dots,X_n)\in\mathcal{D}$, когда $F\in\mathcal{F}$ - истинная ф.р. выборки $X^{(n)}=(X_1,\dots,X_n)$. Усреднением L по распределению F, придём к функции риска

$$\mathcal{R}\ (F;\ d) = \mathcal{M}_F\{\mathrm{L}(F;d)\},(1)$$

которая является мерой качества статистики d как оценки F. Если существует решающее правило $d^*\in\mathcal{D}$, при котором минимизируется максимальный риск (1)

$$sup_{F\in\mathcal{F}}\,\mathcal{R}(F;d^*) = inf_{d\in\mathcal{D}}\,sup_{F\in\mathcal{F}}\,\mathcal{R}(F;d),\ (2)$$

то соответствующая процедура называется минимаксной. Сама оценка d^* также называется минимаксной относительно функции потерь $\mathcal{L}$. Решающее правило $d^*\in\mathcal{D}$, минимизирующее усредненный риск по мере Q

$$r(Q;d^*) = \int_{\mathcal{F}} \mathcal{R}(F;d^*)Q(dF)(3)$$

называется байесовской оценкой с априорным распределением Q относительно функции потерь $\mathcal{L}$. Следует отметить, что здесь F рассматривается как случайная ф.р. с априорным распределением Q, т.е. F является случайным процессом с выборочными траекториями являющимися ф.р. на прямой. Нахождение байесовской оценки состоит в вычислении апостериорного распределения F при заданной выборке $X^{(n)}=(X_1,\dots,X_n)$.

2. Вероятностная мера как процесс Дирихле. Пусть -класс всех вероятностных распределений на $(R,\mathcal{B})$, где R-числовая прямая и $\mathcal{B}=\sigma(R)$- сигма алгебра борелевских множеств. Через $\mathcal{M}$ обозначим оператор математического ожидания относительно меры Q. Пусть P – случайная вероятностная мера с распределением Q. Тогда при каждом $B\in\mathcal{B}, P(B)$-есть с.в. . Предположим, что $X^{(n)}=(X_1,\dots,X_n)$-случайная выборка с распределением P. Здесь $\mathcal{P}$- является носителем меры Q. Распределение Дирихле с параметром α, далее обозначаемое как

$\mathcal{D}(\alpha)$, будем рассматривать в качестве априорного распределения Q меры P. Следуя [1-3], вкратце напомним распределение Дирихле. Пусть $G(\alpha;1)$-гамма распределение с параметром формы $\alpha\geq 0$ и масштаба $\beta=1$. При $\alpha=0$ это распределение вырождается в нуле и при $\alpha>0$ имеет плотность

$$f(x;\alpha)=\begin{cases} 0, & x<0,\\ e^{-x}\cdot\dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & x\geq 0.\end{cases}$$

Пусть $\{Z_i, i=\overline{1,k}\}$- независимые с.в., где Z_iимеет распределение $G(\alpha_i;1)$ с $\alpha_i>0$ хотя бы при данном i. Введем с.в. $Y_i=Z_i[\sum_{j=1}^k Z_i]^{-1}, i=\overline{1,k},$ где $\sum_{i=1}^k Y_i=1$. Совместным распределением вектора $Y=(Y_1,\dots,Y_k)$ является распределение Дирихле с параметром $(\alpha_1,\dots,\alpha_k)$. Если $\alpha_i>0$ для всех i, тогда совместное распределение вектора $(Y_1,\dots,Y_{k-1})$ является абсолютно непрерывным и задаётся плотностью

$$f(y_1,\dots,y_{k-1};\alpha_1,\dots,\alpha_k)=\begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha_1+\dots+\alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_k)}\prod_{i=1}^{k-1} y_i^{\alpha_i-1}(1-\sum_{i=1}^{k-1} y_i)^{\alpha_k-1}, \\ \text{при } y_i\geq 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{k-1} y_i\leq 1, \\ 0, \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Пусть $\alpha(\cdot)$- ненулевая конечно-аддитивная мера на $(R,\mathcal{B})$. Назовём случайную вероятностную меру P на $(R,\mathcal{B})$ процессом Дирихле с параметром α и обозначим $P\in\mathcal{D}(\alpha)$, если для каждого $k=1,2,\dots$ и измеримого разбиения $B_1,\dots,B_k$ прямой R, совместным распределением случайного вектора $(P(B_1),\dots,P(B_k))$ является распределение Дирихле с параметром $(\alpha(B_1),\dots,\alpha(B_k))$. Таким образом, $\mathcal{P}$ является носителем $\mathcal{D}(\alpha)$. Следующая теорема Фергюсона является фундаментальной в теории непараметрического оценивания на основе априорного распределения Дирихле.

Теорема 1. [1]. Пусть P является процессом Дирихле на $(R,\mathcal{B})$ с параметром α и $X^{(n)}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ выборка объема n из распределения P. Тогда условное распределения P при заданной выборке $X^{(n)}$ является процессом Дирихле с параметром $\alpha+\sum_{i=1}^n\delta_{X_i}$, где δ_x -вырожденная в точке x вероятностная мера.

Применим теорему 1 к задаче оценивания ф.р. $F(t)=P((-\infty,t])$. Пусть пространство действий $\mathcal{F}$ состоит из совокупности всех ф.р. на R. Рассмотрим квадратическую функцию потерь

$$\mathcal{L}(P;\hat{F})=\int_{-\infty}^{\infty}\left(F(t)-\hat{F}(t)\right)^2 d\omega(t),$$

где ω- весовая функция является конечной мерой на $(R,\mathcal{B})$. Определим соответствую функцию риска (1) по формуле

$$\mathcal{R}(P;\hat{F})=\mathcal{M}[\mathcal{L}(P;\hat{F})]=\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{M}\left(F(t)-\hat{F}(t)\right)^2 d\omega(t), \qquad (4)$$

где $\mathcal{M}$- оператор математического ожидания относительно распределения Дирихле $\mathcal{D}(\alpha)$. Согласно (2) и (3) минимум в интеграле (4) достигается выбором $\hat{F}(t) = \mathcal{M}[F(t)]$ при каждом t. Поскольку $P \in \mathcal{D}(\alpha)$, следовательно байесовское правило при отсутствии выборки есть

$$\hat{F}(t) = \mathcal{M}[F(t)] = F_0(t) = \frac{\alpha((-\infty,t])}{\alpha(R)} \quad .(5)$$

Тогда в силу теоремы 1, апостериорное среднее, т.е. байесовское правило при наличии выборки есть

$$\hat{F}_n^{\alpha}(t) = \frac{\alpha((-\infty,t]) + \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}((-\infty,t])}{\alpha(R)+n} = p_n F_0(t) + (1-p_n) F_n^{Э}(t), \qquad (6)$$

где $p_n = \frac{\alpha(R)}{\alpha(R)+n}$ и $F_n^{Э}(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}((-\infty,t])$-эмпирическая ф.р.. Здесь ф.р. $F_0(t)$ называется априорным представлением, а $\alpha(R)$ и $\alpha(R)+n$ трактуются как априорные и апостериорные объёмы выборок. Обозначим $\alpha(t) = \ = \alpha((-\infty,t])$и $\bar{\alpha}(t) = \alpha((t,+\infty))$. Отметим, что если при фиксированном $t \in R, \alpha(t) \uparrow \infty$ так, что $F_0(t)$ остаётся постоянным, то байесовская оценка $\hat{F}_n^{\alpha}(t)$ стремится к $F_0(t)$ по вероятности. Следовательно, априорная информация велика и она определяет оценку. Если же $\alpha(t)$ фиксирована и $n \to \infty$, то байесовская оценка (6) приближается к эмпирической $F_n^{Э}(t)$ и информация, содержащаяся в эмпирической оценке, подавляет информацию в априорном распределении.

3. Минимаксное оценивание ф.р.. Пусть

$$\mathcal{F} = \{F: F - \text{непрерывная справа ф. р. на } R\}$$

и $\mathcal{D} = \{d: d - \text{неубывающая, непрерывная справа функция на } R \text{ такая, что } 0 \le d(-\infty) \le d(+\infty) \le 1\}$.

Функцию потерь на $\mathcal{D}$ зададим формулой

$$\mathcal{L}(F; d) = \int_{-\infty}^{\infty} (F(t) - d(t))^2 (F(t))^{\gamma-1} \cdot \left(1 - F(t)\right)^{\delta-1} \cdot d\omega(t)$$

где $\gamma,\delta \ge 0$, $F \in \mathcal{F}$, $d \epsilon \mathcal{D}$ и $\omega(t)$ – заданная весовая функция. В качестве класса $\mathcal{D}$ решающих правил рассмотрим совокупность линейных оценок от индикаторов

$$\mathcal{D} = \left\{ d_n : d_n(t) = a + \sum_{i=1}^{n} b_i \delta_{X_i}((-\infty,t]) \right\},$$

где $\{a, b_i, i = \overline{1,n}\}$-неотрицательные числа. Выделим подкласс $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}_0 = \{d_n \in \mathcal{D}: a \ge 0, b_i \ge 0, i = \overline{1,n}; a + \sum_{i=1}^{n} b_i \le 1.$$

Через $\mathcal{R}(F; d_n)$ обозначим функцию риска. Рассмотрим следующие два случая и соответствующие им функции риска:

1) $\gamma = \delta = 1: \mathcal{R}_1(F; d_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_F (F(t) - d_n(t))^2 d\omega(t),$

2) $\gamma = \delta = 0: \mathcal{R}_2(F; d_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_F [(F(t) - d_n(t))]^2 [F(t)(1 - F(t))]^{-1} d\omega(t),$

Следующая теорема Фадия [2] показывает минимаксность линейных оценок класса $\mathcal{D}_0$ относительно соответствующих функций риска $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$, характеризуемую независимостью функций риска от неизвестной ф.р. F.

Теорема 2 [2]. Пусть $X^{(n)}$ - выборка из генеральной совокупности с ф.р. $F(t)$ и $\mathcal{D}_0$ класс линейных оценок для $F(t)$. Тогда функции риска $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ не зависят от ф.р. F тогда и только тогда, когда коэффициенты соответствующих оценок удовлетворяют условиям

$$2a = 1 - \sum_{i=1}^{n} b_i , \qquad (1 - \sum_{i=1}^{n} b_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \tag{7}$$

и

$$a = 0, \ \sum_{i=1}^{n} b_i = 1. \tag{8}$$

Через $d_{1n}(t)$ и $d_{2n}(t)$ обозначим оценки из класса $\mathcal{D}_0$, удовлетворяющие условиям (7) и (8) соответственно. Легко видеть, что в условиях (7) и (8) соответственно имеем

$$\mathcal{R}_1(F; d_{1n}) = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega(t), \qquad \mathcal{R}_2(F; d_{2n}) = \sum_{i=1}^{n} b^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega(t) \tag{9}$$

т.е. риски не зависят от F и следовательно $d_{1n}(t)$ и $d_{2n}(t)$ являются минимаксными оценками. Если, в частности, класс $\mathcal{D}_0$ таков, что все $b_i = b$, $i = \overline{1,n}$, то из (7) и (8) соответственно имеем $2a = 1 - nb, (1 - nb)^2 = nb^2$
и $b = \frac{1}{n}$. Следовательно, согласно (9) имеем

$$d_{1n}(t) = \frac{1}{2(\sqrt{n}+1)} + \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}+1)} \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}((-\infty, t]) =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{n}}{2} + \sum_{i=1}^{n} \delta_{X_i}((-\infty, t])}{\sqrt{n}+n}, \ \mathcal{R}_1(F; d_{1n}) = \frac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega(t),$$

а также

$$d_{2n}(t) = F_n^{Э}(t), \mathcal{R}_2(F; d_{2n}) = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega(t).$$

Согласно теореме 2 оценки d_{1n} и d_{2n} являются минимаксными относительно соответствующих функций риска $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$. Однако, если эти две оценки сравним относительно одной и той же функции риска $\mathcal{R}_1(F; d_n)$ то

$$\mathcal{R}_1(F; d_{1n}) = \frac{1}{4(\sqrt{n}+1)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega(t) < \frac{1}{4n} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega(t) =$$

$$= \sup_{F \in \mathcal{F}} \left\{ \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \big[F(t)\big(1 - F(t)\big)\big] d\omega(t) \right\} = \sup_{F \in \mathcal{F}} \{\mathcal{R}_1(F; d_{2n})\},$$

т.е. оценка $d_{2n}(t)$=$F_n^Э(t)$ не является минимаксной относительно функции риска $\mathcal{R}_1$. Более того, следует отметить, что оценка $d_{1n}(t)$ является также и байесовской согласно формуле (6) при $\alpha(t) = \bar{\alpha}(t) = \sqrt{n}/_2$.

4. Асимптотическая минимаксность линейно-ядерной оценки ф.р. .

Пусть ф.р. $F(t)$ абсолютно непрерывна с плотностью $f(t)$. Теперь предположим, что класс решающих правил $\mathcal{D}^*$ состоит из сглаженных линейных оценок:

$$\mathcal{D}^* = \left\{ d_n^*: d_n^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{t-u}{h}\right) d\big(d_n(u)\big),\ d_n \in \mathcal{D}_0 \right\},$$

где -заданная абсолютно непрерывная ф.р. (ядро) с плотностью k и последовательность $\{h(n), n \geq 1\}$ «ширины окна» такова, что $h(n) \downarrow 0$ при $n \to \infty$. Введем условия:

(У1) $$\int_{-\infty}^{\infty} |t| dK(t) < \infty;$$

(У2) Плотность $f(t)$ равномерно ограничена на R;

Введём в рассмотрение интегралы при $m = 1{,}2$

$$I_n^{(m)}(t) = \mathcal{M}_F\left[K^m\left(\frac{t-X_i}{h}\right)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} K^m\left(\frac{t-u}{h}\right) dF(u) =$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} K^m(z) dF(t-hz),\ \ m = 1{,}2. \qquad (10)$$

где последнее равенство получилось заменой $z = {(t-u)}/_h$. Интегралы (10) играют важную роль при установлении свойства асимптотической минимаксности ядерных оценок d_n^* из класса $\mathcal{D}^*$. Для них справедливо следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. В условиях (У1) и (У2) при $n \to \infty$

$$sup_{|t|<\infty}\left|I_n^{(m)}(t) - F(t)\right| = O\big(h(n)\big),\ \ m = 1{,}2.(11)$$

Доказательство леммы. Интегрированием по частям имеем

$$I_n^{(m)}(t) = -K^m(z)F(t-hz)|_{z=-\infty}^{z=+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} F(t-hz) dK^m(z) =$$

$$= F(t)\int_{-\infty}^{\infty} dK^m(z) + \int_{-\infty}^{\infty} [F(t-hz) - F(t)] dK^m(z) =$$

$$= F(t) + mh(n)\int_{-\infty}^{\infty} f\big(\theta_n(z)\big) z K^{m-1}(z) dK(z), m = 1{,}2,$$

где $\theta_n(z) \epsilon (\min\{t, t-hz\}, \max\{t, t-hz\})$. Тогда в условиях леммы при $m = 1{,}2$

$$\sup_{|t|<\infty}\left|I_n^{(m)}(t) - F(t)\right| \leq 2h(n) \sup_{|t|<\infty}[f(t)] \int_{-\infty}^{\infty} |z| dK(z),$$

что доказывает (11).

Легко видеть, что

$$\mathcal{M}_F d_n^*(t) = \sum_{i=1}^{n} b_i \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{t-u}{h}\right) dF(u) = I_n^{(1)}(t) \sum_{i=1}^{n} b_i. \qquad (12)$$

Тогда в условиях (8) ввиду (11) при $m = 1$

$$\sup_{|t|<\infty} |\mathcal{M} d_n^*(t) - F(t)| = O\big(h(n)\big), n \to \infty, \quad (13)$$

т.е. линейно-ядерная оценка d_n^* является асимптотически несмещённой оценкой для ф.р. $F(t)$. С учётом (13) рассмотрим функцию риска

$$\mathcal{R}(\widetilde{F}_n; d_n^*) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_F \left[\left(\widetilde{F}_n(t) - d_n^*(t)\right)^2\right] \left[F(t)\big(1 - F(t)\big)\right]^{-1} d\omega(t), \quad (14)$$

где $\widetilde{F}_n(t) = I_n^{(1)}(t)$.

Теорема 3. Пусть $X^{(n)} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ выборка из генеральной совокупности с ф.р. $F(t)$ и плотностью $f(t)$. Если выполнены условия (У1), (У2) а также

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = 1, \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 < \infty, \qquad (15)$$

то при $n \to \infty$ функция риска (14) линейно-ядерной оценки d_n^* независит от ф.р. F.

Доказательство теоремы 3. Вычислим математические ожидания в (14) с учётом первого из условий (15):

$$\mathcal{M}_F \left[\left(\widetilde{F}_n(t) - d_n^*(t)\right)^2\right] = \mathcal{M}_F \left[\sum_{i=1}^{n} b_i \left(K\left(\frac{t - X_i}{h}\right) - \widetilde{F}_n(t)\right)\right]^2 =$$

$$= \left[I_n^{(2)}(t) - \left(I_n^{(1)}(t)\right)^2\right] \sum_{i=1}^{n} b_i^2 =$$

$$= F(t)\big(1 - F(t)\big) \sum_{i=1}^{n} b_i^2 + O\big(h(n)\big), n \to \infty, \qquad t \in R,$$

где последнее равенство следует из (11). Следовательно, из (14) и второго условия (15) имеем

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{R}(\widetilde{F}_n; d_n^*) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega(t) \sum_{i=1}^{n} b_i^2 < \infty,$$

что доказывает утверждение теоремы 3.

В частности, при $b_i = \frac{1}{n}, i = \overline{1, n}$, условия (15) выполняются и сглаженная эмпирическая оценка

$$F_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{t - X_i}{h}\right)$$

согласно теореме 3, является асимптотически минимаксной оценкой неизвестной ф.р. $F(t)$.

References

1. Ferguson T.S. A Bayesian analysis of some nonparametric problems. // Ann. Statist. 1973. V.1. p. 209-230.
2. Phadia E.G. Minimax estimation of a cumulative distribution function. // Ann. Statist. 1973. V.1. p. 1149-1157.
3. Prakasa Rao B.L.S. Nonparametric Functional Estimation. 1983. ACADEMIC PRESS. 525 pages.

МУНДАРИЖА

01.00.00 ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

02.00.00 КИМЁ ФАНЛАРИ ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ CHEMICAL SCIENCES

03.00.00 БИОЛОГИЯ ФАНЛАРИ БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ BIOLOGICAL SCIENCES

05.00.00 ТЕХNIKA ФАНЛАРИ
ТЕХНИИЧЕСКИЕ НАУКИ
TECHNICAL SCIENCES

07.00.00 ТАРИХ ФАНЛАРИ
ИСТОРИЧЕСКИЕ НАУКИ
HISTORICAL SCIENCES

09.00.00 ФАЛСАФА ФАНЛАРИ
ФИЛОСОФКИЕ НАУКИ
PHILOSOPHICAL SCIENCES

10.00.00 ФИЛОЛОГИЯ ФАНЛАРИ
ФИЛОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ
PHILOLOGICAL SCIENCES

13.00.00 ПЕДАГОГИКА ФАНЛАРИ ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ НАУКИ PEDAGOGICAL SCIENCES