[Scientific Bulletin of Namangan State University](https://uzjournals.edu.uz/namdu)

Volume 1 | Issue 10 Article 1

10-10-2019

PERIODIC GIBBS MEASURES FOR HC MODEL ON A CAYLEY TREE OF ORDER TWO

Rustamjon Maxmudovich Xakimov
NamSU assistant professor (DSc) at the Department of Math, Third-year student and First- year undergraduate in mathematics

Dilobar Otabek qizi O`ktamaliyeva
NamSU assistant professor (DSc) at the Department of Math, Third-year student and First- year undergraduate in mathematics

O'lmasbek Xudayberdiyevich Rasulov
NamSU assistant professor (DSc) at the Department of Math, Third-year student and First- year undergraduate in mathematics

PERIODIC GIBBS MEASURES FOR HC MODEL ON A CAYLEY TREE OF ORDER TWO

Cover Page Footnote

???????

Erratum

???????

IKKINCHI TARTIBLI KELI DARAXTIDA HC MODELI UCHUN DAVRIY GIBBS O'LCHOVLARI

Xakimov Rustamjon Maxmudovich, O`ktamaliyeva Dilobar Otabek qizi,
Rasulov O'lmasbek Xudayberdiyevich
NamDU Matematika kafedrasi dotsenti (DSc),
Matematika yo'nalisi 3-bosqich talabasi va 1-bosqich magistranti

Annotatsiya: *Mazkur ishda ikkinchi tartibli Keli daraxtida Hard-Core (HC) modeli o`rganilgan. Ikki holatli HC modeli uchun tranlytsion-invariant bo`lmagan davriy Gibbs o`lchovlarining aniq soni topilgan.*

Kalit so'zlar: *Keli daraxti, konfiguratsiya, HC modeli, Gibbs o`lchovi, davriy Gibbs o'lchovlari, translyatsion-invariant Gibbs o'lchovlari.*

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ НС МОДЕЛИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ПОРЯДКА ДВА

Хакимов Рустамжон Махмудович, Уктамалиева Дилобар Отабек кизи, Расулов Улмасбек Худайбердиевич
доцент кафедры Математика НамГУ (DSc),
студент 3-курса и магистрант 1-курса математического направления

Аннотация. *Изучается Hard-Core (HC) модель на дереве Кэли порядка два. Для HC модели с двумя состояниями найдено точное количество периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса.*

Ключевые слова: *дерево Кэли, конфигурация, HC-модель, мера Гиббса, периодическая мера Гиббса, трансляционно-инвариантная мера Гиббса.*

PERIODIC GIBBS MEASURES FOR HC MODEL ON A CAYLEY TREE OF ORDER TWO

Xakimov Rustamjon Maxmudovich, O`ktamaliyeva Dilobar Otabek qizi
Rasulov O'lmasbek Xudayberdiyevich
NamSU assistant professor (DSc) at the Department of Math, Third-year student and First-year undergraduate in mathematics

Abstract. *We study Hard-Core (HC) model on Cayley tree of order two. For a two states HC-model the exact number of periodic (not translation-invariant) Gibbs measures is found.*

Keywords: *Cayley tree, configuration, hard-core model, Gibbs measure, periodic Gibbs measure, translation invariant Gibbs measure.*

Har bir Gibbs o`lchoviga fizik sistemaning bitta fazasi mos qo`yiladi va agar Gibbs o`lchovi yagona bo`lmasa, u holda faza almashishi mavjud, ya`ni fizik sistema bir holatdan ikkinchi holatga o`tadi ([1-4] larga qarang.)

[5] maqolada $k \geq 2$ tartibli Keli daraxtida HC modeli uchun λ parametrning shunday λ_{cr} qiymati topilganki, $\lambda > \lambda_{cr}$ da kamida 3 ta davriy Gibbs o'lchovlari

mavjudligi ko'rsatilgan. Ushbu maqolada esa $k=2$ da davriy Gibbs o'lchovlari soni aniq 3 taligi isbotlangan.

Bizga $\tau^k=(V,L)$ Keli daraxti berilgan bo'lsin, bu yerda V to'plam τ^k daraxtning uchlari to'plami, L esa uning qirralari to'plami. Agar x va y lar l qirraning uchlari bo'lsa, u holda ular eng yaqin qo'shnilar deb aytiladi va $l=\langle x,y\rangle$ kabi yoziladi. Keli daraxtida $d(x,y)$ ($x,y\in V$) masofa deb x va y uchlarni tutashtiruvchi eng qisqa yo'ldagi qirralar soniga aytiladi.

Fiksirlangan $x^0\in V$ uchun ushbu belgilashlar kiritiladi:

$$W_n=\{x\in V \mid d(x,x^0)=n\},\ V_n=\{x\in V \mid d(x,x^0)\le n\},$$

$x\in W_n$ uchun ushbu

$$S(x)=\{y\in W_{n+1}:\ d(x,y)=1\}$$

to'plam x uchning to'g'ri avlodlari deyiladi.

Faraz qilaylik, $\Phi=\{0,1\}$ - spin qiymatlar va $\sigma\in\Phi^V$ - konfiguratsiya bo`lsin, ya`ni $\sigma=\{\sigma(x)\in\Phi:\ x\in V\}$, bu yerda $\sigma(x)=1$ sharti Keli daraxtida x uch bandligini, $\sigma(x)=0$ sharti esa x uch bo'shligini bildiradi.

Agar V (mos ravishda V_n yoki W_n) dagi har qanday qo'shni $\langle x,y\rangle$ lar uchun $\sigma(x)\sigma(y)=0$ bo'lsa, u holda σ - konfiguratsiya joiz konfiguratsiya deyiladi va bunday konfiguratsiyalar to'plamini Ω (Ω_{V_n} va Ω_{W_n}) deb belgilaymiz. Ravshanki, $\Omega\subset\Phi^V$.

HC-modelining gamil`toniani quyidagicha aniqlanadi:

$$H(\sigma)=J\sum_{x\in V}\sigma(x),\quad \sigma\in\Omega$$

bu yerda $J\in R$.

Faraz qilaylik, $\mathbf{B}$ – bu Ω ning silindrik qism to`plamlaridan hosil bo`luvchi σ-algebra bo`lsin. Ixtiyoriy n uchun $\mathbf{B}_{V_n}=\left\{\sigma\in\Omega\ :\ \sigma|_{V_n}=\sigma_n\right\}$ orqali $\mathbf{B}$ qismalgebrani belgilaymiz, bu yerda $\sigma|_{V_n}$ σ ning V_n dagi izi, $\sigma_n: x\in V_n\to\sigma_n(x)-$ V_n dagi joiz konfiguratsiya.

Ta`rif 1. Har qanday $\lambda>0$ uchun gibssning HC-o'lchovi (Ω, $\mathbf{B}$) da aniqlangan, ixtiyoriy n va $\sigma_n\in\Omega_{V_n}$ uchun

$$\mu\{\sigma\in\Omega:\sigma|_{V_n}=\sigma_n\}=\int_{\Omega}\mu(d\omega)P_n\left(\sigma_n\middle|\omega_{W_{n+1}}\right)$$

shartni qanoatlantiruvchi μ ehtimollik o'lchovidir, bunda

$$P_n\left(\sigma_n\middle|\omega_{W_{n+1}}\right)=\frac{e^{-H(\sigma_n)}}{Z_n\left(\lambda;\omega|_{W_{n+1}}\right)}1\left(\sigma_n\vee\omega|_{W_{n+1}}\in\Omega_{V_{n+1}}\right).$$

Bu yerda $\vee$ simvoli konfiguratsiyalarning birlashmasini bildiradi va $Z_n\left(\lambda;\omega|_{W_{n+1}}\right)-$ bu ushbu

$$Z_n\left(\lambda;\omega\big|_{W_{n+1}}\right)=\sum_{\sigma_n\in\Omega_{V_n}}e^{-H(\sigma_n)}\left(\sigma_n\vee\omega\big|_{W_{n+1}}\in\Omega_{V_{n+1}}\right)$$

$\omega\big|_{W_n}$ chegaraviy shartga ega bo`lgan normallashtiruvchi ko`paytma.

Har qanday joiz $\sigma_n\in\Omega_{V_n}$ konfiguratsiya uchun $\#\sigma_n$ orqali V_n dagi birlar (band uchlar) sonini belgilaymiz:

$$\#\sigma_n=\sum_{x\in V_n}\sigma_n(x),$$

$z:x\mapsto z_x=(z_{0,x},z_{1,x})\in R_+^2$ funktsiya V da berilgan vektor funktsiya bo`lsin. Ω_{V_n} da $n=1,2,\ldots$ uchun quyidagicha

$$\mu^{(n)}(\sigma_n)=\frac{1}{Z_n}\lambda^{\#\sigma_n}\prod_{x\in W_n}z_{\sigma_n(x),x}$$

aniqlangan $\mu^{(n)}$ ehtimollik taqsimotini qaraylik, bunda Z_n $-$normallovchi bo`luvchi:

$$Z_n=\sum_{\varphi_n\in\Omega_{V_n}}\lambda^{\#\varphi_n}\prod_{x\in W_n}z_{\varphi_n(x),x}.$$

Agar ixtiyoriy $n\geq1$ va $\sigma_{n-1}\in\Omega_{V_{n-1}}$ uchun quyidagi

$$\sum_{\omega_n\in\Omega_{W_n}}\mu^{(n)}(\sigma_{n-1}\vee\omega_n)\mathbf{1}(\sigma_{n-1}\vee\omega_n\in\Omega_{V_n})=\mu^{(n-1)}(\sigma_{n-1}),$$

tenglik o`rinli bo`lsa, u holda $\mu^{(n)}$ ehtimolliklar ketma-ketligi muvofiqlashgan deyiladi, bunda

$$\mathbf{1}(\sigma_{n-1}\vee\omega_n\in\Omega_{V_n})=\begin{cases}1, \text{ agar } & \sigma_{n-1}\vee\omega_n\in\Omega_{V_n}\\ 0, \text{ agar } & \sigma_{n-1}\vee\omega_n\notin\Omega_{V_n}.\end{cases}$$

Agar $\mu^{(n)}$ uchun muvofiqlik sharti bajarilsa, u holda Kolmogorov teoremasiga ko`ra $(\Omega,\mathbf{B})$ da ixtiyoriy n va $\sigma_n\in\Omega_{V_n}$ uchun ushbu

$$\mu(\{\sigma|_{V_n}=\sigma_n\})=\mu^{(n)}(\sigma_n).$$

tenglikni qanoatlantiruvchi yagona μ o`lchov mavjud.

Ma`lumki, $\tau^k$ ni barpo etuvchilari mos ravishda $a_1,\ldots,a_{k+1}$ bo`lgan 2-tartibli $k+1$ ta sikllik gruppalarning G_k erkin ko'paytmasi shaklida tasvirlash mumkin.

Ma`lumki [5], Keli daraxtida HC modelidagi har bir Gibss o'lchoviga ushbu

$$z_x=\prod_{y\in S(x)}\left(1+\lambda z_y\right)^{-1} \quad (1)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $z=\{z_x,\ x\in G_k\}$ miqdorlar to'plamini mos qo'yish mumkin, bu yerda $\lambda=e^J>0$ - parametr.

Faraz qilaylik, $G_k^*-G_k$ ning chekli indeksli normal bo'luvchisi bo'lsin.

Ta`rif 2. Agar har qanday $x\in G_k$, $y\in G_k^*$ lar uchun $z_{yx}=z_x$ bo'lsa, u holda $z=\{z_x,\quad x\in G_k\}$ miqdorlar G_k^* - davriy deyiladi.

G_k-davriy miqdorlar translyatsion-invariant deyiladi.

Ta`rif 3. Agar μ o'lchov G_k^*-davriy z miqdorlar to'plamiga mos kelsa, u holda μ o'lchov G_k^* -davriy deyiladi.

Ushbu maqolada $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o'lchovlarini o'rganamiz.

Quyidagi teorema ma'lum.

Теорема 1. [6] HC modeli uchun har qanday $G\subset G_k$ normal bo'luvchi uchun G-davriy Gibbs o'lchovlari translyatsion-invariant yoki $G_k^{(2)}$-davriy bo'ladi, bunda $G_k^{(2)}$ – uzunligi juft bo'lgan so'zlardan iborat qism-gruppa, ya'ni

$$G_k^{(2)}=\{x\in G_k:|x|-\text{juft}\}.$$

$G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o'lchovlariga ushbu

$$z_x=\begin{cases} z_1, \ \text{agar } x\in G_k^{(2)}, \\ z_2, \ \text{agar } x\in G_k\setminus G_k^{(2)}. \end{cases}$$

funksiyalar mos qo'yiladi. Bu holda (1) ga ko'ra quyidagi tenglamalar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} z_1=\dfrac{1}{(1+\lambda z_2)^k}, \\ z_2=\dfrac{1}{(1+\lambda z_1)^k}. \end{cases} \quad (2)$$

Eslatma. HC modeli uchun $k\geq 2$ va $\lambda>0$ da translyatsion-invariant Gibbs o'lchovi yagona ekanligi isbotlangan ([5] ga qarang).

Quyidagi teorema ma'lum.

Теорема 2. [5] $\lambda_{cr}=(k-1)^{-1}\left(\dfrac{k}{k-1}\right)^k$ bo'lsin. U holda HC modeli uchun $\lambda\leq\lambda_{cr}$ bo'lganda translyatsion-invariant bo'lgan yagona $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o'lchovi mavjud, $\lambda>\lambda_{cr}$ da esa biri translyatsion-invariant bo'lgan, qolganlari translyatsion-invariant bo'lmagan kamida uchta $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o'lchovlari mavjud.

Quyidagi lemma o'rinli ekanligini ko'rish qiyin emas.

Lemma. Agar (x_0,y_0) ushbu

$$\begin{cases} x=h(y) \\ y=h(x) \end{cases} \quad (3)$$

tenglamalar sistemasining yechimi bo'lsa, u holda (y_0,x_0) ham bu sistemaning yechimi bo'ladi.

Xususan, lemmadan agar (x_0, y_0) $(x_0 \neq y_0)$ yechim mavjud bo'lsa, u holda (3) sistema bittadan ko'p yechimga ega ekanligi kelib chiqadi.

Quyidagi teoremada $k=2$ bo'lganda $\lambda > \lambda_{cr}$ da aniq uchta $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o'lchovlari mavjudligi isbotlangan.

Теорема 3. $k=2$ va $\lambda_{cr}=4$ bo'lsin. U holda HC modeli uchun $\lambda \le \lambda_{cr}$ bo'lganda translyatsion-invariant bo'lgan yagona $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o'lchovi mavjud, $\lambda > \lambda_{cr}$ bo'lganda esa biri translyatsion-invariant bo'lgan, qolgan 2 tasi translyatsion-invariant bo'lmagan aniq 3 ta $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o'lchovlari mavjud.

Isboti. (2) sistemada $\sqrt{z_1}=x$ va $\sqrt{z_2}=y$ belgilashlar kiritib, uni $k=2$ bo'lganda quyidagicha yozib olamiz:

$$\begin{cases} x+\lambda xy^2=1 \\ y+\lambda yx^2=1. \end{cases} \quad (4)$$

Bu tenglamalar sistemasida birinchi tenglamadan ikkinchisini ayiramiz. Natijada ushbu

$$(x-y)(1-\lambda xy)=0$$

tenglamaga kelamiz. Bundan $x=y$ yoki

$$\lambda xy=1$$

bo'ladi.

Agar $x=y$ bo'lsa, u holda $\lambda>0$ da yagona translyatsion-invariant Gibbs o'lchoviga mos keluvchi (x_0, x_0) yechimga ega bo'lamiz.

Endi $x \neq y$ va $\lambda xy=1$ bo'lsin. Bu holda (4) dan quyidagi kvadrat tenglamaga kelamiz:

$$\lambda x^2-\lambda x+1=0.$$

Bu tenglamaning yechimlari ushbu

$$x_1=\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4\lambda}}{2\lambda},\ x_2=\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4\lambda}}{2\lambda}.$$

ko'rinishlarga ega. Bu yerda $\lambda>\lambda_{cr}=4$ va $x_1>0, x_2>0$ ekanligini ko'rish qiyin emas.

Endi, $\lambda xy=1$ ekanligidan

$$y_1=\frac{2}{\lambda+\sqrt{\lambda^2-4\lambda}},\ y_2=\frac{2}{\lambda-\sqrt{\lambda^2-4\lambda}}.$$

ga ega bo'lamiz.

Demak, (4) tenglamalar sistemasi $\lambda>0$ da yagona (x_0, x_0) yechimga, $\lambda>\lambda_{cr}$ da esa aniq 2 ta (x_1, y_1), (x_2, y_2) yechimlarga ega. Lemmaga ko'ra, (4) tenglamalar sistemasi uchun (y_1, x_1) va (y_2, x_2) ham yechim bo'ladi, lekin $x_1=y_2$ va $x_2=y_1$ ekanligini ko'rish qiyin emas, ya'ni HC modeli uchun $\lambda \le \lambda_{cr}$ bo'lganda (x_0, x_0) yechimga mos keluvchi translyatsion-invariant bo'lgan yagona $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o'lchovi mavjud va $\lambda>\lambda_{cr}$ da biri (x_0, x_0) yechimga mos keluvchi translyatsion-invariant, 2 tasi mos ravishda (x_1, y_1),

(x_2, y_2) yechimlarga mos keluvchi translyatsion-invariant bo'lmagan $G_k^{(2)}$-davriy Gibbs o'lchovlari mavjud ekan. Teorema isbot bo'ldi.

References:

1.Georgi X.-O.Gibbsovskie meri i fazovie perexodi.-M.:Mir, 1992.
2.Preston K. Gibbsovskie sostoyaniya na schetnix mnojestvax.-M.:Mir, 1977.
3.Sinay YA. G. Teoriya fazovix perexodov. Strogie rezultati.-M.: Nauka, 1980.
4.Rozikov U. A. Gibbs measures on Cayley trees. Singapore: World Sci., 2013.
5.Suhov Yu.M., Rozikov U.A. A hard-core model on a Cayley tree: an example of a loss network. Queueing Syst. 46 (1/2) (2004),–P. 197-212.
6.Rozikov U.A., Xakimov R.M. Uslovie edinstvennosti slabo periodicheskoy meri Gibbsa dlya modeli jestkoy serdsevini. Teor. i matem. fizika,–2012.–Tom 173, № 1. –C. 60-70.