

11-11-2019

ASYMPTOTICAL MINIMAXITY OF LINEAR KERNEL ESTIMATORS OF DISTRIBUTION FUNCTION

Abdurakhim Akhmedovich Abdushukurov

Prof.(DSc) of Dpt. Applied Mathematics and Informatics of Tashkent Branch of Moscow State University

Azam Latifkhonovich Muminov

Senior teacher of Dpt. Higher Mathematics of Namangan Engineering Construction Institute

Follow this and additional works at: <https://uzjournals.edu.uz/namdu>



Part of the [Physical Sciences and Mathematics Commons](#)

Recommended Citation

Abdushukurov, Abdurakhim Akhmedovich and Muminov, Azam Latifkhonovich (2019) "ASYMPTOTICAL MINIMAXITY OF LINEAR KERNEL ESTIMATORS OF DISTRIBUTION FUNCTION," *Scientific Bulletin of Namangan State University*. Vol. 1 : Iss. 11 , Article 1.

Available at: <https://uzjournals.edu.uz/namdu/vol1/iss11/1>

This Article is brought to you for free and open access by 2030 Uzbekistan Research Online. It has been accepted for inclusion in Scientific Bulletin of Namangan State University by an authorized editor of 2030 Uzbekistan Research Online. For more information, please contact sh.erkinov@edu.uz.

ASYMPTOTICAL MINIMAXITY OF LINEAR KERNEL ESTIMATORS OF DISTRIBUTION FUNCTION

Cover Page Footnote

???????

Erratum

???????

ISSN:2181-0427

**ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС
ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ**

**НАМАНГАН ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ
ИЛМИЙ АХБОРОТНОМАСИ**

**НАУЧНЫЙ ВЕСТНИК НАМАНГАНСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА**



2019 йил 11 сон

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ МИНИМАКСНОСТЬ ЛИНЕЙНО-ЯДЕРНЫХ ОЦЕНОК ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Абдушукуров Абдурахим Ахмедович¹, Муминов Аъзам Латифханович²
¹ профессор кафедры «Прикладная математика и информатика» Филиала
Московского Государственного университета в городе Ташкенте,
² старший преподаватель кафедры «Высшая математика» Наманганского
инженерно-строительного института

Аннотация. В работе рассмотрены задачи минимаксного и байесовского оценивания функции распределения. Установлено, что линейно-ядерные оценки являются асимптотически минимаксными.

Ключевые слова: Минимаксные и байесовские оценки, функции потерь и риска, процесс Дирихле, ядерные оценки.

ASYMPTOTICAL MINIMAXITY OF LINEAR KERNEL ESTIMATORS OF DISTRIBUTION FUNCTION

Abdushukurov Abdurakhim Akhmedovich¹, Muminov Azam Latifkhonovich²
¹Prof.(DSc) of Dpt. Applied Mathematics and Informatics of Tashkent Branch of Moscow
State University,
²Senior teacher of Dpt. Higher Mathematics of Namangan Engineering Construction
Institute.

Abstract. In paper the problems of minimax and Bayesian estimation of distribution function is considered. The asymptotical minimaxity of linear kernel estimators of distribution function is proved.

Key words: Minimax and Bayesian estimation, loss and risk functions, Dirichle process, kernel estimators.

ТАҚСИМОТ ФУНКЦИЯСИНИНГ ЧИЗИҚЛИ ЯДРОВИЙ БАҲОЛАРИНИНГ АСИМПТОТИК МИНИМАКСЛИГИ

Абдушукуров Абдурахим Ахмедович¹, Муминов Аъзам Латифханович²
¹Тошкент шаҳридаги Москва Давлат Университетининг филиали, «Амалий
математика ва информатика» кафедраси профессори,
²Наманган муҳандислик-қурилиш институти «Олий математика» кафедраси катта
ўқитувчиси.

Аннотация. Мақолада тақсимот функциясини минимакс ва Байес усулида баҳолаш масалалари кўрилган. Чизиқли ядровий баҳоларнинг асимптотик минимакслиги ўрнатилган.

Калит сўзлар. Минимакс ва Байес баҳолари, талофат ва риск функциялари, Дирихле процесси, ядровий баҳолар.

1. Введение. При байесовском подходе оценивания функционала от неизвестного распределения предполагается, что оцениваемый функционал (параметр) сам есть случайная величина (с.в.), хотя ненаблюдаемая, с известным распределением. Это априорное распределение затем модифицируется с полученными данными, и тем самым определяется апостериорное распределение (условное распределение параметра относительно данных). Методы непараметрического байесовского оценивания функционалов от неизвестных распределений начали применяться с появлением фундаментальной работы Томаса Фергюсона [1] в 1973 году. Он в качестве априорного распределения для неизвестной вероятностной меры предлагал распределение Дирихле. К настоящему времени этот подход стал самым полезным по сравнению с остальными подходами выбора априорного распределения.

Пусть X_1, \dots, X_n - независимые и одинаково распределённые (н.о.р.) с.в. с общей функцией распределения (ф.р.) F , принадлежащей к некоторому классу \mathcal{F} . Предположим, что \mathcal{F} является измеримым подмножеством более широкого класса \mathcal{P} с σ -алгеброй \mathcal{A} и пусть Q - вероятностная мера на $(\mathcal{P}, \mathcal{A})$ с $Q(\mathcal{P}) = 1$. Через \mathcal{D} обозначим класс решающих правил d . Пусть $L(F; d)$ - функция потерь, действительная функция, измеряющая потери при использовании решающей правила $d = d(X_1, \dots, X_n) \in \mathcal{D}$, когда $F \in \mathcal{F}$ - истинная ф.р. выборки $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$. Усреднением L по распределению F , придём к функции риска

$$\mathcal{R}(F; d) = \mathcal{M}_F \{L(F; d)\}, (1)$$

которая является мерой качества статистики d как оценки F . Если существует решающее правило $d^* \in \mathcal{D}$, при котором минимизируется максимальный риск (1)

$$\sup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{R}(F; d^*) = \inf_{d \in \mathcal{D}} \sup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{R}(F; d), (2)$$

то соответствующая процедура называется минимаксной. Сама оценка d^* также называется минимаксной относительно функции потерь L . Решающее правило $d^* \in \mathcal{D}$, минимизирующее усредненный риск по мере Q

$$r(Q; d^*) = \int_{\mathcal{F}} \mathcal{R}(F; d^*) Q(dF) (3)$$

называется байесовской оценкой с априорным распределением Q относительно функции потерь L . Следует отметить, что здесь F рассматривается как случайная ф.р. с априорным распределением Q , т.е. F является случайным процессом с выборочными траекториями являющимися ф.р. на прямой. Нахождение байесовской оценки состоит в вычислении апостериорного распределения F при заданной выборке $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$.

2. Вероятностная мера как процесс Дирихле. Пусть \mathcal{R} -класс всех вероятностных распределений на (R, \mathcal{B}) , где R -числовая прямая и $\mathcal{B} = \sigma(R)$ - сигма алгебра борелевских множеств. Через \mathcal{M} обозначим оператор математического ожидания относительно меры Q . Пусть P - случайная вероятностная мера с распределением Q . Тогда при каждом $B \in \mathcal{B}$, $P(B)$ -есть с.в. . Предположим, что $X^{(n)} = (X_1, \dots, X_n)$ -случайная выборка с распределением P . Здесь \mathcal{P} - является носителем меры Q . Распределение Дирихле с параметром α , далее обозначаемое как

$\mathcal{D}(\alpha)$, будем рассматривать в качестве априорного распределения Q меры P . Следуя [1-3], вкратце напомним распределение Дирихле. Пусть $G(\alpha; 1)$ -гамма распределение с параметром формы $\alpha \geq 0$ и масштаба $\beta=1$. При $\alpha=0$ это распределение вырождается в нуле и при $\alpha > 0$ имеет плотность

$$f(x; \alpha) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^{-x} \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Пусть $\{Z_i, i = \overline{1, k}\}$ - независимые с.в., где Z_i имеет распределение $G(\alpha_i; 1)$ с $\alpha_i > 0$ хотя бы при данном i . Введем с.в. $Y_i = Z_i / [\sum_{j=1}^k Z_j]^{-1}, i = \overline{1, k}$, где $\sum_{i=1}^k Y_i = 1$. Совместным распределением вектора $Y = (Y_1, \dots, Y_k)$ является распределение Дирихле с параметром $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Если $\alpha_i > 0$ для всех i , тогда совместное распределение вектора (Y_1, \dots, Y_{k-1}) является абсолютно непрерывным и задаётся плотностью

$$f(y_1, \dots, y_{k-1}; \alpha_1, \dots, \alpha_k) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_k)}{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_k)} \prod_{i=1}^{k-1} y_i^{\alpha_i-1} (1 - \sum_{i=1}^{k-1} y_i)^{\alpha_k-1}, \\ \text{при } y_i \geq 0 \text{ и } \sum_{i=1}^{k-1} y_i \leq 1, \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть $\alpha(\cdot)$ - ненулевая конечно-аддитивная мера на (R, \mathcal{B}) . Назовём случайную вероятностную меру P на (R, \mathcal{B}) процессом Дирихле с параметром α и обозначим $P \in \mathcal{D}(\alpha)$, если для каждого $k = 1, 2, \dots$ и измеримого разбиения B_1, \dots, B_k прямой R , совместным распределением случайного вектора $(P(B_1), \dots, P(B_k))$ является распределение Дирихле с параметром $(\alpha(B_1), \dots, \alpha(B_k))$. Таким образом, \mathcal{P} является носителем $\mathcal{D}(\alpha)$. Следующая теорема Фергюсона является фундаментальной в теории непараметрического оценивания на основе априорного распределения Дирихле.

Теорема 1. [1]. Пусть P является процессом Дирихле на (R, \mathcal{B}) с параметром α и $X^{(n)} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ выборка объема n из распределения P . Тогда условное распределения P при заданной выборке $X^{(n)}$ является процессом Дирихле с параметром $\alpha + \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$, где δ_x -вырожденная в точке x вероятностная мера.

Применим теорему 1 к задаче оценивания ф.р. $F(t) = P((-\infty, t])$. Пусть пространство действий \mathcal{F} состоит из совокупности всех ф.р. на R . Рассмотрим квадратическую функцию потерь

$$\mathcal{L}(P; \hat{F}) = \int_{-\infty}^{\infty} (F(t) - \hat{F}(t))^2 d\omega(t),$$

где ω - весовая функция является конечной мерой на (R, \mathcal{B}) . Определим соответствующую функцию риска (1) по формуле

$$\mathcal{R}(P; \hat{F}) = \mathcal{M}[\mathcal{L}(P; \hat{F})] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M} (F(t) - \hat{F}(t))^2 d\omega(t), \quad (4)$$

где \mathcal{M} - оператор математического ожидания относительно распределения Дирихле $\mathcal{D}(\alpha)$. Согласно (2) и (3) минимум в интеграле (4) достигается выбором $\hat{F}(t) = \mathcal{M}[F(t)]$ при каждом t . Поскольку $P \in \mathcal{D}(\alpha)$, следовательно байесовское правило при отсутствии выборки есть

$$\hat{F}(t) = \mathcal{M}[F(t)] = F_0(t) = \frac{\alpha((-\infty, t])}{\alpha(R)} \quad (5)$$

Тогда в силу теоремы 1, апостериорное среднее, т.е. байесовское правило при наличии выборки есть

$$\hat{F}_n^\alpha(t) = \frac{\alpha((-\infty, t]) + \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}((-\infty, t])}{\alpha(R) + n} = p_n F_0(t) + (1 - p_n) F_n^\exists(t), \quad (6)$$

где $p_n = \frac{\alpha(R)}{\alpha(R) + n}$ и $F_n^\exists(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}((-\infty, t])$ -эмпирическая ф.р.. Здесь ф.р. $F_0(t)$ называется априорным представлением, а $\alpha(R)$ и $\alpha(R) + n$ трактуются как априорные и апостериорные объёмы выборок. Обозначим $\alpha(t) = \alpha((-\infty, t])$ и $\bar{\alpha}(t) = \alpha((t, +\infty))$. Отметим, что если при фиксированном $t \in R, \alpha(t) \uparrow \infty$ так, что $F_0(t)$ остаётся постоянным, то байесовская оценка $\hat{F}_n^\alpha(t)$ стремится к $F_0(t)$ по вероятности. Следовательно, априорная информация велика и она определяет оценку. Если же $\alpha(t)$ фиксирована и $n \rightarrow \infty$, то байесовская оценка (6) приближается к эмпирической $F_n^\exists(t)$ и информация, содержащаяся в эмпирической оценке, подавляет информацию в априорном распределении.

3. Минимаксное оценивание ф.р.. Пусть

$$\mathcal{F} = \{F: F - \text{непрерывная справа ф. р. на } R\}$$

и $\mathcal{D} = \{d: d - \text{неубывающая, непрерывная справа функция на } R \text{ такая, что } 0 \leq d(-\infty) \leq d(+\infty) \leq 1\}$.

Функцию потерь на \mathcal{D} зададим формулой

$$\mathcal{L}(F; d) = \int_{-\infty}^{\infty} (F(t) - d(t))^2 (F(t))^{\gamma-1} \cdot (1 - F(t))^{\delta-1} \cdot d\omega(t)$$

где $\gamma, \delta \geq 0$, $F \in \mathcal{F}$, $d \in \mathcal{D}$ и $\omega(t)$ - заданная весовая функция. В качестве класса \mathcal{D} решающих правил рассмотрим совокупность линейных оценок от индикаторов

$$\mathcal{D} = \left\{ d_n: d_n(t) = a + \sum_{i=1}^n b_i \delta_{X_i}((-\infty, t]) \right\},$$

где $\{a, b_i, i = \overline{1, n}\}$ -неотрицательные числа. Выделим подкласс $\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}_0 = \{d_n \in \mathcal{D}: a \geq 0, b_i \geq 0, i = \overline{1, n}; a + \sum_{i=1}^n b_i \leq 1\}.$$

Через $\mathcal{R}(F; d_n)$ обозначим функцию риска. Рассмотрим следующие два случая и соответствующие им функции риска:

$$1) \quad \gamma = \delta = 1: \mathcal{R}_1(F; d_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_F(F(t) - d_n(t))^2 d\omega(t),$$

$$2) \quad \gamma = \delta = 0: \mathcal{R}_2(F; d_n) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_F[(F(t) - d_n(t))]^2 [F(t)(1 - F(t))]^{-1} d\omega(t),$$

Следующая теорема Фадия [2] показывает минимаксность линейных оценок класса \mathcal{D}_0 относительно соответствующих функций риска \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 , характеризующую независимостью функций риска от неизвестной ф.р. F .

Теорема 2 [2]. Пусть $X^{(n)}$ - выборка из генеральной совокупности с ф.р. $F(t)$ и \mathcal{D}_0 класс линейных оценок для $F(t)$. Тогда функции риска \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 не зависят от ф.р. F тогда и только тогда, когда коэффициенты соответствующих оценок удовлетворяют условиям

$$2a = 1 - \sum_{i=1}^n b_i, \quad (1 - \sum_{i=1}^n b_i)^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2 \quad (7)$$

и

$$a = 0, \quad \sum_{i=1}^n b_i = 1. \quad (8)$$

Через $d_{1n}(t)$ и $d_{2n}(t)$ обозначим оценки из класса \mathcal{D}_0 , удовлетворяющие условиям (7) и (8) соответственно. Легко видеть, что в условиях (7) и (8) соответственно имеем

$$\mathcal{R}_1(F; d_{1n}) = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega(t), \quad \mathcal{R}_2(F; d_{2n}) = \sum_{i=1}^n b_i^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega(t) \quad (9)$$

т.е. риски не зависят от F и следовательно $d_{1n}(t)$ и $d_{2n}(t)$ являются минимаксными оценками. Если, в частности, класс \mathcal{D}_0 таков, что все $b_i = b$, $i = \overline{1, n}$, то из (7) и (8) соответственно имеем $2a = 1 - nb$, $(1 - nb)^2 = nb^2$

и $b = \frac{1}{n}$. Следовательно, согласно (9) имеем

$$\begin{aligned} d_{1n}(t) &= \frac{1}{2(\sqrt{n} + 1)} + \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + 1)} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}((-\infty, t]) = \\ &= \frac{\frac{\sqrt{n}}{2} + \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}((-\infty, t])}{\sqrt{n} + n}, \quad \mathcal{R}_1(F; d_{1n}) = \frac{1}{4(\sqrt{n} + 1)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega(t), \end{aligned}$$

а также

$$d_{2n}(t) = F_n^{\exists}(t), \quad \mathcal{R}_2(F; d_{2n}) = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega(t).$$

Согласно теореме 2 оценки d_{1n} и d_{2n} являются минимаксными относительно соответствующих функций риска \mathcal{R}_1 и \mathcal{R}_2 . Однако, если эти две оценки сравним относительно одной и той же функции риска $\mathcal{R}_1(F; d_n)$ то

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1(F; d_{1n}) &= \frac{1}{4(\sqrt{n} + 1)^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega(t) < \frac{1}{4n} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega(t) = \\ &= \sup_{F \in \mathcal{F}} \left\{ \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} [F(t)(1 - F(t))] d\omega(t) \right\} = \sup_{F \in \mathcal{F}} \{ \mathcal{R}_1(F; d_{2n}) \}, \end{aligned}$$

т.е. оценка $d_{2n}(t)=F_n^{\partial}(t)$ не является минимаксной относительно функции риска \mathcal{R}_1 . Более того, следует отметить, что оценка $d_{1n}(t)$ является также и байесовской согласно формуле (6) при $\alpha(t) = \bar{\alpha}(t) = \sqrt{n}/2$.

4. Асимптотическая минимаксность линейно-ядерной оценки ф.р. .

Пусть ф.р. $F(t)$ абсолютно непрерывна с плотностью $f(t)$. Теперь предположим, что класс решающих правил \mathcal{D}^* состоит из сглаженных линейных оценок:

$$\mathcal{D}^* = \left\{ d_n^*: d_n^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{t-u}{h}\right) d(d_n(u)), d_n \in \mathcal{D}_0 \right\},$$

где -заданная абсолютно непрерывная ф.р. (ядро) с плотностью k и последовательность $\{h(n), n \geq 1\}$ «ширины окна» такова, что $h(n) \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Введем условия:

$$(Y1) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |t| dK(t) < \infty;$$

(Y2) Плотность $f(t)$ равномерно ограничена на R ;

Введём в рассмотрение интегралы при $m = 1, 2$

$$\begin{aligned} I_n^{(m)}(t) &= \mathcal{M}_F \left[K^m \left(\frac{t - X_i}{h} \right) \right] = \int_{-\infty}^{\infty} K^m \left(\frac{t - u}{h} \right) dF(u) = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} K^m(z) dF(t - hz), \quad m = 1, 2. \end{aligned} \tag{10}$$

где последнее равенство получилось заменой $z = (t - u)/h$. Интегралы (10) играют важную роль при установлении свойства асимптотической минимаксности ядерных оценок d_n^* из класса \mathcal{D}^* . Для них справедливо следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. В условиях (Y1) и (Y2) при $n \rightarrow \infty$

$$\sup_{|t| < \infty} \left| I_n^{(m)}(t) - F(t) \right| = O(h(n)), \quad m = 1, 2. \tag{11}$$

Доказательство леммы. Интегрированием по частям имеем

$$\begin{aligned} I_n^{(m)}(t) &= -K^m(z)F(t - hz) \Big|_{z=-\infty}^{z=+\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} F(t - hz) dK^m(z) = \\ &= F(t) \int_{-\infty}^{\infty} dK^m(z) + \int_{-\infty}^{\infty} [F(t - hz) - F(t)] dK^m(z) = \\ &= F(t) + mh(n) \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta_n(z)) z K^{m-1}(z) dK(z), \quad m = 1, 2, \end{aligned}$$

где $\theta_n(z) \in (\min\{t, t - hz\}, \max\{t, t - hz\})$. Тогда в условиях леммы при $m = 1, 2$

$$\sup_{|t| < \infty} \left| I_n^{(m)}(t) - F(t) \right| \leq 2h(n) \sup_{|t| < \infty} [f(t)] \int_{-\infty}^{\infty} |z| dK(z),$$

что доказывает (11).

Легко видеть, что

$$\mathcal{M}_F d_n^*(t) = \sum_{i=1}^n b_i \int_{-\infty}^{\infty} K\left(\frac{t-u}{h}\right) dF(u) = I_n^{(1)}(t) \sum_{i=1}^n b_i. \quad (12)$$

Тогда в условиях (8) ввиду (11) при $m = 1$

$$\sup_{|t| < \infty} |\mathcal{M} d_n^*(t) - F(t)| = O(h(n)), n \rightarrow \infty, \quad (13)$$

т.е. линейно-ядерная оценка d_n^* является асимптотически несмещённой оценкой для ф.р. $F(t)$. С учётом (13) рассмотрим функцию риска

$$\mathcal{R}(\tilde{F}_n; d_n^*) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_F \left[\left(\tilde{F}_n(t) - d_n^*(t) \right)^2 \right] [F(t)(1-F(t))]^{-1} d\omega(t), \quad (14)$$

где $\tilde{F}_n(t) = I_n^{(1)}(t)$.

Теорема 3. Пусть $X^{(n)} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ выборка из генеральной совокупности с ф.р. $F(t)$ и плотностью $f(t)$. Если выполнены условия (Y1), (Y2) а также

$$\sum_{i=1}^n b_i = 1, \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 < \infty, \quad (15)$$

то при $n \rightarrow \infty$ функция риска (14) линейно-ядерной оценки d_n^* не зависит от ф.р. F .

Доказательство теоремы 3. Вычислим математические ожидания в (14) с учётом первого из условий (15):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_F \left[\left(\tilde{F}_n(t) - d_n^*(t) \right)^2 \right] &= \mathcal{M}_F \left[\sum_{i=1}^n b_i \left(K\left(\frac{t-X_i}{h}\right) - \tilde{F}_n(t) \right) \right]^2 = \\ &= \left[I_n^{(2)}(t) - \left(I_n^{(1)}(t) \right)^2 \right] \sum_{i=1}^n b_i^2 = \\ &= F(t)(1-F(t)) \sum_{i=1}^n b_i^2 + O(h(n)), n \rightarrow \infty, \quad t \in R, \end{aligned}$$

где последнее равенство следует из (11). Следовательно, из (14) и второго условия (15) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{R}(\tilde{F}_n; d_n^*) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega(t) \sum_{i=1}^n b_i^2 < \infty,$$

что доказывает утверждение теоремы 3.

В частности, при $b_i = \frac{1}{n}, i = \overline{1, n}$, условия (15) выполняются и сглаженная эмпирическая оценка

$$F_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{t-X_i}{h}\right)$$

согласно теореме 3, является асимптотически минимаксной оценкой неизвестной ф.р. $F(t)$.

References

1. Ferguson T.S. A Bayesian analysis of some nonparametric problems. // Ann. Statist. 1973. V.1. p. 209-230.
2. Phadia E.G. Minimax estimation of a cumulative distribution function. // Ann. Statist. 1973. V.1. p. 1149-1157.
3. Prakasa Rao B.L.S. Nonparametric Functional Estimation. 1983. ACADEMIC PRESS. 525 pages.

МУНДАРИЖА

ФИЗИКА-МАТЕМАТИКА ФАНЛАРИ

01.00.00

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

- 1 Асимптотическая минимаксность линейно-ядерных оценок функции распределения
Абдушукуров, А. А, Муминов А.Л..... 3
- 2 Trajectories of quadratic operators which map I_2 to itself
Juraev I.T..... 10
- 3 Maple tizimida parabolik turdagi xususiy hosilali differensial tenglama uchun aralash masalani to'rt usulida yechish
G.A.Nazarova, Z.O. Arziqulov..... 19
- 4 Краевая задача для уравнения четвертого порядка с сингулярным коэффициентом в прямоугольнике
Уринов А.К, Азизов М.С..... 26

КИМЁ ФАНЛАРИ

02.00.00

ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ

CHEMICAL SCIENCES

- 5 Oxytropis *Rosea* o'simligining Efir Moylari Tarkibi
Sulaymonov Sh, Abdullayev Sh, Qoraboyeva B..... 38
- 6 Уйғунлаштирилган ярим даврий усулда натрий карбоксиметилцеллюлоза олиш
Сайпиев Т.С, Абдуллаев А.М..... 42

БИОЛОГИЯ ФАНЛАРИ

03.00.00

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

BIOLOGICAL SCIENCES

- 7 Фарғона водийсида тарқалган дўлана (*grataegus* L.) ўсимлигининг микромицетлари ва касалликлари
Абдуразақов А.А, Юсуфжон Ғ. Ш..... 50
- 8 Анатомическое строение ассимилирующих органов *eruca sativa* mill.
(сем.*brassicaceae*) при интродукции в Сурхандарьинской области
Муқимов Б.Б..... 56
- 9 Энергетический потенциал гумуса сероземов
Юлдашев Г, Хайдаров. М..... 62
- 10 Регуляция влияние 6"-п-кумароилпрунина на энергетической функции митохондрий с ионами кальция
Мамажанов М 67
- 11 Ғўзанинг *El-Salvador* ёввойи шаклида морфобиологик ва қимматли хўжалик белгиларини назорат қилувчи номзод генларни аниқлаш
Комилов Д.Ж., Бахрутдинова Н.З., Орипова Б.Б. , Кушанов Ф.Н..... 72

ТЕХНИКА ФАНЛАРИ

05.00.00

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

TECHNICAL SCIENCES

- 12 Robotni harakatini amalga oshiruvchi arduino platformasi
Abdullayeva Sh.I..... 79
- 13 Ахборот хавфсизлигига бўладиган таҳдидлар ва уларнинг таҳлили
Ғаниева Ш.Н, Азимжонов У.А., И.А. Қосимов..... 84

ТАРИХ ФАНЛАРИ

07.00.00

ИСТОРИЧЕСКИЕ НАУКИ

HISTORICAL SCIENCES

- 14 Давлат–тарихий-маданий анъаналар ташувчиси сифатида
Жўраев А.Т..... 89

ФАЛСАФА ФАНЛАРИ

09.00.00

ФИЛОСОФИК ИЛМ НАУКИ

PHILOSOPHICAL SCIENCES

- 15 Ma'furani tahlil etishning o'ziga xosligi
Mamatov O.V..... 95
- 16 Кечиримлилик: фалсафий-ирфоний таҳлил
Исақова З.Р..... 99
- 17 Инсон тақдирини англашдаги диний-фалсафий қарашлар ривожини
Мадримов Ж.Б..... 107
- 18 Сўфийлик таълимоти ривожини Азизиддин Насафий илмий меросининг ўрни
Маматов М.А..... 116
- 19 Жамиятимиз янги тараққиёт босқичини хотин-қизларнинг инновацион
(тадбиркорликка йўналтирилган) фаоллигини
Ғаниев Б.С..... 122
- 20 Huquqiy munosabatlarning ma'naviy jihatlari
Sultonov A.X 129
- 21 Таълим-тарбия – тараққиёт пойдевори: ижтимоий-фалсафий талқин
Амирхўжаев Ш.Қ..... 135

ФИЛОЛОГИЯ ФАНЛАРИ

10.00.00

ФИЛОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

PHILOLOGICAL SCIENCES

- 22 Ўзбек тилида антоним-синоним муносабатлар (“Ҳибатул ҳақойиқ” асари
лексикаси мисолида)
Сайидирахимова Н.С..... 142
- 23 Matn birliklari
Omonov A 147
- 24 Муаллиф ва таржимон ўртасидаги руҳий ўхшашликлар ва таржима сифати
Будикова М.Х..... 151

25	Ўзбек тилидан инглиз тилига бадий таржиманинг лингвомаданий таҳлили (Абдулла Қаҳҳорнинг “Анор” ҳикояси таржимаси мисолида) Досбаева Н.Т.....	157
26	Дейктик белгили сегмент қурилмалар прагматикаси Умурзоқова М.Э.....	163
27	“Минг бир қиёфа” романида замонавий аёл муаммоси Азизов Н.Н.....	168
28	Николас Роу ижодида “Амир Темур” тасвири Бобаханов М.Я, Турсунов А.Х.....	172
29	Ҳозирги ўзбек шеъриятида исёнкор руҳ ғоялари Тажибаева Д.....	177
30	Янги тушунчаларни ифодалаш усуллари Лазиза С.Х.....	182
31	Туркий халқлар адабиётида навоий анъаналари Рузибоев Т.....	186
32	Лисоний шахс типларини ажратиш принциплари Ниязова Д.Х.....	193
33	Источниковедческий анализ тазкире “Канз аль-куттаб” Ас-Саалиби Сулаймонова Х.М.....	196
34	Chet til ta`limda madaniyatlararo tafovut masalalari Abduqodirov U.N.....	201
35	Психо-аналитик тасвирнинг миллий колорит яратишдаги аҳамияти Мардонова Л.У.....	207
36	Метонимия асосидаги иборалар Қўчқарова О.А.....	211
37	Национально-культурная специфика английских и русских слов Джуманазарова З.....	215
38	Сухайлий шеъриятининг жанр хусиятлари Болтабоева О.Ю.....	219
39	Ижтимоий тармоқ контентни тижоратлаштириш воситаси сифатида Бекназаров К.Т.....	223

13.00.00

ПЕДАГОГИКА ФАНЛАРИ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ НАУКИ
PEDAGOGICAL SCIENCES

40	Boshlang'ich sinf o'quvchilarida sog'lom turmush tarzini shakllantirishda sayyohlik va turizmni ahamiyti Boltaboyev N.N.....	231
41	Jismoniy tarbiya tizimida sog'lom turmush tarzini shakllantirish usullari Azizov N.N, Azizov M.M.....	236
42	Sports lesson - time requirement Mikheeva A.....	240

43	Талабаларнинг ижодий фаолиятларини шакллантириш омиллари Умаров Қ.Б, Усманова Н.Қ.....	245
44	Qizlar jamoalari bilan ishlaydigan murabbiylar faoliyatining o'ziga xos xususiyatlari Azizova R.I.....	249
45	Метод shadowing в обучении языкам Жалолов Ш.....	252
46	Yosh avlodni barkamol qilib tarbiyalashda harakatli o'yinlarning ahamiyati Ismoilov T, Ismoilov G'.....	257
47	How to develop listening skills for students Nazarova Y.X.....	262
48	Мактабгача таълимда ахборот технологиясидан фойдаланишнинг назарий таҳлили Ботирова З.А.....	266
49	Ўқув жараёнида “бумеранг” методидан фойдаланишда вужудга келадиган муаммолар ва уларни олдини олиш йўллари Отамирзаев О.У, Зокирова Д.Н.....	270
50	Формирование лексических навыков в английском языке в средних школах Ботирова З.Х.....	274
51	Mavhum (abstrakt) san'atning miya faoliyati va tarbiya bilan o'zaro bog'liqligi Isafov A.A.....	279
52	Физика ўқитувчисининг таълимга Инновацион ёндашуви Бекназарова З.Ф.....	282
53	Бўлажак ўқитувчиларнинг мустақил фикрлаш маданиятини ривожлантириш моделини такомиллаштириш Қамбаров М.М.....	286
54	Характерида истерик белгилар бўлган болалар тоифалари ва уларни ўқитиш Хусанов А.А.....	293
55	Boshlang'ich ta'limda innovatsiyaning ro'li Махмудова Н.А.....	298
56	Malakali gandbolchilarning musobaqa faoliyatini o'rganish Azizov S.V.....	302
57	Таълимда ижодий ўйинлар Тажибоева Г.М.....	306
58	Мактабгача таълимда ривожланиш марказларини ташкил этиш муаммоларига доир Ўринова Ф.Ў.....	311
59	Тадбиркорлик фаолиятида умумахлоқий меъёрларнинг ўрни Эргашева Ф.И.....	316
60	Особенности преподавания математики гуманитариям Устаджалилова Х, А.....	321
61	Талабаларнинг ҳуқуқий компетентлигини ривожлантириш технологиялари Тилеуов Э.М.....	326

62	О'quvchi-yoshlarni faollik asosida ijtimoiy hayotga tayyorlash masalalari Abdullayeva N, Rahmonova Z.....	332
63	Оилада болаларнинг ижтимоий- ахлоқий сифатларини шакллантириш омиллари Ортиқова З.Н.....	335
64	Эффективность модели управления развитием международного сотрудничества высшего образовательного учреждения Юнусов Ш.Т.....	338
65	Alternative assessment as a means to develop study skills in esp classes in higher educational settings Kuchkarova Yana.....	343
66	Интеллектуальные компьютерные игры – как способ улучшения учебы детей Нажмиддинова Х.Ё.....	348
67	Кимё тарихи маълумотларидан фойдаланиш талабалар билим олишининг сифат ва самарадорлик омили Нишонов М, Холмирзаева З.....	351
68	Малака ошириш жараёнида информатика ўқитувчиларини ижодий тафаккурини ривожлантириш механизми Ахмедова Ш.....	356
69	Кластер ёндашуви асосида минтақавий таълим тизимини бошқариш Тоштемирова С.А.....	361
70	Олий таълим муассасаларида математикадан замонавий ўқув машғулотларини ташқил этиш – таълим жараёнидаги инновацион технологиялардан бири Зулфихаров И.М., Ўринов Б.О.....	367
71	Бўлажак тарбиячиларда ижодкорлик сифатларини ривожлантириш Қодирова З.....	371