Scientific Bulletin of Namangan State University

Volume 1 | Issue 7 Article 9

9-10-2019

ON ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF THE THIRD ORDER OF A PARABOL-HYPERBOLIC TYPE IN A MIXED FIVE-ANGULAR REGION WHEN AN ANGLER OPERATOR CHARACTERISTIC FIRST ORDER LESS MINUS ONE.

Khilola Mirzayevna Shermatova
Teacher Fergana state university

Follow this and additional works at: https://uzjournals.edu.uz/namdu

Part of the Physical Sciences and Mathematics Commons

Recommended Citation

Shermatova, Khilola Mirzayevna (2019) "ON ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF THE THIRD ORDER OF A PARABOL-HYPERBOLIC TYPE IN A MIXED FIVE-ANGULAR REGION WHEN AN ANGLER OPERATOR CHARACTERISTIC FIRST ORDER LESS MINUS ONE.," *Scientific Bulletin of Namangan State University*: Vol. 1 : Iss. 7 , Article 9.
Available at: https://uzjournals.edu.uz/namdu/vol1/iss7/9

This Article is brought to you for free and open access by 2030 Uzbekistan Research Online. It has been accepted for inclusion in Scientific Bulletin of Namangan State University by an authorized editor of 2030 Uzbekistan Research Online. For more information, please contact sh.erkinov@edu.uz.

ON ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF THE THIRD ORDER OF A PARABOL-HYPERBOLIC TYPE IN A MIXED FIVE-ANGULAR REGION WHEN AN ANGLER OPERATOR CHARACTERISTIC FIRST ORDER LESS MINUS ONE.

Cover Page Footnote

???????

Erratum

???????

This article is available in Scientific Bulletin of Namangan State University: https://uzjournals.edu.uz/namdu/vol1/iss7/9

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В СМЕШАННОЙ ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ, КОГДА УГЛОВОЙ КОЭФФИЦИЕНТ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА МЕНЬШЕ МИНУС ЕДИНИЦЫ.

Шерматова Хилола Мирзаевна
преподаватель Ферганского государственного университета

Аннотация: *В настоящей работе ставится и исследуется одна краевая задача для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида* $\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0$ *в пятиугольной области. Доказывается существования и единственности решения этой поставленной задачи методами построения решения, интегральных и дифференциальных уравнений.*

Ключевые слова: *Дифференциальные и интегральные уравнения, метод построения решения, краевая задача, параболо-гиперболический тип, существование и единственность решения.*

АРАЛАШ БЕШБУРЧАКЛИ СОҲАДА БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ОПЕРАТОР ТАСНИФИНИНГ БУРЧАК КОЭФФИЦИЕНТИ МИНУС БИРДАН КИЧИК БЎЛГАН ҲОЛДАГИ УЧИНЧИ ТАРТИБЛИ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМА УЧУН БИТТА ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА ҲАҚИДА.

Шерматова Хилола Мирзаевна
Фарғона давлат университети ўқитувчиси

Аннотация: *Ушбу ишда бешбурчакли соҳада* $\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0$ *кўринишдаги учинчи тартибли параболик-гиперболик типдаги тенглама учун битта чегаравий масала қўйилади ва тадқиқ этилади. Бу қўйилган масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини ечимни қуриш, интеграл ва дифференциал тенгламалар усуллари ёрдамида исботланади.*

Калит сўзлар: *Дифференциал ва интеграл тенгламалар, ечимни қуриш усули, чегаравий масала, параболик-гиперболик тип, ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги.*

ON ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF THE THIRD ORDER OF A PARABOL-HYPERBOLIC TYPE IN A MIXED FIVE-ANGULAR REGION WHEN AN ANGLER OPERATOR CHARACTERISTIC FIRST ORDER LESS MINUS ONE.

Shermatova Khilola Mirzayevna.
Teacher Fergana state university.

Abstract: *In the article a boundary value problem was set and investigated for a third order parabolic hyperbolic equation in the form* $\left(b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0$ *in a pentagonal domain. The uniqueness and existence of the solution of the problem was proved by using the method of construct solution and also methods integral and differential equation.*

Key words: *Differential equation, method of construct solution, boundary value problem, parabolic hyperbolic type, unique solvability, pentagonal domain.*

Не останавливаясь на истории возникновения и развития отдельных направлений уравнений смешанного и смешанно-составного типов, отметим, что в настоящее время в нашей стране и за рубежом опубликованы многочисленные работы, посвященные теоретическим и прикладным аспектам уравнений смешанного эллиптико-гиперболического, эллиптико-параболического и параболо-гиперболического типов второго, третьего и высокого порядков. Основная библиография по этим вопросам приведена в работе [1].

В этой работе ставится и исследуется одна краевая задача для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа вида

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)(Lu)=0 \quad (1)$$

в пятиугольной области G плоскости xOy, где $G=G_1\cup G_2\cup G_3\cup J_1\cup J_2$, то есть G_1 – прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2 – треугольник с вершинами в точках B, $C(0,-1)$, $D(-1,0)$; G_3 – прямоугольник с вершинами в точках A, A_0, $D_0(-1,1)$, D; J_1 – открытый отрезок с вершинами в точках B, D; J_2 – открытый отрезок с вершинами в точках A, A_0, а $Lu=\begin{cases}u_{xx}-u_y, & (x,y)\in G_1,\\ u_{xx}-u_{yy}, & (x,y)\in G_i \quad (i=2),\end{cases}$ $a,b,c\in R$, $\gamma=\frac{b}{a}$, $-\infty<\gamma<-1$. Здесь в этой работе, так как $-\infty<\gamma<-1$, то без ограничения общности можно полагать $a<0$, $b>0$. В этом случае для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача 1. Требуется найти функцию $u(x,y)$, которая 1) непрерывна в $\overline{G}$ и в области $G\setminus J_1\setminus J_2$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем u_x и u_y–непрерывны в G вплоть до части границы области G, указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G\setminus J_1\setminus J_2$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$u(1,y)=\varphi_1(y)$, $\quad 0\le y\le 1$; (2)

$u(-1,y)=\varphi_2(y)$, $0\le y\le 1$; (3)

$u_x(1,y)=\varphi_3(y)$, $0\le y\le 1$; (4)

$u|_{BC}=\psi_1(x)$, $0\le x\le 1$; (5)

$u|_{DF}=\psi_2(x)$, $-1\le x\le -1/2$; (6)

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{BC}=\psi_3(x)$, $0\le x\le 1$; (7)

$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{CD}=\psi_4(x),\ -1\le x\le 0$ (8)

и 4) следующим условиям склеивания:

$u(x,+0)=u(x,-0)=T(x),\ -1\le x\le 1$ (9)

$u_y(x,+0)=u_y(x,-0)=N(x),\ -1\le x\le 1$;(10)

$u_{yy}(x,+0)=u_{yy}(x,-0)=M(x),\ -1\le x\le 1$;(11)

$u(+0,y)=u(-0,y)=\tau_3(y),\ 0\le y\le 1$;(12)

$u_x(+0,y)=u_x(-0,y)=\nu_3(y),\ 0\le y\le 1$; (13)

$u_{xx}(+0,y)=u_{xx}(-0,y)=\mu_3(y),\ 0<y<1$, (14)

где $\varphi_j\left(j=\overline{1,3}\right)$ $\psi_i\left(i=\overline{1,4}\right)$, – заданные достаточно гладкие функции, $T(x)=\begin{cases}\tau_1(x), & если\ \ 0\le x\le 1,\\ \tau_2(x), & если\ \ -1\le x\le 0;\end{cases}$ $N(x)=\begin{cases}\nu_1(x), & если\ \ 0\le x\le 1,\\ \nu_2(x), & если\ \ -1\le x\le 0;\end{cases}$ $M(x)=\begin{cases}\mu_1(x), & если\ \ 0<x<1,\\ \mu_2(x), & если\ \ -1<x<0,\end{cases}$

$\tau_i,\nu_i,\mu_i\ (i=1,2,3)$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, n – внутренняя нормаль к прямой $x+y=0$ или $x-y=1$, а $F(-1/2,-1/2)$.

Теорема. Если $\psi_1\in C^3[0,1]$, $\psi_2\in C^3[-1,-1/2]$, $\psi_3\in C^2[0,1]$, $\psi_4\in C^2[-1,0]$, $\varphi_1\in C^3[0,1]$, $\varphi_2\in C^3[0,1]$, $\varphi_3\in C^2[0,1]$, причем выполняются условия согласования $\varphi_1(0)=\psi_1(1)$, $\varphi_2(0)=\psi_2(-1)$, $\psi_3'(0)=-\psi_4'(0)$, то задача-1 допускает единственное решение.

Доказательство. Теорему докажем методом построения решения. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx}-u_{1y}=\omega_1(bx-ay)e^{-\frac{c}{b}y},\ (x,y)\in G_1,\ (15)$$

$$u_{ixx}-u_{iyy}=\omega_i(bx-ay)e^{-\frac{c}{b}y},\ (x,y)\in G_i\quad (i=2,3),\ (16)$$

где введено обозначение $u(x,y)=u_i(x,y),\ (x,y)\in G_i\ \left(i=\overline{1,3}\right)$, причем $\omega_i(bx-ay)\ \left(i=\overline{1,3}\right)$ – неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Сначала исследование проводим в области G_2. Записываем решение уравнения (16) $(i=2)$, удовлетворяющее условиям (9) и (10):

$$u_2(x,y)=\frac{1}{2}\left[T(x+y)+T(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N(t)\,dt-\frac{1}{2}\int_0^y e^{-\frac{c}{b}\eta}d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\omega_2(b\xi-a\eta)\,d\xi.\quad (17)$$

Подставляя (17) в условия (7) и (8), после некоторых преобразований, находим

$$\omega_2(bx-ay)=-\sqrt{2}\psi_3'\left(\frac{bx-ay-a}{b-a}\right)e^{\frac{c(bx-ay-b)}{b(b-a)}},\ a\le bx-ay\le b,$$

$$\omega_2(bx-ay)=\sqrt{2}\psi_4'\left(\frac{bx-ay-a}{b+a}\right)e^{-\frac{c(bx-ay+b)}{b(b+a)}},\ -b\le bx-ay\le a.$$

Из этих равенств следует $\psi_3'(0)=-\psi_4'(0)$.

Подставляя (17) в (5), после некоторых выкладок, имеем

$$T'(x)+N(x)=\alpha_1(x),\ -1\le x\le 1, (18)$$

где

$$\alpha_1(x)=\psi_1'\left(\frac{x+1}{2}\right)+\int_0^{\frac{x-1}{2}} e^{-\frac{c}{b}\eta}\omega_2\left(bx-(b+a)\eta\right)d\eta .$$

При $-1\le x\le 0$ уравнение (18) имеет вид

$$\tau_2'(x)+\nu_2(x)=\alpha_1(x),\ -1\le x\le 0 . (19)$$

Подставляя (17) в (6), после некоторых выкладок, получим

$$\tau_2'(x)-\nu_2(x)=\delta_1(x),\ -1\le x\le 0 , (20)$$

где

$$\delta_1(x)=\psi_2'\left(\frac{x-1}{2}\right)+\int_0^{-\frac{x+1}{2}} e^{-\frac{c}{b}\eta}\omega_2\left(bx+(b-a)\eta\right)d\eta .$$

Из (19) и (20) находим

$$\tau_2'(x)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(x)+\delta_1(x)\right],\quad \nu_2(x)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(x)-\delta_1(x)\right]. (21)$$

Интегрируя первое из равенств (21) от -1 до x, находим

$$\tau_2(x)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{x}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_2(-1).$$

А при $0\le x\le 1$ уравнение (18) принимает вид

$$\tau_1'(x)+\nu_1(x)=\alpha_1(x),\ 0\le x\le 1 . (22)$$

Уравнение (1) можно переписать в виде

$$au_{1xxx}+bu_{1xxy}+cu_{1xx}-au_{1xy}-bu_{1yy}-cu_{1y}=0 .$$

Переходя в последнем уравнении и в уравнении (16) $(i=2)$ к пределу при $y\to 0$, имеем соотношения между неизвестными функциями $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$a\tau_1'''(x)+b\nu_1''(x)+c\tau_1''(x)-a\nu_1'(x)-b\mu_1(x)-c\nu_1(x)=0,\ 0\le x\le 1, (23)$$

$$\tau_1''(x)-\mu_1(x)=\omega_2(bx),\ 0\le x\le 1 . (24)$$

Исключая из (22), (23) и (24) функции $\nu_1(x)$, $\mu_1(x)$ и интегрируя полученное уравнение от 0 до x, приходим к уравнению

$$\tau_1''(x)+\left(1-\frac{c}{b-a}\right)\tau_1'(x)-\frac{c}{b-a}\tau_1(x)=\alpha_2(x)+k_1,\ 0\le x\le 1 , (25)$$

где

$$\alpha_2(x)=\frac{1}{b-a}\left\{b\alpha_1'(x)-a\alpha_1(x)+\int_0^x\left[b\omega_2(bt)-c\alpha_1(t)\right]dt\right\},$$

а k_1 – неизвестная пока постоянная.

При решении уравнения (25) могут быть три случая: 1°. $c\ne-(b-a)$, $c\ne 0$; 2°. $c=-(b-a)$; 3°. $c=0$. В случае 1° характеристическое уравнение уравнения (25) имеет две различные действительные корни: $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=\dfrac{c}{b-a}$. В случае 2° характеристическое уравнение уравнения (25) имеет один двукратный действительный корень: $\lambda_{1,2}=-1$. В случае 3° характеристическое уравнение уравнения (25) имеет две различные действительные корни: $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=0$.

Рассмотрим случай 1°. Решая уравнение (25) при условиях

$$\tau_1(0)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_2(-1),\ \tau_1'(0)=\frac{1}{2}\left[\alpha_1(0)+\delta_1(0)\right],\ \tau_1(1)=\varphi_1(0), \quad (26)$$

находим

$$\tau_1(x)=\frac{b-a}{c+b-a}\int_0^x\left[e^{\frac{c(x-t)}{b-a}}-e^{t-x}\right]\alpha_2(t)dt+$$

$$+\frac{b-a}{c+b-a}k_1\left[\frac{b-a}{c}\left(e^{\frac{cx}{b-a}}-1\right)-\left(1-e^{-x}\right)\right]+k_2e^{-x}+k_3e^{\frac{cx}{b-a}},$$

где

$$k_3=\frac{b-a}{2(b-a+c)}\left\{\int_{-1}^{0}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+2\psi_2(-1)+\alpha_1(0)+\delta_1(0)\right\},$$

$$k_2=\frac{c}{2(b-a+c)}\left\{\int_{-1}^{0}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+2\psi_2(-1)-\alpha_1(0)-\delta_1(0)\right\},$$

$$k_1=\left[\frac{b-a}{c}\left(e^{\frac{c}{b-a}}-1\right)-\left(1-e^{-1}\right)\right]^{-1}\left\{\frac{b-a+c}{b-a}\left[\varphi_1(0)-k_2e^{-1}-k_3e^{\frac{c}{b-a}}\right]-\right.$$

$$\left.-\int_0^1\left[e^{\frac{c(1-t)}{b-a}}-e^{t-1}\right]\alpha_2(t)dt\right\}.$$

Рассмотрим случай 2°. Решая уравнение (25) при условиях (26), имеем

$$\tau_1(x)=\int_0^x(x-t)e^{t-x}\alpha_2(t)dt+k_1\left[1-(1+x)e^{-x}\right]+(k_2+k_3x)e^{-x},$$

где

$$k_2=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_2(-1),\ \ k_3=k_2+\frac{1}{2}\left[\alpha_1(0)+\delta_1(0)\right],$$

$$k_1=\frac{1}{e-2}\left[\varphi_1(0)e-k_2-k_3-\int_0^1(1-t)e^{t-1}\alpha_2(t)dt\right].$$

Наконец, рассмотрим случай 3°. В этом случае уравнение (25) имеет вид

$$\tau_1''(x)+\tau_1'(x)=\alpha_2(x)+k_1,\ \ 0\le x\le 1.$$

Интегрируя это уравнение от 0 до x, приходим к уравнению

$$\tau_1'(x)+\tau_1(x)=\alpha_3(x)+k_1x+k_2,\ \ 0\le x\le 1,$$

где

$$\alpha_3(x)=\int_0^x\alpha_2(t)dt.$$

Решая последнее уравнение при условиях (26), имеем

$$\tau_1(x)=\int_0^x e^{t-x}\alpha_3(t)dt+k_1\left(x-1-e^{-x}\right)+k_2\left(1-e^{-x}\right)+k_3e^{-x},$$

где

$$k_3=\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left[\alpha_1(t)+\delta_1(t)\right]dt+\psi_2(-1),\;\; k_2=k_3+\frac{1}{2}\left[\alpha_1(0)+\delta_1(0)\right],$$

$$k_1=\varphi_1(0)e-k_2(e-1)-k_3-\int_0^1 e^t\alpha_3(t)\,dt\,.$$

Теперь переходим в область G_3.Переходя в уравнениях (16) $(i=3)$ и (16) $(i=2)$ к пределу при $y\to 0$, получим

$$\omega_{31}(bx)=\omega_2(bx),\; -1\le x\le 0\,.$$

Меняя аргумент bx на $bx-ay$, имеем

$$\omega_{31}(bx-ay)=\omega_2(bx-ay),\; -b\le bx-ay\le 0\,.$$

Здесь положено $\omega_3(bx-ay)=\begin{cases}\omega_{31}(bx-ay), & -b\le bx-ay\le 0,\\ \omega_{32}(bx-ay), & -b-a\le bx-ay\le -b.\end{cases}$

Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases}u_{3xx}-u_{3yy}=\Omega_3(bx-ay)e^{-\frac{c}{b}y},\\ u_3(x,0)=T_2(x),\; u_{3y}(x,0)=N_2(x),\;\; -2\le x\le 1,\\ u_3(-1,y)=\varphi_2(y),\; u_{3x}(-1,y)=\varphi_3(y),\; u_3(0,y)=\tau_3(y),\; 0\le y\le 1.\end{cases}$$

Решение этой задачи будем искать в виде

$$u_3(x,y)=u_{31}(x,y)+u_{32}(x,y)+u_{33}(x,y), \quad (27)$$

где $u_{31}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases}u_{31xx}-u_{31yy}=0,\\ u_{31}(x,0)=T_2(x),\; u_{31y}(x,0)=0,\; -2\le x\le 1,\\ u_{31}(-1,y)=\varphi_2(y),\; u_{31}(0,y)=\tau_3(y),\; 0\le y\le 1;\end{cases} \quad (28)$$

$u_{32}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases}u_{32xx}-u_{32yy}=0,\\ u_{32}(x,0)=0,\; u_{32y}(x,0)=N_2(x),\; -2\le x\le 1,\\ u_{32}(-1,y)=0,\; u_{32}(0,y)=0,\; 0\le y\le 1;\end{cases} \quad (29)$$

$u_{33}(x,y)$ – решение задачи

$$\begin{cases}u_{33xx}-u_{33yy}=\Omega_3(bx-ay)e^{-\frac{c}{b}y},\\ u_{33}(x,0)=0,\; u_{33y}(x,0)=0,\;\; -2\le x\le 1,\\ u_{33}(-1,y)=0,\; u_{33}(0,y)=0,\; 0\le y\le 1,\end{cases} \quad (30)$$

где функции $T_2(x)$, $N_2(x)$ $M_2(x)$, $\Omega_3(bx)$ определяются следующим образом: в промежутке $-1\le x\le 0$ они определяются так: $T_2(x)=\tau_2(x)$, $N_2(x)=\nu_2(x)$, $M_2(x)=\mu_2(x)$, $\Omega_3(bx)=\omega_3(bx)$, а в промежутках $-2\le x\le -1$ и $0\le x\le 1$ они пока неизвестны.

Методом продолжения находим решения задач (28)-(30). Они имеют вид

$$u_{31}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_2(x+y)+T_2(x-y)\right], (31)$$

$$u_{32}(x,y)=\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N_2(t)dt, (32)$$

$$u_{33}(x,y)=-\frac{1}{2}\int_0^y e^{-\frac{c}{b}\eta}d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_3(b\xi-a\eta)d\xi, (33)$$

где

$$T_2(x)=\begin{cases}2\varphi_2(-1-x)-\tau_2(-2-x), -2\le x\le -1,\\ \tau_2(x), -1\le x\le 0,\\ 2\tau_3(x)-\tau_2(-x), 0\le x\le 1;\end{cases}$$

$$N_2(x)=\begin{cases}-\nu_2(-2-x), -2\le x\le -1,\\ \nu_2(x), -1\le x\le 0,\\ -\nu_2(-x), 0\le x\le 1;\end{cases}$$

а функция $\Omega_3(bx-ay)$ определяется следующим образом.

Первые два условия задачи (30) выполняются автоматически. Удовлетворяя третье из условий задачи (30), после упрощения, получим

$$\int_0^y e^{-\frac{c}{b}\eta}\Omega_3(b(-1-y)+(b-a)\eta)d\eta=-\int_0^y e^{-\frac{c}{b}\eta}\Omega_3(b(y-1)-(b+a)\eta)d\eta. (34)$$

Производя замену переменных в интегралах равенства (34) и дифференцируя полученное уравнение, после некоторых преобразований, получим

$$\Omega_3(b(-1-y))=\frac{2a^2}{b(b+a)}\omega_{31}(-b-ay)-\frac{2ac}{(b+a)^2}\int_{-1-\frac{a}{b}y}^{y-1}\omega_{31}(bz)e^{-\frac{c(y-1-z)}{b+a}}dz-\frac{b-a}{b+a}\omega_{31}(b(y-1)).(35)$$

Полагая в (33) $x\to 0$, после некоторых преобразований, имеем

$$\int_0^y e^{-\frac{c}{b}\eta}\Omega_3(by-(b+a)\eta)d\eta=-\int_0^y e^{-\frac{c}{b}\eta}\Omega_3((b-a)\eta-by)d\eta. (36)$$

Производя замену переменных в интегралах равенства (36) и дифференцируя полученное уравнение, после длинных преобразований, находим

$$\Omega_3(by)=\frac{2a^2}{b(b-a)}\Omega_3(-ay)e^{-\frac{c}{b}\eta}-\frac{2a^2c}{b(b-a)^2}\int_0^y e^{-\frac{c(by-at)}{b(b-a)}}\Omega_3(-at)dt-$$

$$-\frac{b+a}{b-a}\omega_{31}(-by)+\frac{2ac}{(b-a)^2}\int_1^y e^{-\frac{c(y-t)}{b-a}}\omega_{31}(-bt)dt. (37)$$

Теперь переходя в уравнениях (15) и (16) $(i=3)$ к пределу при $x\to 0$, получим

$$\mu_3(y)-\tau_3'(y)=\omega_{11}(-ay)e^{-\frac{c}{b}y}, \mu_3(y)-\tau_3''(y)=\Omega_3(-ay)e^{-\frac{c}{b}y},$$

где положено $\omega_1(bx-ay)=\begin{cases}\omega_{11}(bx-ay), & 0\le bx-ay\le b,\\ \omega_{12}(bx-ay), & b\le bx-ay\le b-a.\end{cases}$

Исключая из этих соотношений функцию $\mu_3(x)$, имеем соотношение

$$\Omega_3(-ay)=\omega_{11}(-ay)-\left[\tau_3''(y)-\tau_3'(y)\right]e^{\frac{c}{b}y}. \quad (38)$$

Подставляя (31), (32) и (33) в (27), имеем

$$u_3(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_2(x+y)+T_2(x-y)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-y}^{x+y}N_2(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^y e^{-\frac{c}{b}\eta}d\eta\int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta}\Omega_3(b\xi-a\eta)d\xi. \quad (39)$$

Дифференцируя это решение по x,имеем

$$u_{3x}(x,y)=\frac{1}{2}\left[T_2'(x+y)+T_2'(x-y)\right]+\frac{1}{2}\left[N_2(x+y)-N_2(x-y)\right]-$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^y e^{-\frac{c}{b}\eta}\Omega_3\left(b(x+y)-(b+a)\eta\right)d\eta+\frac{1}{2}\int_0^y e^{-\frac{c}{b}\eta}\Omega_3\left(b(x-y)+(b-a)\eta\right)d\eta. \quad (40)$$

Теперь в (40) устремляя x к нулю, с учетом (36) и (38), после длинных вычислений и преобразований, получим соотношение

$$\nu_3(y)=\frac{b}{b-a}\tau_3'(y)+\int_0^y H(y,t)\tau_3'(t)dt+\beta_1(y), \quad (41)$$

где

$$H(y,t)=-\frac{a(b-a+c)}{(b-a)^2}e^{-\frac{c(y-t)}{b-a}},\quad \beta_1(y)=\tau_2'(-y)-\nu_2(y)-\frac{a}{b-a}\int_0^y e^{-\frac{c(by-at)}{b(b-a)}}\omega_{11}(-at)dt+$$
$$+\frac{b}{b-a}\int_0^y e^{-\frac{c(y-t)}{b-a}}\omega_{31}(-bt)dt-\frac{a}{b-a}\nu_1(0)e^{-\frac{cy}{b-a}}.$$

Теперь переходим в G_1.Переходя в уравнении (15) к пределу при $y\to 0$,находим

$$\omega_{11}(bx)=\tau_1''(x)-\nu_1(x),\ 0\le x\le 1. \quad (42)$$

Далее, запишем решение уравнения (15),удовлетворяющего условиям (2), (9), (12):

$$u_1(x,y)=\int_0^y\tau_3(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)d\eta-\int_0^y\varphi_1(\eta)G_\xi(x,y;1,\eta)d\eta+\int_0^1\tau_1(\xi)G(x,y;\xi,0)d\xi-$$
$$-\int_0^y e^{-\frac{c}{b}\eta}d\eta\int_0^{1+\frac{a}{b}\eta}\omega_{11}(b\xi-a\eta)G(x,y;\xi,\eta)d\xi-\int_0^y e^{-\frac{c}{b}\eta}d\eta\int_{1+\frac{a}{b}\eta}^1\omega_{12}(b\xi-a\eta)G(x,y;\xi,\eta)d\xi, \quad (43)$$

где $\left.\begin{matrix}G(x,y;\xi,\eta)\\N(x,y;\xi,\eta)\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\mp\exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\}$ –функции Грина первой и второй краевых задач для уравнения Фурье.

Дифференцируя это решение по x и устремляя x к нулю с учетом (41) и (42) после длинных вычислений и преобразований, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно неизвестных функций $\tau_3'(y)$ и $\omega_{12}(b-ay)$:

$$\tau_3'(y)+\int_0^y K_1(y,\eta)\tau_3'(\eta)d\eta+\int_0^y K_2(y,\eta)\omega_{12}(b-a\eta)d\eta=g_1(y), \quad (44)$$

где $K_1(y,\eta)$, $K_2(y,\eta)$, $g_1(y)$ – известные функции, причем ядро $K_1(y,\eta)$ имеет слабую особенность (1/2), а $K_2(y,\eta)$, $g_1(y)$ – непрерывна.

Подставляя (43) в условие (3) и дифференцируя полученное уравнение, приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно неизвестных функций $\tau_3'(y)$ и $\omega_{12}(b-ay)$:

$$\omega_{12}(b-ay)+\int_0^y K_4(y,\eta)\omega_{12}(b-a\eta)d\eta+\int_0^y K_3(y,\eta)\tau_3'(\eta)d\eta=g_2(y), \quad (45)$$

где $K_3(y,\eta)$, $K_4(y,\eta)$, $g_2(y)-$ известные функции, причем ядро $K_4(y,\eta)$ имеет слабую особенность $(1/2)$, а $K_3(y,\eta)$, $g_2(y)-$ непрерывна. Поэтому система уравнений (44), (45) допускает единственное решение в классе непрерывных функций. Решая эту систему, находим функции $\tau_3'(y)$, $\omega_{12}(b-ay)$ и тем самым, и функции $\tau_3(y)$, $\nu_3(y)$, $\Omega_3(-ay)$, $\Omega_3(by)$, $T_2(x)$, $u_1(x,y)$, $u_3(x,y)$.

Таким образом, мы определили решение задачи 1 полностью.

Замечание. Аналогичные задачи для уравнений третьего и четвертого порядков параболо-гиперболического типа рассмотрены в работах [1-4].

References:

1. SHermatova X.M. O postanovke kraevix zadach dlya odnogo klassa parabol-giperbolicheskix uravneniy tretego poryadka s dvumya liniyami izmeneniya tipa. Byulleten Instituta Matematiki im. Romanovskogo AN Ruz. Tashkent, 2018, № 5, s. 22-29.

2. Mamajanov M., Mamajonov S.M. Postanovka i metod issledovaniya nekotorix kraevix zadach dlya odnogo klassa uravneniy chetvertogo poryadka parabolo-giperbolicheskogo tipa. Vestnik KRAUNS. Fiz-mat. nauki. 2014. № 1 (8). s.14-19.

3. Mamajanov M., Mamajonov S.M., Mamadalieva X.B.O nekotorix kraevix zadachax dlya odnogo uravneniya tretego poryadka parabologiperbolicheskogo tipa v vognutoy shestiugolnoy oblasti. Aktualnie nauchnie issledovaniya v sovremennom mire. ISCIENCE.IN.UA, Pereyaslav-Xmelnitskiy, 2017, vip.2(22), str. 148-151.