[Scientific Bulletin of Namangan State University](https://uzjournals.edu.uz/namdu)

Volume 1 | Issue 7 Article 2

9-10-2019

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATION OF THE THIRD ORDER

Bahrom Yusuphanovich Irgashev
Namangan Engineering Construction Institute PhD in mathematics

Follow this and additional works at: https://uzjournals.edu.uz/namdu

Part of the Physical Sciences and Mathematics Commons

Recommended Citation

Irgashev, Bahrom Yusuphanovich (2019) "THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATION OF THE THIRD ORDER," *Scientific Bulletin of Namangan State University*: Vol. 1 : Iss. 7 , Article 2.
Available at: https://uzjournals.edu.uz/namdu/vol1/iss7/2

This Article is brought to you for free and open access by 2030 Uzbekistan Research Online. It has been accepted for inclusion in Scientific Bulletin of Namangan State University by an authorized editor of 2030 Uzbekistan Research Online. For more information, please contact sh.erkinov@edu.uz.

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATION OF THE THIRD ORDER

Cover Page Footnote
???????

Erratum
???????

This article is available in Scientific Bulletin of Namangan State University: https://uzjournals.edu.uz/namdu/vol1/iss7/2

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Иргашев Бахром Юсупханович
Наманганский инженерно строительный институт
кандидат физико-математических наук

Аннотация: *В данной работе получены достаточные условия единственности и существования решения одной краевой задачи в прямоугольной области для вырождающегося уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Решение получено в виде ряда по собственным функциям.*

Ключевые слова: *Вырождающее уравнение, интегралы энергии, метод Фурье, функция Грина, функция Бесселя, неравенство Бесселя,ряд,равномерная сходимость.*

УЧИНЧИ ТАРТИБЛИ ТЕНГЛАМА УЧУН ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

Иргашев Бахром Юсупханович
Наманган муҳандислик қурилиш институти
физика-математика фанлари номзоди

Аннотация: *Мазкур мақолада учинчи тартибли бузилувчан каррали характеристикали тенгламага қуйилган бир чегаравий масаланинг ечимини ягоналиги ва мавжудлигини етарли шартлари олинган. Ечим хос функциялар бўйича қатор куринишда олинган.*

Калит сўзлар: *Бузилувчан тенглама, энергия интеграллари, Фурье усули, Грин функцияси, Бессел функцияси, Бессел тенгсизлиги, қатор, текис яқинлашиш.*

THE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE EQUATION OF THE THIRD ORDER

Irgashev Bahrom Yusuphanovich
Namangan Engineering Construction Institute
PhD in mathematics

Abstract: *In this paper, we obtain sufficient conditions for the uniqueness and existence of a solution to one boundary-value problem in a rectangular domain for a degenerate third-order equation with multiple characteristics. The solution was obtained in the form of a series of eigenfunctions.*

Keywords: *Degenerate equation,energy integrals,Fourier method,Green function,Bessel function,Bessel inequality,series,uniform convergence.*

Введение.Фундаментальные результаты для уравнений второго порядка эллиптического типа,имеющих вырождение второго рода, были получены М.В.Келдышом [1].При изучении так называемого стационарного вязкого трансзвукового линейного уравнения (или ВТ-уравнение)

$$u_{xxx}(x,y)+u_{yy}+\frac{a}{y}u_y=f(x,y),$$

для случая $a=0$,в работе [2],методом построения функции Грина в прямоугольной области,решена краевая задача.Также,в работах [3],[4] в явном виде построены функции Грина некоторых внешних краевых задач в случаях: $a=0$ и $a=1$.Для вырождающегося модельного уравнения высокого нечетного порядка,краевая задача в прямоугольной области рассмотрена в работе [5].В данной работе исследуется краевая задача для вырождающего уравнения третьего порядка с младшими членами,которая ранее не исследовалась.

2.Постановка и единственность решения задачи.Для уравнения

$$L[u]=u_{xxx}+a_1(x)u_x+a_0(x)u-y^m u_{yy}=0, \quad \textbf{(1)}$$

где $0\le m<1, a_1(x)\in \tilde{N}^1[0,1], a_0(x)\in \tilde{N}[0,1]$, **рассмотрим следующую задачу.**

Задача A.Найти в области $\Omega=\{(x,y): 0<x,y<1\}$ решение уравнения (1) из класса $C^{3,2}_{x,y}(\Omega)\cap C^{2,1}_{x,y}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$u(x,0)=0,\ u(x,1)=0,\ 0\le x\le 1;$$

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(1,y)=\varphi_2(y),\ u_x(1,y)=\varphi_3(y),\ 0\le y\le 1,$$

где

$$\varphi_i(y)\in C^4(0,1],\quad \varphi_i(1)=\varphi_i''(1)=0,$$

$$\varphi_i^{(j)}(y)=O\left(y^{\frac{7}{2}-m-j}\right)\ \text{ï ðè}\ y\to+0,\ i=1,2,3,\ j=\overline{0,4}.$$

Теорема единственности.Если $\frac{1}{2}a_{1x}(x)-a_0(x)\le 0$, то однородная краевая задача для уравнения (1) имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Пусть $u(x,y)$-нетривиальное решение однородной задачи A.Рассмотрим тождество

$$uL[u]=0,(x,y)\in\Omega.(2)$$

Так как

$$uu_{xxx}=\left(uu_{xx}-\frac{1}{2}u_x^2\right)_x,\ u(a_1u_x+a_0u)=\left(\frac{1}{2}a_1u^2\right)_x+\left(a_0-\frac{1}{2}a_{1x}\right)u^2,$$

$$y^m uu_{yy}=\left(y^m uu_y-\frac{my^{m-1}u^2}{2}\right)_y-\frac{m(1-m)y^{m-2}u^2}{2}-y^m u_y^2$$

то, подставляя их в тождество (2), а затем, проинтегрировав по области Ω, получим:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u_x^2(0,y)dy+\int_0^1\int_0^1 u^2(x,y)\left(a_0(x)-\frac{1}{2}a_{1x}(x)\right)dxdy+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\left(\frac{m(1-m)}{2}y^{m-2}u^2+y^m u_y^2\right)dxdy=0,$$

отсюда имеем, что

$$u(x,y)\equiv 0.$$

Здесь учли,что из $u(x,y)\in C^{2,1}_{x,y}(\overline{\Omega})$ и $u(x,0)=0$ следует $u(x,y)=O(y)$,при $y\to+0$.**Теорема единственности доказана**.

3.Построение решения поставленной задачи. Будем искать решение методом разделения переменных:

$$u(x,y)=X(x)Y(y),$$

тогда из уравнения (1) следует, что

$$\frac{X'''+a_1(x)X'+a_0(x)X}{X}=\frac{y^mY''}{Y}=-\lambda,\ \lambda>0,$$

Учитывая граничные условия,относительно переменной y,получим следующую краевую задачу на нахождения собственной функции и собственного значения:

$$\begin{cases} Y''(y)+\lambda y^{-m}Y(y)=0, \\ Y(0)=0, \\ Y(1)=0. \end{cases} \qquad (3)$$

Уравнению (3) удовлетворяют следующие функции [6]:

$$Y_1(y)=\sqrt{y}J_{\frac{1}{2-m}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}\right),Y_2(y)=\sqrt{y}J_{-\frac{1}{2-m}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}\right),$$

где $J_\alpha(\beta)$- функция Бесселя.

Удовлетворив краевым условиям, получим решение задачи (3) в виде

$$Y_k(y)=\frac{1}{\left\|\sqrt{y}J_{\frac{1}{2-m}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_k}}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}\right)\right\|_{L_2}}\sqrt{y}J_{\frac{1}{2-m}}\left(\frac{2\sqrt{\lambda_k}}{2-m}y^{\frac{2-m}{2}}\right),$$

здесь система $\{Y_k\}_{k=0}^{k=+\infty}$ ортонормированна.

Относительно переменной x получим краевую задачу

$$\begin{cases} X_k'''+\nu_k^3X_k=-\left(a_1(x)X_k'+a_0(x)X_k\right), \\ X_k(0)=\varphi_{1k},X_k(1)=\varphi_{2k},X_k'(1)=\varphi_{3k}, \end{cases} \qquad (4)$$

где

$$\varphi_{ik}=\int_0^1\varphi_i(y)Y_k(y)y^{-m}dy,\ i=1,2,3,\ \nu_k^{\,3}=\lambda_k,\nu_k=O\left(k^{\frac{2}{3}}\right).$$

Обнулим краевые условия в задаче (4),для этого введем новую функцию $Z(x)$ по формуле:

$$Z(x)=X(x)-x(x-1)\varphi_{3k}-x(2-x)\varphi_{2k}-(x-1)^2\varphi_{1k},$$

тогда получим краевую задачу в виде

$$\begin{cases} Z_k''' + \nu_k^3 Z_k = f(x) - \left(a_1(x) Z_k' + a_0(x) Z_k\right), \\ Z_k(0) = Z_k(1) = Z_k'(1) = 0, \end{cases} \quad (5)$$

где

$$f(x) = -\left(\nu_k^3 + a_0(x)\right)\left(x(x-1)\varphi_{3k} + x(2-x)\varphi_{2k} + (x-1)^2 \varphi_{1k}\right) -$$
$$-a_1(x)\left((2x-1)\varphi_{3k} + (2-2x)\varphi_{2k} + (2x-2)\varphi_{1k}\right).$$

Сведем задачу (5) к интегральному уравнению,которую в дальнейшем решим методом последовательных приближений.Известно [2], что для функции Грина $G_k(x,\xi)$ задачи (5) справедливы оценки,при $k \to +\infty$:

$$\left|\frac{\partial^s G_k(x,\xi)}{\partial t^s}\right| \le M_s \nu_k^{s-2}, s = 0,1,2,3,4, \text{где } t = x \text{, либо } t = \xi$$

Задача (5) эквивалентна интегральному уравнению вида:

$$Z_k(x) = \int_0^1 f(\xi) G_k(x,\xi d\xi - \int_0^1 \left(a_1(\xi) Z_k'(\xi) + a_0(\xi) Z_k(\xi)\right) G_k(x,\xi) d\xi =$$
$$= F(x) + \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(a_1(\xi) G_k(x,\xi)\right) - a_0(\xi) G_k(x,\xi)\right) Z_k(\xi) d\xi,$$

где

$$F(x) = \int_0^1 f(\xi) G_k(x,\xi d\xi .$$

Будем решать полученное уравнение методом последовательных приближений

$$Z_k^0(x) = F(x),$$

$$Z_k^{n+1} = F(x) + \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\left(a_1(\xi) G_k(x,\xi)\right) - a_0(\xi) G_k(x,\xi)\right) Z_k^n(\xi) d\xi,$$

Если учесть ограниченность функций $a_0(x), a_1(x), a_1'(x)$,оценки для функции Грина, то начиная с некоторого номера k, будем иметь

$$\left|Z_k^{n+1}\right| \le K_1 \left|F(x)\right| \left(1 + \left|\frac{\partial G_k(x,\xi)}{\partial \xi}\right| + \left|\frac{\partial G_k(x,\xi)}{\partial \xi}\right|^2 + \ldots + \left|\frac{\partial G_k(x,\xi)}{\partial \xi}\right|^n\right),$$

отсюда

$$\left|Z_k(x)\right| \le K_1 \left|F(x)\right| \frac{1}{1 - \left|\frac{\partial G_k(x,\xi)}{\partial \xi}\right|} \le M_0 \left|F(x)\right| \le N_0 \left(\left|\varphi_{1k}\right| + \left|\varphi_{2k}\right| + \left|\varphi_{3k}\right|\right),$$

где K_1, M_0, N_0-некоторая положительная постоянная.

Аналогично можно показать выполнение следующих неравенств, справедливость которых верно начиная с некоторого номера k:

$$\left|Z_k'(x)\right| \le M_1 \nu_k \left|F(x)\right|, \left|Z_k''(x)\right| \le M_2 \nu_k^2 \left|F(x)\right|,$$

$$\left|Z_k'''(x)\right| \le M_3 \nu_k^3 \left|F(x)\right| = M_3 \lambda_k \left|F(x)\right| \le N_3 \lambda_k \left(\left|\varphi_{1k}\right| + \left|\varphi_{2k}\right| + \left|\varphi_{3k}\right|\right),,$$

где M_1, M_2, M_3, N_3-некоторые положительные постоянные,не зависящие от номера k.Формальным решением поставленной задачи будет ряд

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(y) X_k(x), (6)$$

покажем равномерную сходимость и возможность дифференцирования этого ряда до нужного порядка.С вышеуказанного имеем

$$\left|u(x,y)\right| \le M \sum_{k=0}^{\infty} \left|Y_k(y)\right| \left(\left|\varphi_{1\hat{e}}\right| + \left|\varphi_{2\hat{e}}\right| + \left|\varphi_{3\hat{e}}\right|\right),$$

где M –некоторая положительная постоянная.

Покажем сходимость рядов участвующих в правой части этого неравенства. Применяя неравенство Коши-Буняковского,получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|Y_k(y)\right| \left|\varphi_{1k}\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left|Y_k(y)\right|}{\lambda_k} \lambda_k \left|\varphi_{ik}\right| \le \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\left|Y_k(y)\right|}{\lambda_k}\right)^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\lambda_k \left|\varphi_{ik}\right|\right)^2}, i = 1,2,3. (7)$$

Покажем теперь сходимость каждого ряда в неравенстве (7).Имеем

$$\varphi_{ik} = \int_0^1 y^{-m} \varphi_i(y) Y_k(y) dy = -\frac{1}{\lambda_{\hat{e}}} \int_0^1 \varphi_i(y) Y_k''(y) dy, \; k \in N, \; i = 1,2,3,$$

отсюда

$$\lambda_k \varphi_{ik} = \int_0^1 \left(-\varphi_i''(y) y^m\right) y^{-m} Y_k(y) dy, \; k \in N, \; i = 1,2,3,$$

применим здесь неравенство Бесселя

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\varphi_{ik} \lambda_k\right)^2 \le \left\|\varphi_i''(y) y^m\right\|^2 = \int_0^1 \left(\varphi_i''(y)\right)^2 y^m dy, \; i = 1,2,3, (8)$$

интеграл в неравенстве (8) существует и значит, ряд сходится.

Теперь вернемся к задаче (3),которая эквивалентна интегральному уравнению

$$Y_k(y) = \lambda_k \int_0^1 G(y,\xi) \xi^{-m} Y_k(\xi) d\xi,$$

где

$$G(y,\xi) = \begin{cases} \xi(1-y), & 0 \le \xi \le y, \\ y(1-\xi), & y \le \xi \le 1. \end{cases}$$

отсюда

$$\frac{Y_k(y)}{\lambda_k}=\int_0^1 G(y,\xi)\xi^{-m}Y_k(\xi)d\xi\,,$$

по неравенству Бесселя,имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{Y_k(y)}{\lambda_k}\right)^2\le\int_0^1 G^2(y,\xi)\xi^{-m}d\xi\,.$$

оценим последний интеграл:

$$\int_0^1 G^2(y,\xi)\xi^{-m}d\xi=\int_0^y \xi^{2-m}(1-y)^2d\xi+\int_y^1 y^2(1-\xi)^2\xi^{-m}d\xi\le$$

$$\le\frac{1}{3-m}+2\left(\frac{1}{1-m}+\frac{2}{2-m}+\frac{1}{3-m}\right)=N\,.$$

Следовательно,ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{Y_k(y)}{\lambda_k}\right)^2$ сходится и равномерно ограничен.Покажем теперь равномерную сходимость ряда (6)

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}Y_k(y)X_k(x)\right|\le M\sum_{k=n}^{n+p}\left|\frac{Y_k(y)}{\lambda_k}\right|\lambda_k\left(|\varphi_{1\hat{e}}|+|\varphi_{2\hat{e}}|+|\varphi_{3\hat{e}}|\right)\le$$

$$\le M\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\left(\frac{|Y_k(y)|}{\lambda_k}\right)^2}\left(\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\left(\lambda_k|\varphi_{1k}|\right)^2}+\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\left(\lambda_k|\varphi_{2k}|\right)^2}+\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\left(\lambda_k|\varphi_{3k}|\right)^2}\right)\le$$

$$\le MN\left(\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\left(\lambda_k|\varphi_{1k}|\right)^2}+\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\left(\lambda_k|\varphi_{2k}|\right)^2}+\sqrt{\sum_{k=n}^{n+p}\left(\lambda_k|\varphi_{3k}|\right)^2}\right).$$

Учитывая (8) имеем,что для любого $p>0$ суммы,стоящие в правой части,стремятся к нулю при возрастании n.Принимая во внимание,что правая часть не зависит от переменных (x,y), мы можем утверждать,что ряд (6) сходится равномерно в квадрате $[0,1]\times[0,1]$.

Аналогично доказывается возможность почленного дифференцирования бесконечного ряда (6) по переменным x и y до нужного порядка.

Refernces:

1.Keldish M.V.O nekotorix sluchayax virojdeniya uravneniy ellipticheskogo tipa na granitse oblasti // Dokl.AN SSSR-Moskva,1951.-T.77.-№2.-S.181-183.

2.Apakov YU.P.O reshenii kraevoy zadachi dlya uravneniya tretego poryadka s kratnimi xarakteristikami // Ukrainskiy matem.jurnal.–Kiev,2012.–T.64.– №1.–S.3-13.

3.Diesperov V.N.O funksii Grina linearizovannogo vyazkogo transzvukovogo uravneniya // Jurnal vichisl.matem.i matem.fiziki.–Moskva,1972–T.12.–№ 5.–S. 1265-1269.

4.Diesperov V.N,Lomakin L.A.Ob odnoy kraevoy zadache dlya linearizovannogo osesimmetricheskogo VT-uravneniya // Jurnal vichisl.matem.i matem.fiziki–Moskva,1974.–T.14.–№ 5.–S.1244-1260.
5.Apakov YU.P.,Irgashev B.YU.Kraevaya zadacha dlya virojdayushegosya uravneniya visokogo nechetnogo poryadka // Ukr.mat.jurn.-Kiev,2014.-T.66.-№10.-S.1318-1331.
6.Beytmen G.,Erdeyi A.Visshie transsendentnie funksii.Funksii Besselya,funksii parabolicheskogo silindra,ortogonalnie mnogochleni.–M.:Nauka, 1974.–296 s.