[Scientific Bulletin of Namangan State University](https://uzjournals.edu.uz/namdu)

Volume 1 | Issue 10 Article 6

10-10-2019

NUMERICAL SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE GENERALIZED EQUATION OF NONISOTROPIC DIFFUSION

Tohirjon Halimovich Tojiev
Ferghana state university, candidate of physical and mathematical sciences.

Shavkat Mamirovich Ibragimov
Ferghana state university, senior lecturer

NUMERICAL SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE GENERALIZED EQUATION OF NONISOTROPIC DIFFUSION

Cover Page Footnote

???????

Erratum

???????

ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ НЕИЗОТРОПНОЙ ДИФФУЗИИ.

Тожиев Тохиржон Халимович. Ферганский государственный университет, к.ф.м.н.
Ибрагимов Шавкат Мамирович. Ферганский государственный университет, старший преподаватель

Аннотация. *В данной статье рассматривается одно из современных методов для решения краевых задач для уравнений приближённых решений математической физики и приводиться некоторое эффективное оценивание.*

Ключевые слова: *диффузия, метод Монте-Карло, приближённые решения, несмещённые оценки, алгоритм, эффективность алгоритма.*

УМУМЛАШГАН НОИЗОТРОПИК ДИФФУЗИЯ ТЕНГЛАМАСИ УЧУН КОШИ МАСАЛАСИНИ СОНЛИ ЕЧИШ

Тожиев Тохиржон Халимович. Фарғона давлат университети, ф.м.ф.н.
Ибрагимов Шавкат Мамирович. Фарғона давлат университети, катта ўқитувчи.

Аннотация. *Ушбу мақолада математика-физика тенгламаларига қўйилган чегаравий масалаларнинг тақрибий ечишнинг замонавий усули кўриб чиқилган ва ечимни эффектив баҳолаш кўрсатилган*.

Калит сўзлар: *диффузия, Монте-Карло усули, тақрибий ечим, силжимас баҳо, алгоритм, алгоритмни эффективлиги*

NUMERICAL SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE GENERALIZED EQUATION OF NONISOTROPIC DIFFUSION

Tojiev Tohirjon Halimovich. Ferghana state university, candidate of physical and mathematical sciences.
Ibragimov Shavkat Mamirovich. Ferghana state university, senior lecturer

Abstract. *This article discusses one of the modern methods for solving boundary value problems of mathematical physics equations and approximate solutions are some effective evaluation.*

Key words: *diffusion, Monte Carlo method, approximate solutions, unbiased assessment, algorithm, the efficiency of the algorithm.*

При исследовании на ЭВМ динамических систем часто используется метод статистических испытаний (метод Монте-Карло). Применения этого метода для исследования систем, заданных стохастическими дифференциальными уравнениями, требует их замени разностные схемы Эйлер и Рунге-Кутта. Такие замены рассматриваются в работах.[1,2] Однако известные оценки погрешности разностных методов решения детерминированных уравнений не могут быть использованы при цифровом моделировании стохастических уравнений ввиду не дифференцируемости почти всюду их решений.

Если иметь в виду приложение метода Монте-Карло, проявивших свою эффективность в многомерных задачах, то весьма актуальным является развитие методов численного интегрирования в слабом смысле как раз для систем со многими шумами.

Рассмотрим задачу Коши в классической постановке в (n+1) мерном пространстве R^{n+1} в слое $\Omega = R^n * [O,T]$

$$(L_1 u)(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} -$$

$$-\sum_{j=1}^{k} a^{ij} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^l \partial x^j} + \sum_{j=1}^{k} \sum_{m=1}^{l} \beta_j^m x^j \frac{\partial u(x,t)}{\partial x^m} = f(x,t) \quad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \; x \in R^n \quad (2)$$

где α^{ij} и β_j^m (i=1,2,...,k , j=1,2,...,k, m=1,2,...,l) постоянные коэффициенты, $n = k + l$.

Пусть $\alpha = (\alpha^{ij}) - k * k$ матрица, $\beta = (\beta_j^m) - l * k$ матрица.

Предполагаем:

- матрица $\alpha = (\alpha^{ij})$ симметрична и положительно определена;
- матрица $\beta = (\beta_j^m)$ такая что, $l * l$ матрица Грамма $(\omega = (\beta \alpha \beta^T)^{-1})$ положительно определена (невырожденное).

Функции $f(x,t)$ и $\varphi(x)$ будем считать непрерывными в R^n. В предположении существования и единственности решения задач (1)- (2) построим алгоритм для его численной реализации.

Для дальнейшего будут удобны следующие обозначения. Введем (в блочной записи) n*n матрицы. Эти матрицы имеют следующий вид

$$a = a(s) = \begin{pmatrix} m_1 m_2 \\ m_2^T m_3 \end{pmatrix}, q = q(s) = a^{-1}(s),$$

$$C(s) = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ -s\beta_l & I_l \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -s\beta & 0 \end{pmatrix}, d(\rho) = \begin{pmatrix} \rho^{\frac{1}{2}} & I_k & 0 \\ 0 & \rho^{\frac{3}{2}} & I_l \end{pmatrix}$$

блок $m_1 = \frac{1}{4s}[\alpha^{-1} + 3\beta^T \omega \beta]$размера $k*k$, блок $m_2 = \frac{3}{2s^2}\beta^T \omega$ размера $k*l$, блок m_2^T размера $l*k$, $m_3 = \frac{3}{s^3}\omega$ размера $l*l$,

матрицы I_k, o, β, I_l аналогичных размеров. Здесь и далее $I_r - r * r$ единичная матрица $d(\rho)$- диагональная матрица, $s = t - \tau$.

Матрицы $a(s)$ и $q(s)$ при $s>0$ положительно определены.

Тогда $Z(x,t;y,\tau)$ фундаментальное решение уравнения (1) с сингулярностью в точке (y,τ) имеет вид

$$Z(x,t;y,\tau)=\pi^{-\frac{n}{2}}\|a\|^{\frac{1}{2}}(t-\tau)^{-\frac{\gamma}{2}}\exp\left\{-(y-Cx)^T d\left(\frac{1}{t-\tau}\right)ad\left(\frac{1}{t-\tau}\right)(y-Cx)\right\} \quad (3)$$

где $\|a\|=\det(a)$, $\gamma=k+3l$.

С помощью фундаментального решения определим в R^{n+1} области (шароиды) следующим образом. Пусть число (параметр) r>0. Область

$$B_r(x,t)=\left\{(y,\tau):Z(x,t;y,\tau)>\pi^{-\frac{n}{2}}\|a\|^{\frac{1}{2}}r^{-\gamma},t>\tau\right\}$$

будем называть шароидом радиусом r с центром в точке (x,t). $B_r,(x,t)$ можно переписать в виде

$$B_r(x,t)=\left\{(y,\tau):(y-Cx)^T d\left(-\frac{1}{t-\tau}\right)ad\left(\frac{1}{t-\tau}\right)(y-Cx)\le-\frac{\gamma}{2}-\ln-\frac{r^2}{t-\tau},t>\tau\right\} \quad (4)$$

Из (4) видно, что τ удовлетворяет следующим условиям $\tau<t,\tau>\ t-r^2$. Каждое сечение шароида горизонтальной плоскостью $\tau=cons$, $t-r^2<cons<t$, является n-мерным эллипсоидом с центром в точке $e^{-(t-\tau)\beta}x,\tau$. Если $\rho<r$ то $B_\rho(x,t)\subset B_r(x,t)$. При $r\to 0$ $B_r(x,t)$ и $\partial B_r(x,t)$монотонно стягиваются к центру (x,t). Поэтому существует такое $r>0$ что при $(x,t)\in\Omega$. $\overline{B_r(x,t)}\subset\overline{\Omega}$

Пусть $r>0$ такое что $\overline{B_r(x,t)}\subset\overline{\Omega}$ тогда для решения задачи (1)- (2) справедливо следующее соотношение

$$u(x,t)=(E_r,u)(x,t)+\overline{f}(x,t) \quad ,(5)$$

где

$$(E_r,u)(x,t)=\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_0^1\lambda^{\gamma-1}\left(\ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}}\right)\int_{S_1(0)}\int u\left(y(\lambda,\theta),\tau(\lambda)\right)H^T(\theta)4b\alpha b^T H(\theta)\,ds\,d\lambda ,$$

$$\overline{f}(x,t)=\int_{B_r(x,t)}\int\left[Z(x,t;y,\tau)-\pi^{-\frac{n}{2}}\|a\|^{\frac{1}{2}}r^{-\gamma}\right]f(y,\tau)\,dy\,d\tau .$$

Здесь $S_1(0)$ $n-1$ мерная единичная сфера с обычными ортогональными координатами $\theta=(\theta_2,\theta_3,...,\theta_n)$, $0\le\theta_j\le\pi$ для $2\le j\le n-1$, $0\le\theta_n\le 2\pi$. $H(\theta)\in S_1(0)$ единичный n- мерный вектор,

$$y(\lambda,\theta)=e^{-r^2\lambda^2\beta}x+\left(\gamma\ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{\frac{1}{2}}d\left(r^2\lambda^2\right)b^{-1}H(\theta) \quad ,(6)$$

$$\tau(\lambda)=t-r^2\lambda^2$$

Из (6) следует, что если $r(x,t)\le t^{\frac{1}{2}}$, при $(x,t)\in\Omega$, то $\overline{B_r(x,t)}\subset\overline{\Omega}$.

Приступим к построению марковской цепи $\{(x^j,t^j)\}_{j=0}^{\infty}$, на которой будем строить несмещенную оценку решения $u(x,t)$ задачи (1)-(2).

Для $u(x,t)=1$, применив формулу (5) получим

$$\left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\int_0^1 \lambda^{\gamma-1}\left(\ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{\frac{n}{2}} d\lambda \int\limits_{s_1(0)} H^T(\theta)4b\alpha b^T H(\theta)ds = 1$$

Отсюда следует, что ядро интегрального уравнения (5) можно рассматривать как плотность распределения.

Рассмотрим интеграл

$$J=\int_0^1 \lambda^{\gamma-1}\left(\ln\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^{\frac{n}{2}} d\lambda \ .$$

Сделав замену переменных $\lambda = e^{-\frac{\rho}{\gamma}}$ получим

$$J=\frac{1}{\gamma^{\left(1+\frac{n}{2}\right)}}\int_0^{\infty} e^{-\rho}\rho^{\frac{n}{2}}d\rho = \frac{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}{\gamma^{\left(1+\frac{n}{2}\right)}}$$

где Г(•)— гамма функция. Теперь можем представить $(E_r u)(x,t)$ следующим образом. $(E_r u)(x,t)=\int_0^{\infty} P_1(\rho)d\rho \int\limits_{S_1(0)} P_2(H)u\left(y\left(e^{-\frac{\rho}{\gamma}},\theta\right),\tau\left(e^{-\frac{\rho}{\gamma}}\right)\right)d\rho$

где $P_1(\rho)$-плотность гамма-распределенной случайной величины с параметром $1+\frac{n}{2}$, $P_2(H)=H^T 4B\alpha B^T \frac{H}{\gamma\sigma_n}$

Для наших целей будем моделировать случайный вектор с плотностью распределения

$$P_2(H)=P_2(H_1,H_2,....,H_n)=-\frac{1}{\gamma\sigma_n}\sum_{ij=1}^{n}K_{ij}H_iH_j\chi_{s_1(0)}(H) \quad \textbf{(7)}$$

где $\chi_{s_1(0)}(H)$ - индикатор множества $S_1(0)$, σ_n-поверхность единичной сферы, K_{ij} элементы матрицы $K=4bab^T$ размера – *n*n*. Так как $H_1,H_2,....,H_n$ являются координатами единичного вектора и $H_1^2+H_2^2+...+H_n^2=1$ получим $H^TKH\le\mu_1$, где μ_1 -наибольшее собственное значение матрицы *K*. Тогда можно моделировать случайный вектор с плотностью распределения (7) методом Неймана. Приведем алгоритм моделирования

Алгоритм:

1) Моделируется $\omega=(\omega_1,\omega_2,...,\omega_n)$ изотропный вектор и γ_2-равномерно распределённая в (0,1) случайная величина

2) $E=\mu_1\gamma_1$

3) Если $\dfrac{\left(\sum_{ij=1}^{n}K_{ij}\omega_i\omega_j\right)}{\gamma}\geq E$, то ω принимается, иначе повторяется пункт (1).

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ -последовательность независимых гамма распределенных случайных величин с параметром $\left(1+\dfrac{n}{2}\right)$, $\{\omega^j\}_{j=1}^{\infty}$ - последовательност независимых векторов плотностью распределения $P_2(H)$.

Определим в Ω цепь Маркова следующими рекуррентными соотношениями:

$$x^0=x\,,t^0=t\,,t^j=t^{j-1}-\exp\left(\frac{-2\xi_j}{\gamma}\right),$$

$$x_i^j=x_i^{j-1}+t_{j-1}\exp\left(-\frac{\xi_j}{\gamma}\right)\xi_j^{\frac{1}{2}}\sum_{m=1}^{n}b_{im}\omega_i^j \qquad (8)$$

$$x_{k+p}^j=x_{k+p}^{j-1}-t_{j-1}\exp\left(-\frac{2\xi_j}{\gamma}\right)\sum_{c=1}^{k}\beta_{pc}x_c^j+t_{j-1}^{\frac{3}{2}}\exp\left(-\frac{3\xi_j}{\gamma}\right)\xi_j^{\frac{1}{2}}\sum_{\nu=1}^{n}b_{k+p,\nu}\omega_i^j$$

где $i=1,2,\dots,k\,,\ p=1,2,\dots,l\,,\quad j=1,2,\dots r\left(x^{j-1},t^{j-1}\right)=\left(t_{j-1}\right)^{\frac{1}{2}}$ соотношения (8) получены из формулы (6). Теперь формулу (5) мы можем записать в следующем виде

$$u\left(x^{j-1},t^{j-1}\right)=E_{\left(x^{j-1},t^{j-1}\right)}u\left(x^j,t^j\right)+\overline{f}\left(x^{j-1},t^{j-1}\right)(9)$$

Определим последовательность случайных величин $\{\eta_l\}_{l=0}^{\infty}$ следующим равенством

$$\eta_l=\sum_{j=1}^{l-1}h\left(x^j,t^j\right)f\left(y^j,\tau^j\right)+u\left(x^l,t^l\right)\,(10)$$

где $\left(y^j,\tau^j\right)$ случайная точка шароида $B_r(x,t)$ при фиксированных $\left(x^j,t^j\right)$, имеющая в нем плотность распределения

$$\frac{\left[Z\left(x^j,t^j;y,\tau\right)-\pi^{-\frac{n}{2}}\|a\|^{\frac{1}{2}}r^{-\gamma}\right]}{h\left(x^j,t^j\right)}\text{, где}$$

$$h(x,t)=\iint\limits_{B_r(x,t)}\left[Z\left(x,t;y,\tau\right)-\pi^{-\frac{n}{2}}\|a\|^{\frac{1}{2}}r^{-\gamma}\right]dyd\tau$$

Взяв $u(x,t)=t$ и применив формулу (9) для $j=1$, из (8) получим

$$h(x,t)=r^2(x,t)\left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)^{\left(1+\frac{n}{2}\right)} \qquad (11)$$

Пусть $\{\mathfrak{I}_l\}_{l=0}^{\infty}$ последовательность σ - алгебр . порожденная случайными величинами $\xi_1,\xi_2,...,\xi_l$ последовательностью векторов $\omega^0,\omega^1,...,\omega^l$ и случайными точками $(y^0,\tau^0),(y^1,\tau^1),...,(y^{l-1},\tau^{l-1})$, $u_{f,\phi}(x,t)$ -решения задачи (1)-(2) соответствующие заданным f,ϕ.

Теорема 1. а) Последовательность $\{\eta_l\}_{l=0}^{\infty}$ образует мартингал относительно последовательности σ -алгебр $\{\mathfrak{I}_l\}_{l=0}^{\infty}$.

б) Если $u_f 2_{,0}(x,t)<+\infty$ и $u_{|f|,0}(x,t)<+\infty$, то η_l является квадратично интегрируемой.

Доказательство: Сперва докажем, что $\{\eta_i\}_{l=0}^{\infty}$ образует мартингал.

Из определения $\mathfrak{I}_l$ видно, что η_l является $\mathfrak{I}_l$ - измеримой то, используя свойство условного математического ожидания и формулы (9) и (11) получим

$$E_{(x,t)}[\eta_{l+1}/\zeta_l]=\sum_{j=0}^{l-1}h(x^j,t^j)\mathrm{f}(y^j,\tau^j)+u(x^l,t^l)=\eta_l$$

Отсюда следует, что $\{\eta_l\}_{l=0}^{\infty}$ образует мартингал относительно $\{\mathfrak{I}_l\}_{l=0}^{\infty}$. Докажем, что $E_{(x,t)}\eta_l^2\le\infty$. Достаточно показать, что

$$I=E_{(x,t)}\left(\sum_{j=0}^{l-1}h(x^j,t^j)f(y^j,t^j)\right)^2<+\infty$$

Разбивая на I два слагаемых, (10) и из конечного условия $r^2(x,t)\le t$ получим, что $h(x,t)\le\left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)^{1+n/2}t$ из этих условий получаем доказательство теоремы.

Теперь покажем один из способов оценки по одному случайному узлу величины

$$\bar{f}(x,t)=\iint\limits_{B_r(x,t)}\left[z(x,t;y,\tau)-\pi^{-\frac{n}{2}}\|a\|^{\frac{1}{2}}r^{-\gamma}\right]f(y,\tau)dyd\tau.$$

Лемма 1. Для функции $\overline{f}(x,t)$ справедливо соотношение

$$\overline{f}(x,t)=\left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)^{\left(1+\frac{n}{2}\right)} r^2 Ef\left(y(\xi,\zeta,\omega),\tau(\xi,\zeta)\right),\text{ где}$$

$$y(\xi,\zeta,\omega)=$$

$$=e^{-r^2\exp\left(-\frac{2\xi}{\gamma+2}\right)\zeta^{2/\gamma}}\beta x+\left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\xi\right)^{1/2}\alpha\left(r^2\exp\left(-\frac{2\xi}{\gamma+2}\right)\zeta^{2/\gamma}b^{-1}\omega,\right) \quad (12)$$

$$\tau(\xi,\zeta)=t-\exp\left(-\frac{2\xi}{\gamma+2}\right)\zeta^{2/\gamma}.$$

Здесь $\xi-$гамма распределенная случайная величина с параметром $\left(n/2\right)$ ζ -бетта распределенная случайная величина с параметром $\left(2/\gamma,\ 2\right)$ и $\omega-$случайный единичный вектор.

Доказательство: Введем область

$$B_r=\left\{(y,\tau):y^T a\left(1/\tau\right)ad\left(1/\tau\right)y<\frac{\gamma}{2}\ln r^{2/\tau},\ \tau>0\right\}$$

Получающуюся, зеркальным отображением шароидов $B_r(o,o)$ относительно плоскости $\tau=0$. Эти области также будем называть шароидами (радиуса r). Тогда имеем

$$f(x,t)=\frac{\|a\|^{1/2}}{\pi^{\frac{n}{2}}r^{\gamma}}\iint\limits_{B_r}\left[r^{\gamma}\tau^{\frac{\gamma}{2}}\exp\left(-y^T d\left(1/\tau\right)ad\left(1/\tau\right)y\right)-1\right]\times$$

$$\times f\left(e^{-\tau\beta}x+y,t-\tau\right)dyd\tau$$

Сделаем замену переменных и некоторое интегральное преобразование и получим доказательство леммы 1

Рассмотрим вопрос о вычислительной реализуемости оценки (10). Возьмём ε достаточно малым и рассмотрим $(\partial\Omega)_\varepsilon=(R^n*[0,\varepsilon])$.

Пусть $N_\varepsilon=\min\left\{l:(x^l,t^l)\in(\partial\Omega)_\varepsilon\right\}$- момент первого попадания процесса (x^l,t^l) в $(\partial\Omega)_\varepsilon$ т.е. N_ε - момент остановки процесса (марковский момент).

Лемма 2. Имеет место неравенство: $E_{(x,t)}N_\varepsilon\le\left(\frac{\gamma=2}{\gamma}\right)^{1+\frac{n}{2}}\frac{t}{\varepsilon}$;

Доказательство. Взяв $u(x,t)=t$ и применив формулы (10) и (11) получим

$$t=U_{1,0}(x,t)\ge E_{(x,t)}\sum_{j=1}^{N_\varepsilon-1}h\left(x^j,t^j\right)=\left(\frac{\gamma}{\gamma+2}\right)E_{(x,t)}\sum_{j=1}^{N_\varepsilon-1}r^2\left(x^j,t^j\right)$$

Из определения $r(x,t)$ следует что $r^2(x^j,t^t)=\{t^j\}\geq\varepsilon$

Отсюда получим, что $t\geq\left(\dfrac{\gamma}{\gamma+2}\right)^{1+n/2}\varepsilon E_{(x,t)}N_\varepsilon$

Следовательно $E_{(x,t)}N_\varepsilon\leq\left(\dfrac{\gamma+2}{\gamma}\right)^{1+n/2}\dfrac{t}{\varepsilon}$.Лемма доказана.

Теорема 2. Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда η_{N_ε} является несмещенной оценкой для $u(x,t)$. Дисперсия ее конечна.

Доказательство. Из теорема 1 следует, что η_t квадратично интегрируема и отсюда η_t является равномерно интегрируемой и $N_\varepsilon<+\infty$. Далее момент остановки процесса является марковским моментом. Поэтому согласно теореме Дуба "О преобразовании свободного выбора" и формуле (9) $E\eta_{N_\varepsilon}=E\eta_t=u(x,t)$ т.е. η_{N_ε} является несмещенной оценкой для $u(x,t)$. Из определения случайных величин η_{N_ε} и η_∞ видно, что $D\eta_{N_\varepsilon}\leq D\eta_\infty$. Из η_{N_ε} стандартным способом строится смешенная, но практически

реализуемая оценка $\eta^*_{N_\varepsilon}$.Пусть $\phi_1(x,0)=\varphi(x)$ $x\in R^n$ и (x,t^*) -ближайшая к (x,t) точка $\partial\Omega$. В оценке $\eta_{N_\varepsilon}=\sum_{j=0}^{N_\varepsilon-1}h(x^j,t^j)f(y^j,\tau^j)+u(x^{N_\varepsilon},t^{N_\varepsilon})$

заменяем $u(x,t^{N_\varepsilon})$ на $u(x,t^{*N_\varepsilon})$ и получаем

$$\eta^*_{N_\varepsilon}=\sum_{j=0}^{N_\varepsilon-1}h(x^j,t^j)f(y^j,\tau^j)+\phi_1(x,t^{*N_\varepsilon})$$

Теорема 3. Пусть $u(x,t)$ удовлетворяет условию Липшица и $A(\varepsilon)$ модуль непрерывности $u(x,t)$. Тогда случайная величина $\eta^*_{N_\varepsilon}$

является смещенной оценкой для $u(x,t)$. $D\eta^*_{N_\varepsilon}$ ограниченная функция параметра ε .

Доказательство: Так как $E_{(x,t)}\eta_{N_\varepsilon}=u(x,t)$ $u(x,t)$, то

$$|u(x,t)-E_{(x,t)}\eta^*_{N_\varepsilon}|=|E_{(x,t)}\eta_{N_\varepsilon}-E_{(x,t)}\eta^*_{N_\varepsilon}|=|E_{(x,t)}u(x,t^{N_\varepsilon})-$$
$$-E_{(x,t)}\phi_1(x,t^{*N_\varepsilon})|\leq E_{(x,t)}|u(x,t^{N_\varepsilon})-u(x,t^{*N_\varepsilon})|=A(\varepsilon)$$

Теорема доказана.

Приведём результаты вычислительного эксперимента.

Численный эксперимент:

$$f(x,y,z,t)=e^t(5\sin(x+y+z)+(y+y)\cos(x+y+z))$$
$$\phi(x,y,z)=\sin(x+y+z)$$

при $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Точное решение $u(x, y, z, t) = e^t \sin(x + y + z)$

Результаты численного эксперимента приведены в таблице.

Число траек-торий	точка x,y,z,t	ε	точное решение	Выборочная оценка	3-сигма
100	0.7, 0.7, 0.7, 0.7	0.005	1.738	1.732	0.017
500	0.6, 0.6, 0.6, 0.6	0.005	1.774	1.647	0.005
100	0.6, 0.6, 0.6, 0.3	0.005	1.315	1.317	0.005
100	0.8, 0.8, 0.8, 0.8	0.005	1.503	1.513	0.020
100	0.5, 0.5, 0.5, 0.3	0.005	1.349	1.358	0.0058

References:

1. Tojiev T.X., Ibragimov SH.M. Metod Monte-Karlo dlya priblijyonnogo resheniya kraevoy zadachi diffuzionnogo uravneniya. Nauchno – texnicheskiy jurnal FerPI 2017 g., t. 21, №4.

2. Tojiev T.X., Ibragimov SH.M. Stoxasticheskie metodi approksimatsii dlya resheniya diffuzionnix zadach. «Fundamentalnie i prikladnie nauchnie issledovaniya: aktualnie voprosi, dostijeniya i innovatsii» sbornik statey XVI Mejdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferensii. – Penza: MSNS «Nauka i Prosveshenie». – 2018 g., 13-15 s.