

9-10-2019

ON THE STATEMENT AND STUDY OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF THE FOURTH ORDER OF THE PARABOL-HYPERBOLIC TYPE IN THE FIVE-ANGULAR REGION

Sanjarbek Mirzayevich Mamajonov
Teacher Kokand state pedagogical institute

Follow this and additional works at: <https://uzjournals.edu.uz/namdu>



Part of the [Physical Sciences and Mathematics Commons](#)

Recommended Citation

Mamajonov, Sanjarbek Mirzayevich (2019) "ON THE STATEMENT AND STUDY OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR EQUATION OF THE FOURTH ORDER OF THE PARABOL-HYPERBOLIC TYPE IN THE FIVE-ANGULAR REGION," *Scientific Bulletin of Namangan State University*. Vol. 1 : Iss. 7 , Article 4.
Available at: <https://uzjournals.edu.uz/namdu/vol1/iss7/4>

This Article is brought to you for free and open access by 2030 Uzbekistan Research Online. It has been accepted for inclusion in Scientific Bulletin of Namangan State University by an authorized editor of 2030 Uzbekistan Research Online. For more information, please contact sh.erkinov@edu.uz.

**ON THE STATEMENT AND STUDY OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR
EQUATION OF THE FOURTH ORDER OF THE PARABOL-HYPERBOLIC TYPE IN
THE FIVE-ANGULAR REGION**

Cover Page Footnote

???????

Erratum

???????

УДК 517.956.6

**К ПОСТАНОВКЕ И ИССЛЕДОВАНИЮ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ
УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО
ТИПА В ПЯТИУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ**

Мамажонов Санжарбек Мирзаевич

преподаватель Конадского государственного педагогического инсититута

***Аннотация:** В настоящей работе ставится и исследуется одна краевая задача для параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка. Доказывается однозначная разрешимость этой поставленной задачи методами построения решения, интегральных и дифференциальных уравнений.*

***Ключевые слова:** Дифференциальные и интегральные уравнения, метод построения решения, краевая задача, параболо-гиперболический тип, однозначная разрешимость.*

**ТЎРТИНЧИ ТАРТИБЛИ ПАРАБОЛИК-ГИПЕРБОЛИК ТИПДАГИ ТЕНГЛАМА
УЧУН БЕШБУРЧАКЛИ СОҶАДА БИТТА ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛАНИНГ
ҚЎЙИЛИШИ ВА ТАДҚИҚ ЭТИЛИШИГА ДОИР**

Мамажонов Санжарбек Мирзаевич

Қўқон давлат педагогика институти ўқитувчиси

***Аннотация:** Ушбу ишда тўртинчи тартибли параболок-гиперболик типдаги тенглама учун битта чегаравий масала қўйилади ва тадқиқ этилади. Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилиши ечимни қуриш усули, интеграл ва дифференциал тенгламалар усуллари билан исбот этилади.*

***Таянч иборалар:** Дифференциал ва интеграл тенгламалар, ечимни қуриш усули, чегаравий масала, параболок-гиперболик тип, бир қийматли ечилиш.*

**ON THE STATEMENT AND STUDY OF ONE BOUNDARY VALUE PROBLEM
FOR EQUATION OF THE FOURTH ORDER OF THE PARABOL-HYPERBOLIC
TYPE IN THE FIVE-ANGULAR REGION**

Mamajonov Sanjarbek Mirzayevich

Teacher Kokand state pedagogical institute

***Abstract:** In the article we pose and study one boundary-value problem for a fourth-order parabolic-hyperbolic equation. The unique solvability of this task is proved by the methods of constructing a solution, integral and differential equations.*

***Key words:** Differential and integral equations, solution construction method, boundary value problem, parabolic-hyperbolic type, unique solvability.*

В настоящей статье в пятиугольной области G плоскости xOy ставится и исследуется одна краевая задача для параболо-гиперболического уравнения четвертого порядка вида

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) (Lu) = 0, \quad (1)$$

где $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3 \cup J_1 \cup J_2$; G_1 – прямоугольник с вершинами в точках $A(0;0)$, $B(1;0)$, $B_0(1,1)$, $A_0(0,1)$; G_2 – треугольник с вершинами в точках $B, C(0,-1)$, $D(-1,0)$; G_3 – прямоугольник с вершинами в точках $A, D, D_0(-1,1), A_0$; J_1 – открытый отрезок с вершинами в точках B, D ; J_2 – открытый отрезок с вершинами в точках A, A_0 ; $Lu = \begin{cases} u_{xx} - u_y, & (x, y) \in D_1, \\ u_{xx} - u_{yy}, & (x, y) \in D_i, \quad i = 2, 3. \end{cases}$

Для уравнения (1) ставится следующая задача:

Задача-1. Найти функцию $u(x, y)$, которая 1) непрерывна в \bar{G} и в области $G \setminus J_1 \setminus J_2$ имеет непрерывные производные, участвующие в уравнение (1), причем $u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ – непрерывны в G вплоть до части границы области G , указанные в краевых условиях; 2) удовлетворяет уравнению (1) в области $G \setminus J_1 \setminus J_2$; 3) удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$u(1, y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1; (2)$$

$$u(-1, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq 1; (3)$$

$$u_x(-1, y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1; (4)$$

$$u_{xx}(-1, y) = \varphi_4(y), \quad 0 \leq y \leq 1; (5)$$

$$u|_{CF} = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1/2; (6)$$

$$u|_{CD} = \psi_2(x), \quad -1 \leq x \leq 0; (7)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{BC} = \psi_3(x), \quad 0 \leq x \leq 1; (8)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{DC} = \psi_4(x), \quad -1 \leq x \leq 0; (9)$$

4) удовлетворяет следующим условиям склеивания на линиях изменения типа:

$$u(x, +0) = u(x, -0) = T(x), \quad -1 \leq x \leq 1; (10)$$

$$u_y(x, +0) = u_y(x, -0) = N(x), \quad -1 \leq x \leq 1; (11)$$

$$u_{yy}(x, +0) = u_{yy}(x, -0) = M(x), \quad x \in (-1, 0) \cup (0, 1); (12)$$

$$u(+0, y) = u(-0, y) = \tau_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1; (13)$$

$$u_x(+0, y) = u_x(-0, y) = v_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1; (14)$$

$$u_{xx}(+0, y) = u_{xx}(-0, y) = \mu_3(y), \quad 0 < y < 1; (15)$$

$$u_{xxx}(+0, y) = u_{xxx}(-0, y) = \theta_3(y), \quad 0 < y < 1; (16)$$

где φ_i ($i = \overline{1, 4}$), ψ_j ($j = \overline{1, 4}$) – заданные достаточно гладкие функции, n – внутренняя нормаль к прямой $x + y = -1$ или $x - y = 1$, а $F(1/2, -1/2)$,

$$T(x) = \begin{cases} \tau_1(x), & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \tau_2(x), & \text{если } -1 \leq x \leq 0; \end{cases} \quad N(x) = \begin{cases} v_1(x), & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ v_2(x), & \text{если } -1 \leq x \leq 0; \end{cases}$$

$$M(x) = \begin{cases} \mu_1(x), & \text{если } 0 < x < 1, \\ \mu_2(x), & \text{если } -1 < x < 0; \end{cases} \quad \tau_i, \nu_i, \mu_i \ (i = \overline{1,3}), \theta_3 \text{ – неизвестные пока достаточно}$$

гладкие функции.

Теорема. Если $\varphi_1, \varphi_2 \in C^4[0,1], \varphi_3, \varphi_4 \in C^3[0,1], \psi_1 \in C^4[0,1/2], \psi_2 \in C^4[-1,0], \psi_3 \in C^3[0,1], \psi_4 \in C^3[-1,0]$, причем выполняется условие согласования $\psi_1(0) = \psi_2(0), \varphi_2(0) = \psi_2(-1), \psi_4'(0) = -\psi_3'(0)$, то задача-1 допускает единственное решение.

Доказательство. Теорему докажем методом построения решения. Для этого уравнение (1) перепишем в виде

$$u_{1xx} - u_{1y} = \omega_{11}(x-y) + \omega_{12}(y), \quad (x, y) \in G_1, \quad (17)$$

$$u_{ixx} - u_{iyy} = \omega_{i1}(x-y) + \omega_{i2}(y), \quad (x, y) \in G_i \quad (i = 2, 3), \quad (18)$$

где введено обозначение $u(x, y) = u_i(x, y), (x, y) \in G_i \ (i = \overline{1,3})$, причем

$\omega_{i1}(x-y), \omega_{i2}(y) \ (i = \overline{1,3})$ неизвестные пока достаточно гладкие функции, подлежащие определению.

Исследование будем провести сначала в области G_2 . Решение уравнения (18) ($i = 2$), удовлетворяющее условиям (10), (11) представляется в виде

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2} [T(x+y) + T(x-y)] + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} N(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^y d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \omega_{21}(\xi - \eta) d\xi - \int_0^y (y - \eta) \omega_{22}(\eta) d\eta. \quad (19)$$

Подставляя (19) в условия (8) и (9) после упрощений, имеем

$$\omega_{21}(1) + \omega_{22}(x-1) = -\sqrt{2}\psi_3'(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (20)$$

$$\omega_{21}(2x+1) + \omega_{22}(-x-1) = \sqrt{2}\psi_4'(x), \quad -1 \leq x \leq 0. \quad (21)$$

В равенстве (20) меняя аргумент $x-1$ на y , получим

$$\omega_{22}(y) = -\sqrt{2}\psi_3'(y+1) - \omega_{21}(1), \quad -1 \leq y \leq 0, \quad (22)$$

В равенстве (22) полагая $y = -x-1$ и подставляя полученное уравнение в (21) и меняя аргумент $2x+1$ на $x-y$, находим

$$\omega_{21}(x-y) = \sqrt{2}\psi_4'\left(\frac{x-y-1}{2}\right) + \sqrt{2}\psi_3'\left(\frac{1-x+y}{2}\right) + \omega_{21}(1), \quad -1 \leq x-y \leq 1. \quad (23)$$

Из (23) следует $\psi_4'(0) = -\psi_3'(0)$. Слагая (22) и (23), имеем

$$\omega_{21}(x-y) + \omega_{22}(y) = \sqrt{2}\psi_4'\left(\frac{x-y-1}{2}\right) + \sqrt{2}\psi_3'\left(\frac{1-x+y}{2}\right) - \sqrt{2}\psi_3'(y+1), \quad -1 \leq x-y \leq 1.$$

Теперь подставляя (19) в (7), имеем первое соотношение между неизвестными функциями $T(x)$ и $N(x)$:

$$T'(x) - N(x) = \alpha_1(x), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (24)$$

где

$$\alpha_1(x) = \psi_2' \left(\frac{x-1}{2} \right) - \int_0^{\frac{x+1}{2}} [\omega_{21}(x) + \omega_{22}(\eta)] d\eta.$$

а) При $0 \leq x \leq 1$ уравнение (24) имеет вид

$$\tau_1'(x) - \nu_1(x) = \alpha_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (25)$$

б) А при $-1 \leq x \leq 0$ –

$$\tau_2'(x) - \nu_2(x) = \alpha_1(x), \quad -1 \leq x \leq 0. \quad (26)$$

Далее, подставляя (19) в (6), получим соотношение

$$\tau_2'(x) + \nu_2(x) = \delta_1(x), \quad -1 \leq x \leq 0, \quad (27)$$

где

$$\delta_1(x) = \psi_1' \left(\frac{x+1}{2} \right) + \int_0^{\frac{x-1}{2}} [\omega_{21}(x-2\eta) + \omega_{22}(\eta)] d\eta.$$

Из (26) и (27) находим функции $\tau_2'(x)$ и $\nu_2(x)$:

$$\tau_2'(x) = \frac{1}{2} [\alpha_1(x) + \delta_1(x)], \quad \nu_2(x) = \frac{1}{2} [\delta_1(x) - \alpha_1(x)]. \quad (28)$$

Интегрируя первое из равенств (28) от -1 до x , находим

$$\tau_2(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^x [\alpha_1(t) + \delta_1(t)] dt + \psi_2(-1).$$

Теперь переходя в уравнении (18) ($i = 2$), к пределу при $y \rightarrow 0$, в силу (10) и (12) получим соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$\mu_1(x) = \tau_1''(x) - \omega_{21}(x) - \omega_{22}(0). \quad (29)$$

Далее, применяя оператор $\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}$ к уравнению (17) и устремляя y к нулю, получим еще одно соотношение между неизвестными функциями $\tau_1(x)$, $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$:

$$\tau_1'''(x) + \nu_1''(x) - \nu_1'(x) - \mu_1(x) = \omega_{12}'(0). \quad (30)$$

Исключая из (25), (29) и (30) функции $\nu_1(x)$ и $\mu_1(x)$, затем интегрируя полученное уравнение дважды от 0 до x , имеем

$$\tau_1'(x) + \tau_1(x) = \alpha_2(x) + \omega_{12}'(0) \frac{x^2}{4} + k_1 x + k_2, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

где

$$\alpha_2(x) = \frac{1}{2} \left[\alpha_1(x) + \int_0^x \alpha_1(t) dt - \int_0^x (x-t) [\omega_{21}(t) + \omega_{22}(0)] dt \right],$$

а $\omega_{12}'(0)$, k_1 , k_2 – неизвестные пока постоянные.

Теперь решая последнее уравнение при условиях

$$\tau_1(1) = \varphi_1(0), \quad \tau_1'(1) = \varphi_1'(0) - \sqrt{2}\psi_3(1), \quad \tau_1(0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 [\alpha_1(t) + \delta_1(t)] dt + \psi_2(-1),$$

$$\tau_1'(0) = \frac{1}{2} [\alpha_1(0) + \delta_1(0)], \text{ находим функцию } \tau_1(x):$$

$$\tau_1(x) = \int_0^x \exp(x-t)\alpha_2(t)dt - \frac{\omega'_{12}(0)}{2} \left[\exp(x) - 1 - x - \frac{x^2}{2} \right] + k_1 [\exp(x) - x - 1] + k_2 [\exp(x) - 1] + k_3 \exp(x),$$

где

$$k_3 = \frac{1}{2} \int_{-1}^0 [\alpha_1(t) + \delta_1(t)] dt + \psi_2(-1), k_2 = \frac{1}{2} [\alpha_1(0) + \delta_1(0)] - \alpha_2(1) - k_3, \\ k_1 = \varphi'_1(0) - \varphi_1(0) - \sqrt{2}\psi_3(1) - \alpha_2(1) - k_2, \\ \omega'_{12}(0) = \frac{2}{e-2} \left[(e-1)\varphi_1(0) - ek_3 - \int_0^1 \exp(1-t)\alpha_2(t)dt \right] - 2 [\varphi'_1(0) - \sqrt{2}\psi_3(1) - \alpha_2(1) - k_2].$$

Тогда будут известными и функции $v_1(x), \mu_1(x), u_2(x, y)$

Переходя в уравнениях (18) ($i = 2$) и (18) ($i = 3$) к пределу при $y \rightarrow 0$ с учетом условий (10),(12) и производя замену $x \square x - y$, находим

$$\omega_{31}(x - y) = \omega_{21}(x - y) + \omega_{22}(0) - \omega_{32}(0), \quad -1 \leq x - y \leq 0. (31)$$

Теперь переходим к рассмотрению задачи в области G_3 . Сначала рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_{3xx} - u_{3yy} = \Omega_{31}(x - y) + \omega_{32}(y), \\ u_3(x, 0) = T_2(x), u_{3y}(x, 0) = N_2(x), \quad -2 \leq x \leq 1, \\ u_3(-1, y) = \varphi_2(y), u_{3x}(-1, y) = \varphi_3(y), u_{3xx}(-1, y) = \varphi_4(y), u_3(0, y) = \tau_3(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \end{cases}$$

где функции $T_2(x), N_2(x), \Omega_{31}(x - y)$ определяются следующим образом: в промежутке $-1 \leq x \leq 0$ функции $T_2(x), N_2(x)$ имеют вид: $T_2(x) = \tau_2(x), N_2(x) = v_2(x)$, функция $\Omega_{31}(x - y)$ при $- \leq x - y \leq 0$ имеет вид: $\Omega_{31}(x - y) = \omega_{31}(x - y)$, а в промежутках $-2 \leq x \leq -1$ и $0 \leq x \leq 1$ функции $T_2(x), N_2(x)$ и в промежутках $-2 \leq x - y \leq -1$ и $0 \leq x - y \leq 1$ функция $\Omega_{31}(x - y)$ пока неизвестны.

Решение этой задачи будем искать в виде

$$u_3(x, y) = u_{31}(x, y) + u_{32}(x, y) + u_{33}(x, y), (32)$$

где $u_{31}(x, y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{31xx} - u_{31yy} = 0, \\ u_{31}(x, 0) = T_2(x), u_{31y}(x, 0) = 0, \quad -2 \leq x \leq 1, (33) \\ u_{31}(-1, y) = \varphi_2(y), u_{31}(0, y) = \tau_3(y), \end{cases}$$

$u_{32}(x, y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{32xx} - u_{32yy} = \omega_{32}(y), \\ u_{32}(x, 0) = 0, u_{32y}(x, 0) = N_2(x), \quad -2 \leq x \leq 1, (34) \\ u_{32}(-1, y) = 0, u_{32}(0, y) = 0, \end{cases}$$

$u_{33}(x, y)$ – решение задачи

$$\begin{cases} u_{33xx} - u_{33yy} = \Omega_{31}(x-y), \\ u_{33}(x,0) = 0, u_{33y}(x,0) = 0, -2 \leq x \leq 1, (35) \\ u_{33}(-1,y) = 0, u_{33}(0,y) = 0. \end{cases}$$

Методом продолжения находим решения задач (33)-(35). Они имеют вид

$$u_{31}(x,y) = \frac{T_2(x+y) + T_2(x-y)}{2}, (36)$$

$$u_{32}(x,y) = \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} N_2(t) dt - \int_0^y (y-\eta) \omega_{32}(\eta) d\eta, (37)$$

$$u_{33}(x,y) = -\frac{1}{2} \int_0^y d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \Omega_{31}(\xi-\eta) d\xi. (38)$$

где

$$T_2(x) = \begin{cases} 2\varphi_2(-1-x) - \tau_2(-2-x), & -2 \leq x \leq -1, \\ \tau_2(x), & -1 \leq x \leq 0, \\ 2\tau_3(x) - \tau_2(-x), & 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$$

$$N_2(x) = \begin{cases} 2 \int_0^{-1-x} \omega_{32}(\eta) d\eta - v_2(-2-x), & -2 \leq x \leq -1, \\ v_2(x), & -1 \leq x \leq 0, \\ 2 \int_0^x \omega_{32}(\eta) d\eta - v_2(-x), & 0 \leq x \leq 1; \end{cases}$$

а функция $\Omega_{31}(x-y)$ определяется следующим образом.

Первые два условия задачи (35) выполняются автоматически, удовлетворяя третье условию, находим

$$\frac{1}{2} \int_{-1-y}^{y-1} \Omega_{31}(b_2 z) dz = -y \Omega_{31}(-1-y). (39)$$

Дифференцируя (39), находим

$$\omega_{31}(y-1) + (3-2y)\Omega_{31}(-1-y) - y\Omega'(-1-y) = 0. (40)$$

Из последнего равенства следует $\omega_{31}(-1) = 0$ или в силу (31) имеем $\omega_{32}(0) = \omega_{21}(-1) + \omega_{22}(0)$.

Далее, удовлетворяя четвертое условие задачи (35), имеем

$$\frac{1}{2} \int_{-y}^y \Omega_{31}(z) dz = -y \omega_{31}(-y). (41)$$

Дифференцируя (41), получим

$$\Omega_{31}(y) = (2y-3)\omega_{31}(-y) + y\omega'_{31}(-y) = 0. (42)$$

Из (42) при $y=0$ следует $\omega_{31}(0) = 0$.

Подставляя (36), (37), (38) в (32), получим

$$u_3(x,y) = \frac{T_2(x+y) + T_2(x-y)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} N_2(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^y d\eta \int_{x-y+\eta}^{x+y-\eta} \Omega_{31}(\xi-\eta) d\xi -$$

$$+\int_0^y (y-\eta)\omega_{32}(\eta)d\eta.(43)$$

Дифференцируя (43) по x и полагая в полученном равенстве $x \rightarrow -1$, в силу (39), получим

$$\varphi_3(y) = \tau_2'(y-1) - \varphi_2'(y) + \nu_2(y-1) - \int_0^y \omega_{32}(\eta)d\eta - \frac{1}{4} \int_{-1-y}^{y-1} \Omega_{31}(t)dt + \frac{y}{2} \Omega_{31}(-1-y).(44)$$

Дифференцируя последнее равенство, после некоторых выкладок, имеем соотношение

$$\begin{aligned} \varphi_3'(y) &= \tau_2''(y-1) - \varphi_2''(y) + \nu_2'(y-1) - \omega_{32}(y) - \\ &- \frac{1}{4} \omega_{31}(y-1) + \frac{1}{4} \Omega_{31}(-1-y) - \frac{y}{2} \Omega_{31}'(-1-y).(45) \end{aligned}$$

Подставляя (43) в условие (5), приходим к соотношению

$$\varphi_4(y) = \varphi_2''(y) + \omega_{32}(y) - \frac{1}{4} \omega_{31}(y-1) + \frac{1}{4} \Omega_{31}(-1-y) - \frac{y}{2} \Omega_{31}'(-1-y).$$

Исключая из последнего равенства и (45) функцию $\frac{y}{2} \Omega_{31}'(-1-y)$, находим

$$\omega_{32}(y) = \frac{1}{2} [\tau_2''(y-1) - 2\varphi_2''(y) + \varphi_4(y) - \varphi_3'(y) + \nu_2'(y-1)].(46)$$

Учитывая (39), равенство (44) можно переписать в виде

$$\varphi_3(y) = \tau_2'(y-1) - \varphi_2'(y) + \nu_2(y-1) - \int_0^y \omega_{32}(\eta)d\eta - \frac{1}{2} \int_{-1-y}^{y-1} \Omega_{31}(t)dt.(47)$$

Дифференцируя (47), с учетом (46), находим

$$\Omega_{31}(-1-y) = \tau_2''(y-1) - \varphi_4(y) + \varphi_3'(y) + \nu_2'(y-1) - \omega_{31}(y-1).$$

Дифференцируя (43) по x и полагая в полученном равенстве $x \rightarrow 0$, в силу (41), после некоторых вычислений, получим первое соотношение между неизвестными функциями $\tau_3(y)$ и $\nu_3(y)$:

$$\nu_3(y) = \tau_3'(y) + \beta_1(y), \quad 0 \leq y \leq 1,(48)$$

где

$$\beta_1(y) = \tau_2'(-y) - \nu_2(-y) + \int_0^y \omega_{32}(\eta)d\eta + y\omega_{31}(-y).$$

Переходя в уравнениях (17) и (18) ($i=3$) к пределу при $x \rightarrow 0$ в силу условий (13) и (15), находим

$$\mu_3(y) - \tau_3'(y) = \overline{\omega}_{11}(-y) + \omega_{12}(y),(49)$$

$$\mu_3(y) - \tau_3''(y) = \Omega_{31}(-y) + \omega_{32}(y),(50)$$

где положено

$$\omega_{11}(x-y) = \begin{cases} \overline{\omega}_{11}(x-y), & -1 \leq x-y \leq 0, \\ \underline{\omega}_{11}(x-y), & 0 \leq x-y \leq 1, \end{cases}$$

причем $\overline{\omega}_{11}(0) = \underline{\omega}_{11}(0)$.

Дифференцируя уравнения (18) и (19) ($i=3$) по x и полагая в полученных уравнениях $x \rightarrow 0$ в силу условий (13)-(16), получим

$$\theta_3(y) - v_3'(y) = b_2 \overline{\omega'}_{11}(-y), (51)$$

$$\theta_3(y) - v_3''(y) = b_2 \Omega'_{31}(-y). (52)$$

Исключая из (49),(50) функцию $\mu_3(y)$, а из (51),(52) функцию $\theta_3(y)$ после некоторых выкладок, получим

$$\tau_3''(y) - \tau_3'(y) = \overline{\omega}_{11}(-y) + \omega_{12}(y) - \omega_{31}(-y) - \omega_{32}(y), (53)$$

$$\overline{\omega'}_{11}(-y) = \omega'_{31}(-y) - [v_3''(y) - v_3'(y)], (54)$$

Интегрируя (54), находим

$$\overline{\omega}_{11}(-y) = -[v_3'(y) - v_3(y)] + \beta_2(y), (55)$$

где

$$\beta_2(y) = [\omega_{31}(-y) - \omega_{31}(0)] + [v_1'(0) - \tau_1'(0)] + \overline{\omega}_{11}(0).$$

Подставляя (55) в (53), получим

$$\omega_{12}(y) = [\tau_3''(y) - \tau_3'(y)] - [v_3'(y) - v_3(y)] + \beta_3(y), (56)$$

где

$$\beta_3(y) = \omega_{31}(-y) + \omega_{32}(y) - \beta_2(y),$$

$$\text{а } \overline{\omega}_{11}(0) = [\mu_1(0) - v_1(0)] + [\omega_{31}(0) + \omega_{32}(0)] - \omega_{12}(0).$$

Переходя в уравнении (17) к пределу при $y \rightarrow 0$ в силу условий (10) и (11), находим

$$\overline{\omega}_{11}(x) = \tau_1''(x) - v_1(x) - \omega_{12}(0). (57)$$

Теперь переходим в область G_1 . Записываем решение уравнения (18), удовлетворяющего условиям (2),(11),(14):

$$\begin{aligned} u_1(x, y) = & \int_0^y \tau_3(\eta) G_\xi(x, y; 0, \eta) d\eta - \int_0^y \varphi_1(\eta) G_\xi(x, y; 1, \eta) d\eta + \\ & + \int_0^1 \tau_1(\xi) G(x, y; \xi, 0) d\xi - \int_0^y d\eta \int_0^\eta \overline{\omega}_{11}(\xi - \eta) G(x, y; \xi, \eta) d\xi - \\ & - \int_0^y d\eta \int_\eta^1 \overline{\omega}_{11}(\xi - \eta) G(x, y; \xi, \eta) d\xi - \int_0^y \omega_{12}(\eta) d\eta \int_0^1 G(x, y; \xi, \eta) d\xi. \end{aligned} (58)$$

Дифференцируя (58) по x и полагая $x \rightarrow 0$, с учетом равенств (55)-(57) после длинных вычислений, получим интегральное уравнение типа Абеля относительно $\tau_3''(y)$. Применяя обращение Абеля к этому уравнению, получим интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно $\tau_3''(y)$:

$$\tau_3''(y) + \int_0^y K(y, \eta) \tau_3''(\eta) d\eta = g(y), \quad 0 \leq y \leq 1, (59)$$

где $K(y, \eta), g(y)$ – известные функции, причем $K(y, \eta)$ имеет слабую особенность (порядка $1/2$), $g(y)$ – непрерывная функция, а

$$G(x, y; \xi, \eta) \Big\} = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right] \mp \exp\left[-\frac{(x+\xi-2n)^2}{4(y-\eta)}\right] \right\} -$$

функции Грина первой и второй краевых задач для уравнения (17).

Решая уравнение (59), находим функцию $\tau_3''(y)$, тем самым и функции $\tau_3(y)$, $\nu_3(y)$, $\omega_{11}(x-y) + \omega_{12}(y)$, $T_2(x)$. Тогда будут известными и функции $u_3(x, y)$ и $u_1(x, y)$. Итак, мы нашли решение поставленной задачи 1 единственным образом.

Замечание. В работах [1-4] был рассмотрен ряд краевых задач для уравнений второго, третьего и четвертого порядков параболо-гиперболического типа.

References:

1. Taxirov J.O. Kraevie zadachi dlya smeshannogo parabol-giperbolicheskogo uravneniya s izvestnoy i neizvestnoy liniyami razdela. Avtoreferat kandidatskoy dissertatsii. Tashkent, 1988.
2. Berdishev A.S. Kraevie zadachi i ix spektralnie svoystva dlya uravneniya smeshannogo parabol-giperbolicheskogo i smeshanno-sostavnogo tipov. – Almati, 2015, 224 s.
3. Djuraev T.D., Mamajanov M. Kraevie zadachi dlya odnogo klassa uravneniy chetvertogo poryadka smeshannogo tipa. Differentsialnie uravneniya, 1986, t.22, №1, s.25-31.
4. Djuraev T.D., Sopuev A., Mamajanov M. Kraevie zadachi dlya uravneniy parabol-giperbolicheskogo tipa. Tashkent, Fan, 1986, 220 s.