Scientific Bulletin of Namangan State University

Volume 1 | Issue 7 Article 5

9-10-2019

A TWO-POINT BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH GENERAL GLUING CONDITION FOR INTEGRO DIFFERENTIAL EQUATION

Feruza Farkhodjon kizi Mamanazarova
Master student Fergana state university

A TWO-POINT BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH GENERAL GLUING CONDITION FOR INTEGRO DIFFERENTIAL EQUATION

Cover Page Footnote

???????

Erratum

???????

УДК 517.927

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН УМУМИЙ УЛАШ ШАРТЛИ ИККИ НУҚТАЛИ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

Маманазарова Феруза Фарходжон қизи
Фарғона давлат университети магистранти

Аннотация: *Ушбу мақолада коэффициентлари узилишга эга бўлган ҳамда каср тартибли интеграл ва дифференциал операторларни ўз ичига олган дифференциал тенглама учун умумий улаш шартли чегаравий масала тадқиқ қилинган.*

Калит сўзлар: *каср тартибли дифференциал ва интеграл операторлар,чегаравий масала,умумий улаш шарти.*

ДВУХТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА С ОБЩИМ УСЛОВИЕМ СКЛЕИВАНИЯ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Маманазарова Феруза Фарходжон кизи
Магистрант Ферганского государственного университета

Аннотация: *В статье изучена одна краевая задача с общим условием склеивания для дифференциального уравнения, которого содержить интегральный и дифференциальный оператори дробного порядка и коэффициенты имеют скачок.*

Ключевые слова: *дифференциальный и интегральный оператори дробного порядка, краевая задача, общи условие склеивания.*

A TWO-POINT BOUNDARY-VALUE PROBLEM WITH GENERAL GLUING CONDITION FOR INTEGRO DIFFERENTIAL EQUATION

Mamanazarova Feruza Farkhodjon kizi
Master student Fergana state university

Abstract: *In the article a boundary-value problem with general conjugation condition for the differential equation which included the fractional integral and differential operators as well as discontinuous coefficient was investigated.*

Key words: *the fractional integral and differential operators, boundary-value problem, general conjugation condition.*

$(-1,0)\cup(0,1)$ соҳада аниқланган қуйидаги кўринишдаги

$$\begin{cases} y''(x) - m_1 D_{-1x}^{-\alpha} y(x) - kD_{-1x}^{\beta} y(x) = 0 & x\in(-1,0), \\ y''(x) - m_2 D_{x1}^{-\alpha} y(x) + kD_{x1}^{\beta} y(x) = 0 & x\in(0,1) \end{cases} \qquad (1)$$

дифференциал тенгламани қарайлик, бу ерда $\alpha, \beta,\ k, m_j,\ \left(j=\overline{1,2}\right)-$ берилган сонлар бўлиб, $\alpha>0, 0<\beta<1,\ \ m_j>0\ \ ,k>0; D_{-1x}^{-\alpha}, D_{x1}^{-\alpha}-$ каср тартибли интеграл операторлар [1,2]:

$$D_{-1x}^{-\alpha}y(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{\alpha-1}y(t)dt,\ D_{x1}^{-\alpha}y(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{x}^{1}(t-x)^{\alpha-1}y(t)dt,$$

$D_{-1x}^{\beta}, D_{x1}^{\beta}$ лар эса каср тартибли дифференциал операторлар [1,2]:

$$D_{-1x}^{\beta}y(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dx}\int_{-1}^{x}(x-t)^{-\beta}y(t)dt,\ D_{x1}^{\beta}y(x)=-\frac{1}{\Gamma(1-\beta)}\frac{d}{dx}\int_{x}^{1}(t-x)^{-\beta}y(t)dt,$$

бу ерда $\Gamma(z)$– Эйлернинг гамма-функцияси [1].

Масала. (1) *тенгламанинг* $C^2((-1,0)\cup(0,1))$ *синфга тегишли ва*

$$y(-1)=l_1,\ y(1)=l_2 \quad (2)$$

ва

$$\lim_{x\to-0}y_1(x)=a(x)\lim_{x\to+0}y_2(x)+b(x),\ \lim_{x\to-0}y_1'(x)=c(x)\lim_{x\to+0}y_2'(x)+d(x) \quad (3)$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда l_1, l_2 берилган ҳақиқий сонлар.

Қуйилган масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналигини исботлаймиз. (1) тенгламани $(-1,0)$ оралиқда қараб, x ни t га алмаштириб,ҳосил бўлган тенгламани t бўйича $[-1,x]$ оралиқда интеграллаймиз:

$$y'(x)-\frac{m_1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{\alpha}y(t)dt-\frac{k}{\Gamma(1-\beta)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{-\beta}y(t)dt=y'(-1),\quad x\in(-1,0).$$

Бу тенгламани ҳам яна $[-1,x]$ оралиқ бўйича интеграллаб ва ҳосил бўлган такрорий интегралда интеграллаш тартибини алмаштириб, $y(x)-\frac{m_1}{\Gamma(2+\alpha)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{1+\alpha}y(t)dt-\frac{1}{\Gamma(2-\beta)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{1-\beta}y(t)dt=$

$$=y'(-1)(x+1)+y(-1),\ x\in[-1,0]$$

интеграл тенгламага эга бўламиз. Агар бу ерда

$$\gamma=2-\beta,\ f_1(x)=\frac{m_1}{\Gamma(2+\alpha)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{1+\alpha}y(t)dt+y'(-1)(x+1)+y(-1)$$

белгилашлар киритсак, охирги тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$y(x)-\frac{k}{\Gamma(\gamma)}\int_{-1}^{x}(x-t)^{\gamma-1}y(t)dt=f_1(x),\ x\in[-1,0].$$

Бу тенгламада $f_1(x)$ ни маълум деб ҳисоблаб, $t=z-1$ ва $x=s-1$ алмаштириш бажарсак, қуйидаги интеграл тенгламага эга бўламиз:

$$y(s-1)-\frac{k}{\Gamma(\gamma)}\int_{0}^{s}(s-z)^{\gamma-1}y(z-1)dz=f_1(s-1),\qquad s\in[-1,0].(4)$$

$\beta>0,\ \gamma>0$ бўлганлиги учун (4) тенглама ягона ечимга эга [2] ва у

$$y(s-1)=\frac{d}{ds}\int_{0}^{s}\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(s-z)^{\gamma}\right]f_1(z-1)dz,\qquad s\in[-1,0].(5)$$

кўринишда аниқланади,бу ерда $\mathrm{E}_{\gamma,\delta}(z)$–Миттаг-Леффлер функцияси [1]:

$$\mathrm{E}_{\gamma,\delta}\left(z\right)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{n} / \Gamma\left(\gamma n+\delta\right).$$

Эски ўзгарувчиларга қайтиб,(5) тенгликнинг ечимини қуйидагича ёзиб олиш мумкин:

$$y\left(x\right)-\frac{m_1}{\Gamma\left(2+\alpha\right)}\int_{-1}^{x}\left(x-t\right)^{1+\alpha}\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k\left(x-t\right)^{\gamma}\right]y\left(t\right)dt==y\left(-1\right)\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k\left(x+1\right)^{\gamma}\right]+y'\left(-1\right)\int_{-1}^{x}\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k\right.$$

(6) тенгламада қуйидаги белгилашларни киритиб

$$K_1\left(x,t\right)=\left(x-t\right)^{1+\alpha}\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k\left(x-t\right)^{\gamma}\right],$$

$f_2(x)=y\left(-1\right)\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k\left(x+1\right)^{\gamma}\right]+y'\left(-1\right)\int_{-1}^{x}\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k\left(x-t\right)^{\gamma}\right]dt$,уни қуйидагича ёзиб оламиз

$$y\left(x\right)-\frac{m_1}{\Gamma\left(2+\alpha\right)}\int_{-1}^{x}K_1\left(x,t\right)y\left(t\right)dt=f_2(x),\qquad x\in\left[-1,0\right].(7)$$

(7) тенглама Вольтерранинг иккинчи тур интеграл тенгламаси бўлиб,унинг ядроси ва ўнг томони узлуксиз функциялардир.Шунинг учун унинг ечими мавжуд ва ягона [3].Бу ечимни $K_1\left(x,t\right)$ ядронинг $R_1\left(x,t\right)$ резольвентаси орқали қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y\left(x\right)=f_2(x)+\frac{m_1}{\Gamma\left(2+\alpha\right)}\int_{-1}^{x}R_1\left(x,t\right)f_2\left(t\right)dt,\qquad x\in\left[-1,0\right].(8)$$

Энди (1) тенгламани $\left[x,1\right)$ оралиқда қараймиз ва x бўйича $\left[x,1\right]$ оралиқда икки марта интеграллаймиз. Натижада ҳосил бўлган такрорий интегралда интеграллаш тартибини алмаштириб,

$$y\left(x\right)-\frac{k}{\Gamma\left(2-\beta\right)}\int_{x}^{1}\left(t-x\right)^{1-\beta}y\left(t\right)dt=$$

$$=y\left(1\right)-y'\left(1\right)\left(1-x\right)-\frac{m_2}{\Gamma\left(2+\alpha\right)}\int_{x}^{1}\left(t-x\right)^{\alpha+1}y\left(t\right)dt,\qquad x\in\left[0,1\right]\quad(9)$$

интеграл тенгламага эга бўламиз.Агар бу ерда

$$\gamma=2-\beta,\ \varphi_1\left(x\right)=y\left(1\right)-y'\left(1\right)\left(1-x\right)-\frac{m_2}{\Gamma\left(2+\alpha\right)}\int_{x}^{1}\left(t-x\right)^{\alpha+1}y\left(t\right)dt$$

белгилашлар киритсак, охирги (9) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$y\left(x\right)-\frac{k}{\Gamma\left(\gamma\right)}\int_{x}^{1}\left(t-x\right)^{\gamma-1}y\left(t\right)dt=\varphi_1\left(x\right),\qquad x\in\left[0,1\right].$$

Бу тенгламада $\varphi_1\left(x\right)$ ни маълум деб ҳисоблаб, $t=1-z$ ва $x=1-s$ алмаштириш бажарсак, қуйидаги интеграл тенгламага эга бўламиз:

$$y\left(1-s\right)-\frac{k}{\Gamma\left(\gamma\right)}\int_{0}^{s}\left(s-z\right)^{\gamma-1}y\left(1-z\right)dz=\varphi_1\left(1-s\right),\qquad s\in\left[0,1\right].(10)$$

$\beta>0$ $\gamma>0$ бўлганлиги учун (10) тенглама ягона ечимга эга [2] ва у

$$y\left(1-s\right)=\frac{d}{ds}\int_{0}^{s}\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k\left(s-z\right)^{\gamma}\right]\varphi_1\left(1-z\right)dz,\qquad s\in\left[0,1\right]$$

кўринишда аниқланади.

Эски ўзгарувчиларга қайтиб,(1.2) тенгламанинг ечимини қуйидагича ёзиб олиш мумкин:

$$y(x)-\frac{m_2}{\Gamma(2+\alpha)}\int_x^1(t-x)^{\alpha+1}\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(t-x)^{\gamma}\right]y(t)dt=$$

$$=y(1)\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(1-x)^{\gamma}\right]-y'(1)\int_x^1\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(t-x)^{\gamma}\right]dt,\qquad x\in[0,1].(11)$$

(11) тенгламада қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$K_2(x,t)=(t-x)^{\alpha+1}\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(t-x)^{\gamma}\right],$$

$$\varphi_2(x)=y(1)\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(1-x)^{\gamma}\right]-y'(1)\int_x^1\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(t-x)^{\gamma}\right]dt.$$

У ҳолда (11) тенглама қуйидагича кўринишни олади:

$$y(x)-\frac{m_2}{\Gamma(2+\alpha)}\int_x^1K_2(x,t)y(t)dt=\varphi_2(x),\qquad x\in[0,1].$$

Бу Вольтерранинг иккинчи тур интеграл тенгламаси бўлиб,унинг ечими мавжуд ва ягона [2].Буечимни $K_2(x,t)$ядронинг $R_2(x,t)$резольвентаси орқали қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y(x)=\varphi_2(x)+\frac{m_2}{\Gamma(2+\alpha)}\int_x^1R_2(x,t)\varphi_2(t)dt,\qquad x\in[0,1]\ (12)$$

(1.1)ва(1.2)тенгламаларнинг (8) ва (12) ечимларини (2) ва (3) шартларга бўйсундирсак, $y'(-1)$ва $y'(1)$ га нисбатан қуйидаги чизиқли алгебраик тенгламалар системаси келиб чиқади:

(13) тенгламалар системасининг асосий детерминанти

$$\Delta=a(x)\left\{\frac{m_2}{\Gamma(2+\alpha)}\int_0^1tR_2(0,t)\left[\mathrm{E}_{\gamma,2}\left(kt^{\gamma}\right)+1\right]dt-\mathrm{E}_{\gamma,2}(k)-1\right\}$$

$$-c(x)\left\{\frac{-m_1}{\Gamma(2+\alpha)}\int_0^1tR_1(0,-t)\left[\mathrm{E}_{\gamma,2}\left(kt^{\gamma}\right)+1\right]dt-\mathrm{E}_{\gamma,2}(k)-1\right\}=$$

$$=\frac{m_2a(x)+m_1c(x)}{\Gamma(2+\alpha)}\int_0^1tR_2(0,t)\left[\mathrm{E}_{\gamma,2}\left(kt^{\gamma}\right)+1\right]dt+\left(\mathrm{E}_{\gamma,2}(k)+1\right)\left(c(x)-a(x)\right)$$

$$\begin{cases} y'(-1)\left\{\dfrac{m_1}{\Gamma(2+\alpha)}\int\limits_{-1}^{0} tR_1(0,t)\left(\mathrm{E}_{\gamma,2}\left[k(-t)^{\gamma}\right]+1\right)dt-\mathrm{E}_{\gamma,2}(k)-1\right\}- \\ -a(x)y'(1)\left\{\dfrac{m_2}{\Gamma(2+\alpha)}\int\limits_{0}^{1} tR_2(0,t)\left(\mathrm{E}_{\gamma,2}\left[k(t)^{\gamma}\right]+1\right)dt-\mathrm{E}_{\gamma,2}(k)-1\right\}= \\ =a(x)l_2\left\{\mathrm{E}_{\gamma,1}(k)+\int\limits_{0}^{1} R_2(0,t)\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(1-t)^{\gamma}\right]dt\right\}+ \\ +l_1\left\{\mathrm{E}_{\gamma,1}(k)+\int\limits_{-1}^{0} R_1(0,t)\mathrm{E}_{\gamma,1}\left[k(t+1)^{\gamma}\right]dt\right\}+b(x), \\ y'(-1)-c(x)y'(1)=\dfrac{c(x)kl_2}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_{0}^{1}(1-t)^{-\beta}\mathrm{E}_{\gamma,1}\left(kt^{\gamma}\right)dt-\dfrac{kl_1}{\Gamma(1-\beta)}\int\limits_{-1}^{0}(t+1)^{-\beta}\mathrm{E}_{\gamma,1}\left(k(-t)^{\gamma}\right)dt+ \\ +\dfrac{m_1}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{-1}^{0}(-t)^{\alpha}\mathrm{E}_{\gamma,1}\left(k(-t)^{\gamma}\right)y(t)dt-\dfrac{c(x)m_2}{\Gamma(1+\alpha)}\int\limits_{0}^{1}t^{\alpha}\mathrm{E}_{\gamma,1}\left(kt^{\gamma}\right)y(t)dt+d(x). \end{cases} \quad (13)$$

бўлиб, бу ифодада $\int\limits_{0}^{1} tR_2(0,t)\left[\mathrm{E}_{\gamma,2}\left(kt^{\gamma}\right)+1\right]dt>0, \Gamma(2+\alpha)>0, \mathrm{E}_{\gamma,2}(k)+1>0$.Шунинг учун $c(x)>a(x)>0$ ни таъминласак, $\Delta\neq 0$ бўлади.Демак, $c(x)>a(x)>0$ бажарилса, (13) системадан $y'(-1)$ ва $y'(1)$ ларни бир қийматли топилади. $y(-1)$, $y(1)$, $y'(-1)$ ва $y'(1)$ ларни қийматларини (8) ва (12) га қўйиб,масаланиниг ечимига эга бўламиз.

Теорема._Агар_ $c(x)>a(x)>0$ тенгсизлик бажарилса,қўйилган масала ягона ечимга эга бўлади.

References:

1.A.K.O'rinov Oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar. Toshkent: Mumtoz, 2014

2.M.Salohiddinov.Integral tenglamalar.Toshkent:Yangiyul polygraph service, 2007.