Scientific Bulletin of Namangan State University

Volume 1 | Issue 8 Article 5

9-10-2019

ON THE STATEMENT AND STUDY OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE PARABOL-HYPERBOLIC EQUATION OF THE FOURTH ORDER

Mirza Mamajonov
Associate Professor Kokand state pedagogical institute

Sanjarbek Mirzayevich Mamajonov
Teacher Kokand state pedagogical institute

ON THE STATEMENT AND STUDY OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE PARABOL-HYPERBOLIC EQUATION OF THE FOURTH ORDER

Cover Page Footnote

???????

Erratum

???????

УДК 517.956.6

О ПОСТАНОВКЕ И ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

[1]Мирза Мамажонов.Доцент [1]Мамажонов Санжарбек Мирзаевич.Преподаватель
[1]Конадского государственного педагогического инсититута

Аннотация: *В настоящей работе ставится и исследуется одна краевая задача для одного параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка в смешанной пятиугольной области. Однозначная разрешимость этой поставленной задачи доказывается методами построения решения,интегральных и дифференциальных уравнений.*

Ключевые слова: *Дифференциальные и интегральные уравнения,метод построения решения,краевая задача,параболо-гиперболический тип,однозначная разрешимость.*

ТЎРТИНЧИ ТАРТИБЛИ ПАРАБОЛИК-ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМА УЧУН БИТТА ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАНИНГ ҚЎЙИЛИШИ ВА ТАДҚИҚ ЭТИЛИШИ ҲАҚИДА

Мирза Мамажонов.Қўқон давлат педагогика институти доценти.
Мамажонов Санжарбек Мирзаевич.Қўқон давлат педагогика институти ўқитувчиси

Аннотация:.*Ушбу ишда битта параболик-гиперболик тенглама учун аралаш бешбурчакли соҳада битта чегаравий масала қўйилади ва тадқиқ этилади.Бу қўйилган масаланинг бир қийматли ечилишини ечимни қуриш,дифференциал ва интеграл тенгламалар усуллари ёрдамида исбот қилинади.*

Таянч иборалар:.*Дифференциал ва интеграл тенгламалар ечимни қуриш усули, чегаравий масала,параболик-гиперболик тип,бир қийматли ечилиш.*

ON THE STATEMENT AND STUDY OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE PARABOL-HYPERBOLIC EQUATION OF THE FOURTH ORDER

Mamajonov Mirza. Associate Professor Kokand state pedagogical institute
Mamajonov Sanjarbek Mirzayevich. Teacher Kokand state pedagogical institute

Abstract:.*In the article we pose and study one boundary-value problem for one fourth-order parabolic-hyperbolic equation in a mixed pentagonal region. The unique solvability of this task is proved by the methods of constructing solutions,integral and differential equations.*

Key words:.*Differential and integral equations,solution construction method, boundary value problem,parabolic-hyperbolic type, unique solvability.*

В настоящей статье в пятиугольной области G плоскости xOy ставится и исследуется одна краевая задача для параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка вида

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial y}\right)(Lu)=0, \quad (1)$$

где $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup J_1 \cup J_2$; G_1 – прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2 – треугольник с вершинами в точках $B, C(0,-1)$, $D(-1,0)$; G_3 – прямоугольник с вершинами в точках $A, D, D_0(-1,1), A_0$; J_1 – открытый отрезок с вершинами в точках B, D; J_2 – открытый отрезок с вершинами в точках A, A_0;

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x,y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy}, & (x,y) \in D_i, \; i = 2,3. \end{cases}$$

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача-1. Найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G \setminus J_1 \setminus J_2$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} – непрерывны в G вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G \setminus J_1 \setminus J_2$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(1,y) = \varphi_1(y), \quad 0 \le y \le 1; (2)$$

$$u(-1,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le 1; (3)$$

$$u_x(1,y) = \varphi_3(y), \quad 0 \le y \le 1; (4)$$

$$u_x(-1,y) = \varphi_4(y), \quad 0 \le y \le 1; (5)$$

$$u|_{BC} = \psi_1(x), \; 0 \le x \le 1; (6)$$

$$u|_{DF} = \psi_2(x), \; -1 \le x \le -1/2; (7)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC} = \psi_3(x), \; 0 \le x \le 1; (8)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{DC} = \psi_4(x), \; -1 \le x \le 0; (9)$$

4) удовлетворяет следующим условия склеивания на линиях изменения типа:

$$u(x,+0) = u(x,-0) = T(x), \; -1 \le x \le 1; (10)$$

$$u_y(x,+0) = u_y(x,-0) = N(x), \; -1 \le x \le 1; (11)$$

$$u_{yy}(x,+0) = u_{yy}(x,-0) = M(x), \; x \in (-1,0) \cup (0,1); (12)$$

$$u(+0,y) = u(-0,y) = \tau_3(y), \; 0 \le y \le 1; (13)$$

$$u_x(+0,y) = u_x(-0,y) = \nu_3(y), \; 0 \le y \le 1; (14)$$

$$u_{xx}(+0,y) = u_{xx}(-0,y) = \mu_3(y), \; 0 < y < 1; (15)$$

$$u_{xxx}(+0,y) = u_{xxx}(-0,y) = \theta_3(y), \; 0 < y < 1, (16)$$

где $\varphi_i \; (i = \overline{1,4})$, $\psi_j \; (j = \overline{1,4})$ – заданные достаточно гладкие функции, n – внутренняя нормаль к прямой $x + y = -1$ или $x - y = 1$, а $F(1/2, -1/2)$.

При этом, кроме введенных выше обозначений используются еще следующие обозначения: $T(x) = \begin{cases} \tau_1(x), \; если \; 0 \le x \le 1, \\ \tau_2(x), \; если \; -1 \le x \le 0; \end{cases}$ $N(x) = \begin{cases} \nu_1(x), \; e \quad \le c \;\; \le 0 \\ \nu_2(x), \; если \; - \;\; \le x \le 1 \end{cases}$

$M(x) = \begin{cases} \mu_1(x), \; если \; 0 < x < 1, \\ \mu_2(x), \; если \; -1 < x < 0, \end{cases}$ а τ_i, ν_i, μ_i $(i = \overline{1,3})$, θ_3 – следы решения $u(x,y)$ на линиях изменения типа.

Теорема.Если $\varphi_1,\varphi_2 \in C^4[0,1]$, $\varphi_3,\varphi_4 \in C^3[0,1]$, $\psi_1 \in C^4[0,1]$, $\psi_2 \in C^4[-1,-1/2]$, $\psi_3 \in C^3[0,1]$, $\psi_4 \in C^3[-1,0]$,причем выполняется условие согласования $\psi_1(1)=\varphi_1(0)$, $\varphi_2(0)=\psi_2(-1)$, $\psi_4'(0)=-\psi_3'(0)$,то задача-1 допускает единственное решение.

Доказательство.Теорему докажем методом построения решения.Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_{11}(x+y)+\omega_{12}(y),\ (x,y)\in G_1,(17)$$

$$u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_{i1}(x+y)+\omega_{i2}(y),\ (x,y)\in G_i\quad (i=2,3),(18)$$

где введены обозначения $u(x,y)=u_i(x,y),\ (x,y)\in G_i\ \left(i=\overline{1,3}\right)$,причем $\omega_{i1}(x+y),\ \omega_{i2}(y)\ \left(i=\overline{1,3}\right)$ неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Исследование будем провести сначала в области G_2.Решение уравнения (18) $(i=2)$, удовлетворяющее условиям (10), (11) представляется в виде

$$u_2(x,y)=\frac{1}{2}\left[T(x+y)+T(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N(t)dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\omega_{21}(\xi+\eta)d\xi-\int_0^y(y-\eta)\omega_{22}(\eta)d\eta.\ (19)$$

Подставляя (19) в условия (8) и (9) после упрощений, имеем

$$\omega_{21}(2x-1)+\omega_{22}(x-1)=-\sqrt{2}\psi_3'(x),\ 0\le x\le 1,\ (20)$$

$$\omega_{21}(-1)+\omega_{22}(-x-1)=\sqrt{2}\psi_4'(x),\ -1\le x\le 0.(21)$$

Из (20) и (21) при $x=0$ следует $\psi_4'(0)=-\psi_3'(0)$.

В уравнении (21) меняя аргумент $-x-1$ на y,получим

$$\omega_{22}(y)=\sqrt{2}\psi_4'(-y-1)-\omega_{21}(-1),\ -1\le y\le 0.\ (22)$$

В равенстве (22) полагая $y=x-1$ и подставляя полученное равенство в (20) и меняя аргумент $2x-1$ на $x+y$, находим

$$\omega_{21}(x+y)=-\sqrt{2}\psi_3'\left(\frac{x+y+1}{2}\right)-\sqrt{2}\psi_4'\left(-\frac{x+y+1}{2}\right)+\omega_{21}(-1),\ -1\le x+y\le 1.(23)$$

Слагая (23) и (22), имеем

$$\omega_{21}(x+y)+\omega_{22}(y)=-\sqrt{2}\psi_3'\left(\frac{x+y+1}{2}\right)-\sqrt{2}\psi_4'\left(-\frac{x+y+1}{2}\right)+$$

$$+\sqrt{2}\psi_4'(-1-y),\ -1\le x+y\le 1,\ -1\le y\le 0.$$

Теперь подставляя (19) в (6),после некоторых выкладок, имеем соотношение между неизвестными функциями $T(x)$ и $N(x)$:

$$T'(x)+N(x)=\alpha_1(x),\ -1\le x\le 1,\ (24)$$

где

$$\alpha_1(x)=\psi_1'\left(\frac{x+1}{2}\right)-\int_0^{(x-1)/2}\left[\omega_{21}(x)+\omega_{22}(\eta)\right]d\eta.$$

При $-1\le x\le 0$ имеем соотношение

$$\tau_2'(x)+\nu_2(x)=\alpha_1(x),\ -1\le x\le 0.\ (25)$$

Далее, подставляя (19) в (7), получим соотношение

$$\tau_2'(x)-\nu_2(x)=\delta_1(x),\ -1\le x\le 0,\ (26)$$

где

$$\delta_1(x)=\psi_2'\left(\frac{x-1}{2}\right)-\int_0^{-(x+1)/2}\left[\omega_{21}(x+2\eta)+\omega_{22}(\eta)\right]d\eta\,.$$

Из (25) и (26) находим функции $\tau_2'(x)$ и $\nu_2(x)$:

$$\tau_2'(x)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(x)+\delta_1(x)\right],\nu_2(x)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(x)-\delta_1(x)\right].\ (27)$$

Интегрируя первое из равенств (27) от -1 до x, находим

$$\tau_2(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_2(-1)\,.$$

При $0\le x\le 1$ уравнение (24) имеет вид

$$\tau_1'(x)+\nu_1(x)=\alpha_1(x),\ 0\le x\le 1.\ (28)$$

Теперь переходя в уравнении (19) $(i=2)$, к пределу при $y\to 0$, в силу (11) и (13) получим соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$\tau_1''(x)-\mu_1(x)=\omega_{21}(x)+\omega_{22}(0).(29)$$

Далее, применяя оператор $\dfrac{\partial}{\partial x}-\dfrac{\partial}{\partial y}$ к уравнению (17) и устремляя y к нулю, получим еще одно соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$\tau_1'''(x)-\nu_1''(x)-\nu_1'(x)+\mu_1(x)=-\omega_{12}'(0)\ (30)$$

Исключая из (28), (29) и (30) функции $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$, затем интегрируя полученное уравнение дважды от 0 до x, имеем

$$\tau_1'(x)+\tau_1(x)=\alpha_2(x)-\frac{1}{2}\omega_{12}'(0)\frac{x^2}{2}+k_1x+k_2,\ 0\le x\le 1,$$

где

$$\alpha_2(x)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(x)+\int_0^x\alpha_1(t)\,dt+\int_0^x(x-t)\left[\omega_{21}(t)+\omega_{22}(0)\right]dt\right],$$

а $\omega_{12}'(0)$, k_1, k_2 – неизвестные пока действительные числа.

Теперь решая последнее уравнение при условиях

$$\tau_1(1)=\varphi_1(0),\ \tau_1'(1)=\varphi_3(0),\ \tau_1(0)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_2(-1),\ \tau_1'(0)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(0)+\delta_1(0)\right],$$

находим функцию $\tau_1(x)$:

$$\tau_1(x)=\int_0^x\exp(t-x)\alpha_2(t)\,dt-\frac{1}{2}\omega_{12}'(0)\left[\frac{x^2}{2}-x+1-\exp(-x)\right]+$$
$$+k_1\left[x-1+\exp(-x)\right]+k_2\left[1-\exp(-x)\right]+k_3\exp(-x),$$

где

$$k_3=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_2(-1),\ k_2=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(0)+\delta_1(0)\right]-\alpha_2(0)+k_3,$$

$$k_1 = \frac{1}{e-3}\left[\alpha_2(1)(e-2) + \int_0^1 \exp(t)\alpha_2(t)dt + k_2 + k_2 + (e-4)\varphi_3(0)\right],$$

$$\omega_{12}'(0) = 2\left[k_1(e-1) + \alpha_2(1)e + k_2 - k_3 - e\varphi_3(0) - \int_0^1 \exp(t)\alpha_2(t)dt\right].$$

Тогда будут известными и функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$, $u_2(x,y)$.

Переходя в уравнениях (18) $(i=2)$ и (18) $(i=3)$ к пределу при $y \to 0$ с учетом условий (10),(12) и производя замену $x \square x+y$, находим

$$\omega_{31}(x+y) = \omega_{21}(x+y) + \omega_{22}(0) - \omega_{32}(0), \; -1 \le x+y \le 0.$$

Теперь переходим к рассмотрению задачи в области G_3.Сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_{3xx} - u_{3yy} = \Omega_{31}(x+y) + \omega_{32}(y), \\ u_3(x,0) = T_2(x), \; u_{3y}(x,0) = N_2(x), \; -2 \le x \le 1, \\ u_3(-1,y) = \varphi_2(y), \; u_{3x}(-1,y) = \varphi_4(y), \; u_{3x}(0,y) = \nu_3(y), \; u_3(0,y) = \tau_3(y), \; 0 \le y \le 1, \end{cases}$$

где функции $T_2(x)$, $N_2(x)$, $\Omega_{31}(x+y)$ определяются следующим образом:в промежутке $-1 \le x \le 0$ функции $T_2(x)$, $N_2(x)$ имеют вид: $T_2(x) = \tau_2(x)$, $N_2(x) = \nu_2(x)$, функция $\Omega_{31}(x+y)$ при $-1 \le x+y \le 0$ имеет вид: $\Omega_{31}(x+y) = \omega_{31}(x+y)$, а в промежутках $-2 \le x \le -1$ и $0 \le x \le 1$ функции $T_2(x)$, $N_2(x)$ и в промежутках $-2 \le x+y \le -1$ и $0 \le x+y \le 1$ функция $\Omega_{31}(x+y)$ пока неизвестны.

Решение этой задачи будем искать в виде

$$u_3(x,y) = u_{31}(x,y) + u_{32}(x,y) + u_{33}(x,y), \quad (31)$$

где $u_{31}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{31xx} - u_{31yy} = 0, \\ u_{31}(x,0) = T_2(x), \; u_{31y}(x,0) = 0, \; -2 \le x \le 1, \\ u_{31}(-1,y) = \varphi_2(y), \; u_{31}(0,y) = \tau_3(y), \end{cases} \quad (32)$$

$u_{32}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{32xx} - u_{32yy} = \omega_{32}(y), \\ u_{32}(x,0) = 0, \; u_{32y}(x,0) = N_2(x), \; -2 \le x \le 1, \\ u_{32}(-1,y) = 0, \; u_{32}(0,y) = 0, \end{cases} \quad (33)$$

$u_{33}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{33xx} - u_{33yy} = \Omega_{31}(x+y), \\ u_{33}(x,0) = 0, \; u_{33y}(x,0) = 0, \; -2 \le x \le 1, \\ u_{33}(-1,y) = 0, \; u_{33}(0,y) = 0. \end{cases} \quad (34)$$

Методом продолжения находим решения задач (32)-(34). Они имеют вид

$$u_{31}(x,y) = \frac{1}{2}\left[T_2(x+y) + T_2(x-y)\right], \quad (35)$$

$$u_{32}(x,y) = \frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y} N_2(t)dt - \int_0^y (y-\eta)\omega_{32}(\eta)d\eta, \quad (36)$$

$$u_{33}(x,y)=-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_{31}(\xi+\eta)d\xi. \quad (37)$$

где

$$T_2(x)=\begin{cases}2\varphi_2(-1-x)-\tau_2(-2-x),\ -2\le x\le -1,\\ \tau_2(x),\ -1\le x\le 0,\\ 2\tau_3(x)-\tau_2(-x),\ 0\le x\le 1;\end{cases}$$

$$N_2(x)=\begin{cases}2\int_0^{-1-x}\omega_{32}(\eta)d\eta-\nu_2(-2-x),\ -2\le x\le -1,\\ \nu_2(x),\ -1\le x\le 0,\\ 2\int_0^x\omega_{32}(\eta)d\eta-\nu_2(-x),\ 0\le x\le 1;\end{cases}$$

а функция $\Omega_{31}(x+y)$ определяется следующим образом.

Первые два условия задачи (34) выполняются автоматически. Удовлетворяя третье условию, находим

$$\frac{1}{4}\int_{-1-y}^{y-1}\Omega_{31}(z)dz=-\frac{y}{2}\omega_{31}(y-1). \quad (38)$$

Дифференцируя (38), находим

$$\Omega_{31}(-1-y)=-3\omega_{31}(y-1)+2y\omega_{31}'(y-1). \quad (39)$$

Из последнего равенства следует $\omega_{31}(-1)=0$ или $\omega_{32}(0)=\omega_{21}(-1)+\omega_{22}(0)$.

Далее,удовлетворяя четвертое условие задачи (34),имеем соотношение

$$3\Omega_{31}(y)+2y\Omega_{31}'(y)+\omega_{31}(-y)=0. \quad (40)$$

Подставляя (35),(36),(37) в (31),получим

$$u_3(x,y)=\frac{T_2(x+y)+T_2(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N_2(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^y d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_{31}(\xi+\eta)d\xi-$$

$$-\int_0^y(y-\eta)\omega_{32}(\eta)d\eta. \quad (41)$$

Дифференцируя (41) по x и полагая в полученном равенстве $x\to -1$, после некоторых выкладок, в силу (38),находим

$$\omega_{32}(y)=\tau_2''(y-1)-\varphi_2''(y)+\nu_2'(y-1)-\varphi_4'(y)-\omega_{31}(y-1)-y\omega_{31}'(y-1). (42)$$

Переходя в уравнениях (17) и (18) $(i=3)$ к пределу при $x\to 0$ в силу условий (13) и (15), находим

$$\mu_3(y)-\tau_3'(y)=\overline{\omega}_{11}(y)+\omega_{12}(y), (43)$$

$$\mu_3(y)-\tau_3''(y)=\Omega_{31}(y)+\omega_{32}(y), \quad (44)$$

где положено

$$\omega_{11}(x+y)=\begin{cases}\overline{\overline{\omega}}_{11}(x+y),\ 1\le x+y\le 2,\\ \overline{\omega}_{11}(x+y),\ 0\le x+y\le 1,\end{cases}$$

причем $\overline{\omega}_{11}(1)=\overline{\overline{\omega}}_{11}(1)$.

Дифференцируя уравнения (17) и (18) $(i=3)$ по x и полагая в полученных уравнениях $x\to 0$ в силу условий (14) и (16), получим

$$\theta_3(y)-\nu_3'(y)=\overline{\omega'}_{11}(y), \quad (45)$$

$$\theta_3(y)-\nu_3''(y)=\Omega_{31}'(y). \quad (46)$$

Исключая из (43), (44) функцию $\mu_3(y)$, а из (45), (46) функцию $\theta_3(y)$ после некоторых выкладок, получим

$$\tau_3''(y)-\tau_3'(y)=\overline{\omega}_{11}(y)+\omega_{12}(y)-\Omega_{31}(y)-\omega_{32}(y), \quad (47)$$

$$\Omega_{31}'(y)=\overline{\omega'}_{11}(y)-\left[\nu_3''(y)-\nu_3'(y)\right], \quad (48)$$

Интегрируя (48) от 0 до y, находим

$$\Omega_{31}(y)=\overline{\omega}_{11}(y)-\overline{\omega}_{11}(0)-\left[\nu_3'(y)-\nu_3(y)\right]+\left[\nu_1'(0)-\tau_1'(0)\right]. \quad (49)$$

Подставляя (49) в (47), получим

$$\omega_{12}(y)=\left[\tau_3''(y)-\tau_3'(y)\right]-\left[\nu_3'(y)-\nu_3(y)\right]+\beta_1(y), \quad (50)$$

где

$$\beta_1(y)=\omega_{32}(y)-\overline{\omega}_{11}(0)+\nu_1'(0)-\tau_1'(0).$$

Переходя в уравнении (17) к пределу при $y\to 0$ в силу условий (10) и (11), находим

$$\overline{\omega}_{11}(x+y)=\tau_1''(x+y)-\nu_1(x+y)-\omega_{12}(0). \quad (51)$$

Дифференцируя (41) по x и полагая в полученном равенстве $x\to 0$, в силу (40), (49), после длинных вычислений, получим первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_3(y)$ и $\nu_3(y)$:

$$\nu_3(y)=\frac{2}{3}\int_0^y \exp\left[\frac{1}{3}(y-\eta)\right]\tau_3''(\eta)\,d\eta+\beta_2(y),\ 0\le y\le 1, \quad (52)$$

где

$$\beta_2(y)=\int_0^y \exp\left[\frac{1}{3}(y-\eta)\right]\left\{\frac{2}{3}\left[\nu_2'(-\eta)-\tau_2''(-\eta)+\omega_{32}(\eta)\right]+\frac{1}{3}\omega_{31}(-\eta)\right\}d\eta+$$

$$+\int_0^y \exp\left[\frac{1}{3}(y-\eta)\right]\left\{\frac{1}{3}\left[\overline{\omega}_{11}(\eta)-\overline{\omega}_{11}(0)\right]+\frac{1}{3}\left[\nu_1'(0)-\tau_1'(0)\right]\right\}d\eta+\frac{1}{2}\left[\alpha_1(0)+\delta_1(0)\right]\exp(y/3).$$

Подставляя (52) в (50), получим

$$\omega_{12}(y)=\frac{1}{3}\tau_3''(y)+\int_0^y\left\{\frac{4}{9}\exp\left[\frac{1}{3}(y-\eta)\right]-1\right\}\tau_3''(\eta)\,d\eta+\beta_3(y),\ 0\le y\le 1, \quad (53)$$

где

$$\beta_3(y)=\beta_1(y)+\beta_2(y)-\beta_2'(y)-\nu_1(0).$$

А подставляя (52) в (49), имеем

$$\Omega_{31}(y)=-\frac{2}{3}\tau_3''(y)+\frac{4}{9}\int_0^y \exp\left[\frac{1}{3}(y-\eta)\right]\tau_3''(\eta)\,d\eta-\beta_2'(y)+\beta_2(y)+$$

$$+\overline{\omega}_{11}(y)-\overline{\omega}_{11}(0)+\nu_1'(0)-\tau_1'(0),\ 0\le y\le 1.$$

Теперь переходим в область G_1. Записываем решение уравнения (17), удовлетворяющего условиям (2),(10),(13):

$$u_1(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left\{\int_0^y \tau_3(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)d\eta-\int_0^y \varphi_1(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)d\eta+\right.$$
$$+\int_0^1 \tau_1(\xi)G(x,y;\xi,0)d\xi-\int_0^y d\eta\int_0^{1-\eta}\overline{\omega}_{11}(\xi+\eta)G(x,y;\xi,\eta)d\xi-$$
$$\left.-\int_0^y d\eta\int_{1-\eta}^1 \overline{\overline{\omega}}_{11}(\xi+\eta)G(x,y;\xi,\eta)d\xi-\int_0^y \omega_{12}(\eta)d\eta\int_0^1 G(x,y;\xi,\eta)d\xi\right\}.(54)$$

Дифференцируя (54) по x и полагая $x\to 0$,с учетом равенств (51)-(53) после длинных вычислений,получим интегральное уравнение типа Абеля относительно $\tau_3'''(y)$. Применяя обращение Абеля к этому уравнению, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\tau_3'''(y)$:

$$\tau_3'''(y)+\int_0^y K_1(y,\eta)\tau_3'''(\eta)d\eta+\int_0^y K_2(y,\eta)\overline{\overline{\omega}}'_{11}(1+\eta)d\eta=g_1(y),\ 0\le y\le 1,\ (55)$$

где $K_1(y,\eta)$, $K_2(y,\eta)$, $g_1(y)$–известные функции, причем $K_1(y,\eta)$ имеет слабую особенность (порядка $1/2$), $g_1(y)$–непрерывная функция, а

$$\left.\begin{matrix}G(x,y;\xi,\eta)\\N(x,y;\xi,\eta)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{\sqrt{y-\eta}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\mp\exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}-$$

функции Грина первой и второй краевых задач для уравнения (17).

Подставляя (54) в условие (4),после длинных вычислений получим интегральное уравнение типа Абеля относительно $\overline{\overline{\omega}}'_{11}(1+y)$.Применяя обращение Абеля к полученному уравнению,после некоторых выкладок, приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $\overline{\overline{\omega}}'_{11}(1+y)$:

$$\overline{\overline{\omega}}'_{11}(1+y)+\int_0^y K_3(y,\eta)\overline{\overline{\omega}}'_{11}(1+\eta)d\eta+\int_0^y K_4(y,\eta)\tau_3'''(\eta)d\eta=g_2(y),\ 0\le y\le 1,\ (56)$$

где $K_3(y,\eta),K_4(y,\eta)$, $g_2(y)$–известные функции,причем $K_3(y,\eta),K_4(y,\eta)$ имеют слабую особенность (порядка $1/2$), $g_2(y)$–непрерывная функция.

Решая систему уравнений (55),(56),находим функции $\tau_3'''(y)$, $\overline{\overline{\omega}}'_{11}(1+y)$,тем самым и функции $\tau_3(y),\nu_3(y),\omega_{11}(x+y)+\omega_{12}(y),T_2(x)$.Тогда будут известными и функции $u_3(x,y)$ и $u_1(x,y)$.Итак, мы нашли решение поставленной задачи 1 единственным образом.

Замечание. В работах [1-3] был рассмотрен ряд краевых задач для уравнений второго,третьего и четвертого порядков параболо-гиперболического типа.

References.

1.Berdishev A.S.Kraevie zadachi i ix spektralnie svoystva dlya uravneniya smeshannogo parabolo-giperbolicheskogo i smeshanno-sostavnogo tipov.–Almati, 2015, 224 s.
1.Djuraev T.D.,Mamajanov M.Kraevie zadachi dlya odnogo klassa uravneniy chetvertogo poryadka smeshannogo tipa.Differensialnie uravneniya,1986,t.22, №1, s.25-31.
1.Djuraev T.D., Sopuev A,Mamajanov M.Kraevie zadachi dlya uravneniy parabolo-giperbolicheskogo tipa. Tashkent,Fan, 1986, 220 s.