[Scientific Bulletin of Namangan State University](https://uzjournals.edu.uz/namdu)

Volume 1 | Issue 10 Article 8

10-10-2019

ON EXTENSIONS OF ONE CHARACTERISTICALLY NILPOTENT LIE ALGEBRA

Utkirbek Ilhomjon ugli Khakimov
Namangan State University, teacher

Abdukahhor Kholdorjon ugli Kurbonov
Namangan State University, magistrate

ON EXTENSIONS OF ONE CHARACTERISTICALLY NILPOTENT LIE ALGEBRA

О РАСШИРЕНИЯХ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИ НИЛЬПОТЕНТНОЙ АЛГЕБРЫ ЛИ

Хакимов Уткирбек Илхомжон угли
Наманганский государственный университет, преподаватель
Курбонов Абдукаххор Холдоржон угли
Наманганский государственный университет, магистрант

Аннотация. *В статье обсуждается решение одной задачи относящиейся применения классической теоремы Леви. В примере решения этой задачи рассматривается методические стороны изучения сути и доказательства теоремы.*

Ключевые слова: *Алгебра Ли, тождества Якоби, разрешимая алгебра, нильпотентная алгебра, нильрадикал, нильпотентный идеал, дифференцирование.*

ХАРАКТЕРИСТИК НИЛЬПОТЕНТ ЛИ АЛГЕБРАСИНИНГ КЕНГАЙТМАСИ ҲАҚИДА

Ҳакимов Ўткирбек Илхомжон ўғли
Наманган давлат университети, ўқитувчи
Қурбонов Абдуқаххор Холдоржон ўғли
Наманган давлат университети, магистрант

Аннотация: *Мақолада классик Леви теоремасининг қўлланилишига доир масаланинг ечилиши муҳокама қилинади. Мисолнинг ечилиши давомида теореманинг моҳияти ва исботини ўрганишнинг методик томонлари қаралади.*

Калит сўзлар: *Ли алгебраси, Якоби айнияти, ечилувчан алгебра, нильпотент алгебра, нильрадикал, нильпотент идеал, дифференциаллаш.*

ON EXTENSIONS OF ONE CHARACTERISTICALLY NILPOTENT LIE ALGEBRA

Khakimov Utkirbek Ilhomjon ugli
Namangan State University, teacher
Kurbonov Abdukahhor Kholdorjon ugli
Namangan State University, magistrate

Abstract: *In this article the decision of one problem on the applications of the theorem Levi is discussed. In an example of the decision of this problem it is considered the methodical parties of studying of an essence and the proof of the theorem.*

Key words: *Lie algebra, Jacobi identity, solvable algebra, nilpotency algebra, nilradical, nilpotency ideal, derivation.*

Определение 1. [3]. Алгебра L над полем F называется алгеброй Ли, если для любых $x,y,z\in L$ выполняются тождества:

$$[x,x]=0 \text{ - антикоммутативности,}$$

$$[[x,y],z]+[[y,z],x]+[[z,x],y]=0 \text{ - Якоби,}$$

где [,] - умножение в L.

Изучения алгебр *Ли* со структурной точки зрения является одной из актуальных задач теории алгебр *Ли*.

Подпространство I алгебры *Ли* L назовем идеалом если из того, что $x \in L$ и $y \in I$, следует $[x,y] \in I$. [3].

По определению, для алгебры *Ли* L ряд

$L^{(0)}=L,\ L^{(1)}=[L,L]=L',L^{(2)}=[L^{(1)}, L^{(1)}],\ \ldots,\ L^{(i)}=[L^{(i-1)}, L^{(i-1)}]$

называется производным рядом алгебры L и алгебра L называется разрешимой, если существует $m \in \mathbf{N}$ такое, что $L^{(m)}=0$. Натуральное число m называется индексом разрешимости алгебры L, если $L^{[m-1]} \neq 0$ и $L^{[m]}=0$.

Ряд

$L^{0}=L, L^{1}=[L,L]=L',L^{2}=[L, L^{1}],\ \ldots, L^{i}=[L, L^{(i-1)}]$

называется нижним центральным рядом алгебры L и алгебра L называется нильпотентной, если существует $m \in \mathbf{N}$ такое, что $L^{m}=0$. Минимальное число m, обладающее таким свойством называется индексом нильпотентности (нильиндексом) алгебры L, т.е. $L^{m-1} \neq 0$ и $L^{m}=0$. [3].

Замечание. Нетрудно видеть, что индекс нильпотентности произвольной n-мерной нильпотентной алгебры не превосходит числа $n+1$.

Определение 2. Максимальный нильпотентный идеал алгебры *Ли* называется нильрадикалом этой алгебры.

Для размерности нильрадикала N алгебры *Ли* L имеет место соотношение

$$\dim N \geq \frac{1}{2} \dim L. \ [4].$$

Определение 3. *Линейное* преобразование d алгебры *Ли* L называется дифференцированием, если

$$d([x,y])=[d(x),y]+[x,d(y)]$$

для любых $x, y \in L$.

Определение 4. Алгебра *Ли* называется характеристически нильпотентной, если любое её дифференцирование нильпотентно [1].

Заметим, что по теореме Энгеля из характеристической нильпотентности алгебры *Ли* вытекает её нильпотентность.

В статье [5] приводится пример характеристически нильпотентной алгебры *Ли* L седьмого порядка со следующими структурными соотношениями:

$$[e_1, e_i]=e_{i+1}, \quad 2 \leq i \leq 6;$$
$$[e_2, e_3]=e_6;$$
$$[e_2, e_4]=e_7;$$
$$[e_2, e_5]=e_7;$$
$$[e_3, e_4]=-e_7.$$

В данной работе мы изучаем подалгебры и расширения Леви этой алгебры *Ли*.

Пусть D есть любое дифференцирование D алгебры *Ли* L. Тогда для базисных векторов $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$, допуская, что

$$D(e_1)=\alpha_{11}e_1+\alpha_{12}e_2+\ldots+\alpha_{17}e_7$$
$$D(e_2)=\alpha_{21}e_1+\alpha_{22}e_2+\ldots+\alpha_{27}e_7$$
$$D(e_3)=\alpha_{31}e_1+\alpha_{32}e_2+\ldots+\alpha_{37}e_7$$
$$D(e_4)=\alpha_{41}e_1+\alpha_{42}e_2+\ldots+\alpha_{47}e_7$$
$$D(e_5)=\alpha_{51}e_1+\alpha_{52}e_2+\ldots+\alpha_{57}e_7$$
$$D(e_6)=\alpha_{61}e_1+\alpha_{62}e_2+\ldots+\alpha_{67}e_7$$
$$D(e_7)=\alpha_{71}e_1+\alpha_{72}e_2+\ldots+\alpha_{77}e_7$$

где α_{ij} элементы из основного поля, путем прямых вычислений можно убедится в том, что имеет место

Теорема 1. Всякое дифференцирование D алгебры *Ли* L имеет следующий вид:

$$D=\begin{pmatrix} 0 & -\alpha_{56}+\alpha_{67} & \frac{1}{2}(-5\alpha_{56}-2\alpha_{57}+5\alpha_{67}) & -\alpha_{36}+\alpha_{47} & \alpha_{26}+\alpha_{36}-\alpha_{37}-\alpha_{47} & \alpha_{16} & \alpha_{17} \\ 0 & 0 & \alpha_{56} & \frac{1}{2}(-\alpha_{56}+\alpha_{67}) & \alpha_{36}-\frac{5}{2}\alpha_{56}-\alpha_{57}+\frac{5}{2}\alpha_{67} & \alpha_{26} & \alpha_{27} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{56} & \frac{1}{2}(-\alpha_{56}+\alpha_{67}) & \alpha_{36} & \alpha_{37} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{56} & -\frac{3}{2}(\alpha_{56}-\alpha_{67}) & \alpha_{47} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{56} & \alpha_{57} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{67} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим свойство дифференцирования:

$$D(e_1,e_1)=0$$
$$D(e_1,e_2)=\alpha_{31}e_1+\alpha_{32}e_2+(-\alpha_{11}-\alpha_{22}+\alpha_{33})e_3+(-\alpha_{23}+\alpha_{34})e_4+(-\alpha_{24}+\alpha_{35})e_5+(\alpha_{13}-\alpha_{25}+\alpha_{36})e_6+$$
$$+(\alpha_{14}+\alpha_{15}-\alpha_{26}+\alpha_{37})e_7=0$$
$$D(e_1,e_3)=\alpha_{41}e_1+\alpha_{42}e_2+(-\alpha_{32}+\alpha_{43})e_3+(-\alpha_{11}-\alpha_{33}+\alpha_{44})e_4+(-\alpha_{34}+\alpha_{45})e_5+(-\alpha_{12}-\alpha_{35}+\alpha_{46})e_6+$$
$$+(-\alpha_{14}-\alpha_{36}+\alpha_{47})e_7=0$$
$$D(e_1,e_4)=\alpha_{51}e_1+\alpha_{52}e_2+(-\alpha_{42}+\alpha_{53})e_3+(-\alpha_{43}+\alpha_{54})e_4+(-\alpha_{11}-\alpha_{44}+\alpha_{55})e_5+(-\alpha_{45}+\alpha_{56})e_6+$$
$$+(-\alpha_{12}+\alpha_{13}-\alpha_{46}+\alpha_{57})e_7=0$$
$$D(e_1,e_5)=\alpha_{61}e_1+\alpha_{62}e_2+(-\alpha_{52}+\alpha_{63})e_3+(-\alpha_{53}+\alpha_{64})e_4+(-\alpha_{54}+\alpha_{65})e_5+(-\alpha_{11}-\alpha_{55}+\alpha_{66})e_6+$$
$$+(-\alpha_{12}-\alpha_{56}+\alpha_{67})e_7=0$$
$$D(e_1,e_6)=\alpha_{71}e_1+\alpha_{72}e_2+(-\alpha_{62}+\alpha_{73})e_3+(-\alpha_{63}+\alpha_{74})e_4+(-\alpha_{64}+\alpha_{75})e_5+(-\alpha_{65}+\alpha_{76})e_6+$$
$$(-\alpha_{11}-\alpha_{66}++\alpha_{77})e_7=0$$
$$D(e_1,e_7)=-\alpha_{72}e_3-\alpha_{73}e_4-\alpha_{74}e_5-\alpha_{75}e_6-\alpha_{76}e_7=0$$
$$D(e_2,e_1)=-\alpha_{31}e_1-\alpha_{32}e_2+(\alpha_{11}+\alpha_{22}-\alpha_{33})e_3+(\alpha_{23}-\alpha_{34})e_4+(\alpha_{24}-\alpha_{35})e_5+(-\alpha_{13}+\alpha_{25}-\alpha_{36})e_6+$$
$$+(-\alpha_{14}-\alpha_{15}+\alpha_{26}-\alpha_{37})e_7=0$$
$$D(e_2,e_2)=0$$
$$D(e_2,e_3)=\alpha_{61}e_1+\alpha_{62}e_2+(\alpha_{31}+\alpha_{63})e_3+(-\alpha_{21}+\alpha_{64})e_4+\alpha_{65}e_5+(-\alpha_{22}-\alpha_{33}+\alpha_{66})e_6+$$
$$+(-\alpha_{24}-\alpha_{34}-\alpha_{35}+\alpha_{67})e_7=0$$

$D(e_2,e_4)=\alpha_{71}e_1+\alpha_{72}e_2+(\alpha_{41}+\alpha_{73})e_3+\alpha_{74}e_4+(-\alpha_{21}+\alpha_{75})e_5+(-\alpha_{43}+\alpha_{76})e_6+$
$+(-\alpha_{22}+\alpha_{23}-\alpha_{44}-\alpha_{45}+\alpha_{77})e_7=0$
$D(e_2,e_5)=\alpha_{71}e_1+\alpha_{72}e_2+(\alpha_{51}+\alpha_{73})e_3+\alpha_{74}e_4+\alpha_{75}e_5+(-\alpha_{21}-\alpha_{53}+\alpha_{76})e_6+$
$+(-\alpha_{22}-\alpha_{54}-\alpha_{55}+\alpha_{77})e_7=0$
$D(e_2,e_6)=\alpha_{61}e_3-\alpha_{63}e_6+(-\alpha_{21}-\alpha_{64}-\alpha_{65})e_7=0$
$D(e_2,e_7)=\alpha_{71}e_3-\alpha_{73}e_6+(-\alpha_{74}-\alpha_{75})e_7=0$
$D(e_3,e_1)=-\alpha_{41}e_1-\alpha_{42}e_2+(\alpha_{32}-\alpha_{43})e_3+(\alpha_{11}+\alpha_{33}-\alpha_{44})e_4+(\alpha_{34}-\alpha_{45})e_5+(\alpha_{12}+\alpha_{35}-\alpha_{46})e_6+$
$+(\alpha_{14}+\alpha_{36}-\alpha_{47})e_7=0$
$D(e_3,e_2)=-\alpha_{61}e_1-\alpha_{62}e_2+(-\alpha_{31}-\alpha_{63})e_3+(\alpha_{21}-\alpha_{64})e_4-\alpha_{65}e_5+(\alpha_{22}+\alpha_{33}-\alpha_{66})e_6+$
$+(\alpha_{24}+\alpha_{34}+\alpha_{35}-\alpha_{67})e_7=0$
$D(e_3,e_3)=0$
$D(e_3,e_4)=-\alpha_{71}e_1-\alpha_{72}e_2-\alpha_{73}e_3+(e_{41}-\alpha_{74})e_4+(-\alpha_{31}-\alpha_{75})e_5+(\alpha_{42}-\alpha_{76})e_6+$
$+(-\alpha_{32}+\alpha_{33}+\alpha_{44}-\alpha_{77})e_7=0$
$D(e_3,e_5)=\alpha_{51}e_4+(-\alpha_{31}+\alpha_{52})e_6+(-\alpha_{32}+\alpha_{54})e_7=0$
$D(e_3,e_6)=\alpha_{61}e_4+\alpha_{62}e_6+(-\alpha_{31}+\alpha_{64})e_7=0$
$D(e_3,e_7)=\alpha_{71}e_4+\alpha_{72}e_6+\alpha_{74}e_7=0$
$D(e_4,e_1)=-\alpha_{51}e_1-\alpha_{52}e_2+(\alpha_{42}-\alpha_{53})e_3+(\alpha_{43}-\alpha_{54})e_4+(\alpha_{11}+\alpha_{44}-\alpha_{55})e_5+(\alpha_{45}-\alpha_{56})e_6+$
$+(\alpha_{12}-\alpha_{13}+\alpha_{46}-\alpha_{57})e_7=0$
$D(e_4,e_2)=-\alpha_{71}e_1-\alpha_{72}e_2+(-\alpha_{41}-\alpha_{73})e_3-\alpha_{74}e_4+(\alpha_{21}-\alpha_{75})e_5+(\alpha_{43}-\alpha_{76})e_6+$
$+(\alpha_{22}-\alpha_{23}+\alpha_{44}+\alpha_{45}-\alpha_{74})e_7=0$
$D(e_4,e_3)=\alpha_{71}e_1+\alpha_{72}e_2+\alpha_{73}e_3+(-\alpha_{41}+\alpha_{74})e_4+(\alpha_{31}+\alpha_{75})e_5+(-\alpha_{42}+\alpha_{76})e_6+$
$+(\alpha_{32}-\alpha_{33}-\alpha_{44}+\alpha_{77})e_7=0$
$D(e_4,e_4)=0$
$D(e_4,e_5)=\alpha_{51}e_5-\alpha_{41}e_6+(-\alpha_{42}+\alpha_{52}-\alpha_{53})e_7=0$
$D(e_4,e_6)=\alpha_{61}e_5+(-\alpha_{41}+\alpha_{62}-\alpha_{63})e_7=0$
$D(e_4,e_7)=\alpha_{71}e_5+(\alpha_{72}-\alpha_{73})e_7=0$
$D(e_5,e_1)=-\alpha_{61}e_1-\alpha_{62}e_2+(\alpha_{52}-\alpha_{63})e_3+(\alpha_{53}-\alpha_{64})e_4+(\alpha_{54}-\alpha_{65})e_5+(\alpha_{11}+\alpha_{55}-\alpha_{66})e_6+$
$+(\alpha_{12}+\alpha_{56}-\alpha_{67})e_7=0$
$D(e_5,e_2)=-\alpha_{71}e_1-\alpha_{72}e_2+(-\alpha_{51}-\alpha_{73})e_3-\alpha_{74}e_4-\alpha_{75}e_5+(\alpha_{21}+\alpha_{53}-\alpha_{76})e_6+$
$+(\alpha_{22}+\alpha_{54}+\alpha_{55}-\alpha_{77})e_7=0$
$D(e_5,e_3)=-\alpha_{51}e_4+(\alpha_{31}-\alpha_{52})e_6+(\alpha_{32}-\alpha_{54})e_7=0$
$D(e_5,e_4)=-\alpha_{51}e_5+\alpha_{41}e_6+(\alpha_{42}-\alpha_{52}+\alpha_{53})e_7=0$
$D(e_5,e_5)=0$
$D(e_5,e_6)=\alpha_{61}e_6+(-\alpha_{51}+\alpha_{62})e_7=0$
$D(e_5,e_7)=\alpha_{71}e_6+\alpha_{72}e_7=0$
$D(e_6,e_1)=-\alpha_{71}e_1-\alpha_{72}e_2+(\alpha_{62}-\alpha_{73})e_3+(\alpha_{63}-\alpha_{74})e_4+(\alpha_{64}-\alpha_{75})e_5+(\alpha_{65}-\alpha_{76})e_6+$
$+(\alpha_{11}+\alpha_{66}-\alpha_{77})e_7=0$
$D(e_6,e_2)=-\alpha_{61}e_3+\alpha_{63}e_6+(\alpha_{21}+\alpha_{64}+\alpha_{65})e_7=0$
$D(e_6,e_3)=-\alpha_{61}e_4-\alpha_{62}e_6+(\alpha_{31}-\alpha_{64})e_7=0$

$D(e_6,e_4) = -\alpha_{61}e_5 + (\alpha_{41} - \alpha_{62} + \alpha_{63})e_7 = 0$

$D(e_6,e_5) = -\alpha_{61}e_6 + (\alpha_{51} - \alpha_{62})e_7 = 0$

$D(e_6,e_6) = 0$

$D(e_6,e_7) = \alpha_{71}e_7 = 0$

$D(e_7,e_1) = \alpha_{72}e_3 + \alpha_{73}e_4 + \alpha_{74}e_5 + \alpha_{75}e_6 + \alpha_{76}e_7 = 0$

$D(e_7,e_2) = -\alpha_{71}e_3 + \alpha_{73}e_6 + (\alpha_{74} + \alpha_{75})e_7 = 0$

$D(e_7,e_3) = -\alpha_{71}e_4 - \alpha_{72}e_6 - \alpha_{74}e_7 = 0$

$D(e_7,e_4) = -\alpha_{71}e_5 + (-\alpha_{72} + \alpha_{73})e_7 = 0$

$D(e_7,e_5) = -\alpha_{71}e_6 - \alpha_{72}e_7 = 0$

$D(e_7,e_6) = -\alpha_{71}e_7 = 0$

$D(e_7,e_7) = 0$

Теорема доказана.

Для алгебр Ли имеет место теорема Леви о расщеплениях.

Теорема 2. Пусть G конечномерная алгебра Ли. Тогда может быть представлена в виде разложения на полупрямую сумму как $G = R \dotplus S$, где R есть разрешимый радикал, а S - полупростая подалгебра-дополнение к R [3].

В частности, любая разрешимая алгебра Ли может быт представлена в виде разложения на прямую сумму вида $G = N \oplus F$, где N есть нильрадикал, а F - подространство-дополнение к нильрадикалу N.

В нашем случае матрица дифференцирования алгебры D алгебры Ли L имеет строго верхнедиагональный вид и потому является нильпотентной.

Отсюда с учетом результатов из [2], заключаем что верно

Предложение: Разложение Леви алгебры L тривиально, т.е. подространство-дополнение к нильрадикалу состоит только из нулевого элемента и потому данная алгебра не может входит ни в какую разрешимую алгебру Ли в качестве нильрадикала в ее разложение Леви.

References:

1. Dixmier J., Lister W.G. Derivations of nilpotent Lie algebras. // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8. - P. 155-158.

2. Snobl L., On the structure of maximal solvable extensions and of Levi extensions of nilpotent Lie algebras, J. Phys. A, Math. Theor. 43 (2010), 17.

3. Djekobson N. Algebri Li. - M.: Mir, 1964. – 356 c.

4. Mubarakzyanov G.M. O razreshimix algebrax Li. Izvestiya visshix uchebnix zavedeniy. Matematika. 1963 (№ 1 (32)). S.14-123.

5. Xakimjanov YU.B. Xarakteristicheski nilpotentnie algebri Li. // Matematicheskiy sbornik. – 1990. – T. 181. - № 5. - C. 642 - 655.