

9-7-2019

MATHEMATICAL SIMULATION OF THE SPEEDS OF IDEALLY NEWTONOVSKY, INCOMPRESSIBLE, VISCOUS LIQUID ON A CURVILINEARLY SMOOTHED PIPE SITE

Z M. Malikov

Institute of Mechanics and Seismic Strength of Structures at the Academy of Sciences of Uzbekistan,

E U. Madaliev

Fergana Polytechnic Institute

M E. Madaliev

Institute of Mechanics and Seismic Strength of Structures at the Academy of Sciences of Uzbekistan

Follow this and additional works at: <https://uzjournals.edu.uz/ferpi>

Recommended Citation

Malikov, Z M.; Madaliev, E U.; and Madaliev, M E. (2019) "MATHEMATICAL SIMULATION OF THE SPEEDS OF IDEALLY NEWTONOVSKY, INCOMPRESSIBLE, VISCOUS LIQUID ON A CURVILINEARLY SMOOTHED PIPE SITE," *Scientific-technical journal*: Vol. 2 : Iss. 3 , Article 5.

Available at: <https://uzjournals.edu.uz/ferpi/vol2/iss3/5>

This Article is brought to you for free and open access by 2030 Uzbekistan Research Online. It has been accepted for inclusion in Scientific-technical journal by an authorized editor of 2030 Uzbekistan Research Online. For more information, please contact sh.erkinov@edu.uz.

BUILDING

УДК: 696.11

**MATHEMATICAL SIMULATION OF THE SPEEDS OF IDEALLY
NEWTONOVSKY, INCOMPRESSIBLE, VISCOUS LIQUID ON A CURVILINEARLY
SMOOTHED PIPE SITE**

Z.M. Malikov¹, E.U. Madaliev², M.E. Madaliev¹

¹Institute of Mechanics and Seismic Strength of Structures at the Academy of
Sciences of Uzbekistan,

²Fergana Polytechnic Institute

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СКОРОСТЕЙ ТЕЧЕНИЯ
ИДЕАЛЬНО НЬЮТОНОВСКОЙ, НЕСЖИМАЕМОЙ, ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО
КРИВОЛИНЕЙНО ПЛАВНО СУЖАЮЩЕЙСЯ УЧАСТКЕ ТРУБЫ**

З.М. Маликов¹, Э.Ў. Мадалиев², М.Э. Мадалиев¹

¹Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева АН РУз,

²Ферганский политехнический институт

**СИҚИЛМАЙДИГАН, ЁПИШҚОҚ, ИДЕАЛ НЬЮТОН СУЮҚЛИКЛАРНИ
КУВУР ЮЗАСИ СИЛЛИҚ ТОРАЙГАН ҚИСМИДАГИ ОҚИМ ТЕЗЛИГИНИ
МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ**

З.М. Маликов¹, Э.Ў. Мадалиев², М.Э. Мадалиев¹

¹Ўз. ФА. М.Т.Ўразбоев номидаги механика ва иншоотлар сейсмик
мустаҳкамлиги институти,

²Фарғона политехника институти

Abstract. In this article, the flow rate of an ideally Newtonian, incompressible, viscous fluid along the curvilinearly tapered section of the pipe was studied. The article is based on solving the hydrodynamic Navier-Stokes equations for a laminar (viscous) flow. This version of the model considered the simplest models of a continuous medium: an ideal (devoid of internal friction), an incompressible fluid or gas under motion with small Mach numbers.

Key words: inertial, centrifugal, Coriolis, continuous media, voltages, Navier - Stokes, current function, curvilinear, smoothly, tapering, numerical methods, relaxation, sweeps, recurrent, predictor, corrector.

Аннотация. В данной статье изучена скорость течения идеально ньютоновской, несжимаемой, вязкой жидкости на криволинейно плавно сужающемся участке трубы. Статья основана на решении гидродинамических уравнений Навье-Стокса для ламинарного (вязкого) потока. В данном варианте модели рассматривались простейшие модели сплошной среды: идеальная (лишенная внутреннего трения), несжимаемая жидкость или газ в условиях движения с малыми значениями числа Маха.

Ключевые слова: инерционный, центробежный, кориолис, сплошная среда, напряжения, Навье — Стокс, функция тока, криволинейно, плавно, сужающейся, численный метод, релаксация, прогонка, рекуррентный, предиктор, корректор.

Аннотация. Ушбу мақолада сиқилмайдиган, ёпишқоқ, идеал Ньютон суюқликларини қувур юзаси силлиқ торайган қисмидаги оқим тезлиги ўрганилган. Мақола Навье — Стоксни ламинар оқим гидродинамик тенгламасига асосланган. Хисобланган моделда суюқлик оқими идеал, сиқилмайдиган ва оқим тезлиги Мах сонидан кичик деб олинган.

Таянч сўзлар: инерцион, марказдан кочма, кориолис, кучланиш, Навье — Стокс, ток функцияси, эгри чизикли, силлиқ, тораядиган, хисобий усул, релаксация, прогонка, рекуррент, предиктор, корректор.

BUILDING

1. Введение

Создание новых эффективных параллельных вычислительных систем является стратегическим направлением развития компьютерной техники. К настоящему времени создано большое количество вычислительных алгоритмов, ориентированных на последовательную модель программирования. Однако далеко не всегда удается разработать эффективную параллельную реализацию для многих из них. Поэтому актуальной в настоящее время становится проблема создания новых параллельных алгоритмов решения задач науки и техники на суперкомпьютерах, в частности, для задач гидродинамики имеющих большие теоретическое и прикладное значение. С помощью уравнений движения вязкой среды описываются такие процессы, как движение волн на поверхности жидкости, движение крови по кровеносным сосудам человека и животных, течения в мантии земли. Задача о движение жидкости в каверне также описывается уравнениями, и в ней отражаются следующие характерные черты гидродинамических процессов: конвективная нелинейность, различные соотношения между инерционными и вязкими силами, одновременное существование областей малых и больших градиентов и т.п., поэтому задача о каверне широко распространена в качестве «тестовой» при выборе эффективного численного алгоритма для моделирования гидродинамических процессов [1]. Зачастую для получения приближенного решения с высокой точностью используют сетку с большой плотностью узлов, при этом существенно возрастает время расчета и тем самым становится актуальным применение многопроцессорных ЭВМ для уменьшения времени расчетов.

2. Постановка задачи

Для вывода основных дифференциальных уравнений динамики вязкой несжимаемой жидкости используем уравнения динамики сплошных сред «в напряжениях» и присоединим к ним уравнение несжимаемости. Подставим в правые части системы уравнений «в напряжениях» записанных с употреблением числовой индексации,

$$\begin{aligned} p \frac{dV_1}{dt} &= pF_1 + \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_3}, & p \frac{dV_2}{dt} &= pF_2 + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_3}, \\ p \frac{dV_3}{dt} &= pF_3 + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3}, \end{aligned} \quad (1)$$

или

$$p \frac{dV_i}{dt} = pF_i + \frac{\partial p_{i,k}}{\partial x_k} \quad (i,k=1,2,3)$$

значения напряжений $p_{i,j}$ не останавливаясь на случае изотермического движения, когда $\mu = \text{const}$, $p = \text{const}$ и $v = \text{const}$, получим для первого уравнения системы (1)

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_3} &= -\frac{\partial p}{\partial x_1} + 2\mu \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_2} + \frac{\partial V_2}{\partial x_1} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_3} + \frac{\partial V_3}{\partial x_1} \right) = \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \left(\frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_3^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \mu \nabla^2 V_1 + \mu \frac{\partial}{\partial x_1} \text{div} V. \end{aligned} \quad (2)$$

В несжимаемой жидкости $\text{div} V = 0$, а следовательно, и последнее слагаемое справа равно нулю. Повторяя подобные действия применительно к остальным двум уравнениям системы (1), деля обе части на p , раскрывая выражение производной dV_i/dt и присоединяя еще уравнение несжимаемости получим следующую систему уравнений Навье — Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_1}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_1}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_1}{\partial x_3} &= F_1 - \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \nabla^2 V_1, \\ \frac{\partial V_2}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_2}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_2}{\partial x_3} &= F_2 - \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \nu \nabla^2 V_2, \\ \frac{\partial V_3}{\partial t} + V_1 \frac{\partial V_3}{\partial x_1} + V_2 \frac{\partial V_3}{\partial x_2} + V_3 \frac{\partial V_3}{\partial x_3} &= F_3 - \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x_3} + \nu \nabla^2 V_3, \\ \frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

BUILDING

или кратко
$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} = F_i - \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 V_i, \frac{\partial V_k}{\partial x_k} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Пользуясь проекциями на криволинейные оси операторов rot, grad и div, получим следующие выражения уравнений Навье — Стокса в цилиндрических координатах (объемные силы опущены): цилиндрические координаты (r, ε, x) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\varepsilon}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon} + V_x \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\varepsilon^2}{r} &= -\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu (\nabla^2 V_r - \frac{V_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon}), \\ \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial r} + \frac{V_\varepsilon}{r} \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + V_x \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial z} + \frac{V_r V_\varepsilon^2}{r} &= -\frac{1}{p r} \frac{\partial p}{\partial \varepsilon} + \nu (\nabla^2 V_\varepsilon - \frac{V_\varepsilon}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \varepsilon}), \\ \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{V_\varepsilon}{r} \frac{\partial V_x}{\partial \varepsilon} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 V_x, \\ \frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial (rV_x)}{\partial x} &= 0, \nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \end{aligned} \tag{4}$$

Можно пренебречь $u \varepsilon$ при течение текучей среды по трубопроводу тогда уравнения (4) будут в таком виде:

$$\begin{aligned} V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_r \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{\partial V_x}{r \partial r} \right), \\ V_x \frac{\partial V_r}{\partial x} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial r} &= \nu \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{\partial V_r}{r \partial r} - \frac{V_r}{r^2} \right), \end{aligned} \tag{5}$$

Уравнения неразрывности в таком виде:

$$\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0. \tag{6}$$

Чтобы устранить давления и перевести вихревые уравнения, дифференцируем (5) по r, x , и получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left| \frac{V_x}{\partial r} \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_x \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_r \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial r} \right. &= \nu \left(\frac{\partial^3 V_x}{\partial r^3} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{r \partial r^2} \right), \\ \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{V_x}{\partial x} \frac{\partial V_r}{\partial x} + V_x \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \frac{\partial V_r}{\partial r} + V_r \frac{\partial^2 V_r}{\partial r \partial x} + \frac{1}{p} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial r} \right. &= \nu \left(\frac{\partial^3 V_r}{\partial r^2 \partial x} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_r}{\partial r \partial x} - \frac{\partial V_r}{r^2 \partial x} \right), \end{aligned} \tag{7}$$

и отнимаем их и получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{V_x}{\partial r} \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_x \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial r} \frac{\partial V_x}{\partial r} + V_r \frac{\partial^2 V_x}{\partial r^2} - \frac{V_x}{\partial x} \frac{\partial V_r}{\partial x} - V_x \frac{\partial^2 V_r}{\partial x^2} - \frac{\partial V_r}{\partial x} \frac{\partial V_r}{\partial r} - V_r \frac{\partial^2 V_r}{\partial r \partial x} &= \\ \nu \left(\frac{\partial^3 V_x}{\partial r^3} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_x}{r \partial r^2} - \frac{\partial^3 V_r}{\partial r^2 \partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_r}{\partial r \partial x} + \frac{\partial V_r}{r^2 \partial x} \right), & \tag{8} \\ V_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) + V_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial V_x}{\partial x} \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) + \frac{\partial V_r}{\partial r} \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) &= \\ \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right), & \\ \frac{1}{r} \frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{\partial V_x}{\partial x} = 0, \quad \zeta = \frac{\partial V_x}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial x}, & \tag{9} \end{aligned}$$

(9) это уравнения вихря. Если (9) подставить в уравнение (8) тогда уравнения изменяются в таком виде. Окончательно получим нестационарную двухмерную систему уравнений течения вязкой среды по трубопроводу:

$$V_r \frac{\partial \zeta}{\partial r} + V_x \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \zeta \frac{V_r}{r} = \nu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \zeta - \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right), \tag{10}$$

Чтобы получить функцию тока для цилиндрической координаты, введём следующие уравнения:

BUILDING

$$V_x = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad V_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \frac{\partial V_x}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \tag{11}$$

$$\zeta = \frac{\partial V_x}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = r\zeta \tag{12}$$

Для удобства постановки граничных условий на криволинейно плавно сужающейся участке сделаем замену переменных:

$$(x, r) \rightarrow (\xi(x, r), \eta(x, r)). \tag{13}$$

$$\xi = x/L, \quad \eta = \frac{r}{f(x)},$$

где L - длина трубы. В новых переменных, производные определяются по известной формуле [4]:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \eta}. \tag{14}$$

Криволинейно плавно сужающейся участок изменяется по функции (рис 1):

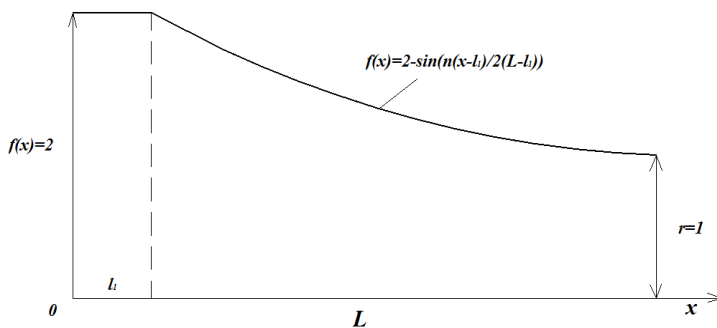


Рис 1.

$$f(x) = 2 - \sin \frac{\pi(x-l_1)}{2(L-l_1)},$$

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2(L-l_1)} \cos \frac{\pi(x-l_1)}{2(L-l_1)},$$

$$f''(x) = \left(\frac{\pi}{2(L-l_1)}\right)^2 \sin \frac{\pi(x-l_1)}{2(L-l_1)}.$$

По этой формуле получим производную первого порядка:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{rf'(x)}{f^2(x)} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{f(x)} \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Найдём производную второго порядка:

BUILDING

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \eta}, \end{aligned} \tag{15}$$

в уравнение (15) есть неопределённые производные $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \eta}$.

Решим эти задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \xi} &= \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi}, \\ \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \eta} &= \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \tag{16}$$

Поставив уравнения (16) на (15) получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right). \end{aligned} \tag{17}$$

Упростим уравнения (17):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial \eta} + 2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} \right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right), \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \xi} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 \xi}{\partial r^2} \frac{\partial}{\partial \xi} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial r^2} \frac{\partial}{\partial \eta} + 2 \frac{\partial \eta}{\partial r} \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial r} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \tag{18}$$

Решим уравнения (18) по замену переменных (13):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^2} &= \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \left(-r \left(\frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \eta} + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + 2 \frac{1}{L} \left(-r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta}, \\ \frac{\partial}{\partial r^2} &= \left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Решим уравнения (12) при граничных условиях на криволинейно плавно сужающейся участке, сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \left(-r \left(\frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} \right) \right) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \\ &\left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + 2 \frac{1}{L} \left(-r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{f(x)} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \zeta r, \\ &\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \left(\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)^2 \right) + \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \left(r \left(\frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} \right) + \right. \\ &\left. \frac{1}{r} \frac{1}{f(x)} \right) + 2 \frac{1}{L} \left(-r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = \zeta r. \end{aligned} \tag{20}$$

BUILDING

Решим уравнения (10) по граничным условиям на криволинейно плавно сужающейся участке сделаем замену переменных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + V_x \left(\frac{1}{L} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) + V_r \left(\frac{1}{f(x)} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) - \zeta \frac{V_r}{r} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r^2} \zeta - \frac{1}{r} \frac{1}{f(x)} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \left(V_r \left(\frac{1}{f(x)} \right) - V_x r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \left(V_x \frac{1}{L} \right) - \zeta \frac{V_r}{r} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} - \frac{1}{r^2} \zeta - \frac{1}{r} \frac{1}{f(x)} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \left(V_r \left(\frac{1}{f(x)} \right) - V_x r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{r} \frac{1}{f(x)} &+ \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \left(V_x \frac{1}{L} \right) - \zeta \left(\frac{V_r}{r} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{r^2} \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left(\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} \right). \end{aligned} \tag{21}$$

3.Методы решения

Алгоритм численного метода решения

В силу нелинейности уравнений (20), (21) становится невозможным прямое решение системы и рассматриваемый процесс приобретает итерационный характер, чтобы решить эти задачи используем численные методы. Уравнение (20) будем решать итерационным методом последовательной релаксации по строкам, а после с помощью неявных методов Эйлера. Это схема первого порядка точности с погрешностью аппроксимации $O(\Delta t, (\Delta x)^2)$. Анализ устойчивости Неймана (анализ Фурье) показывает, что она устойчива при любом шаге по времени, т.е. абсолютно устойчива. Однако при использовании этой схемы на каждом шаге по времени приходится решать систему алгебраических уравнений.[2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \left(\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)^2 \right) + \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \left(r \frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} \right) + \\ \frac{1}{r} \frac{1}{f(x)} + 2 \frac{1}{L} \left(-r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = \zeta r. \end{aligned} \tag{22}$$

Уравнение решается в области $\{0 \leq r \leq H_r, 0 \leq z \leq H_x\}$ прямоугольника со сторонами H_r и H_x , с граничными условиями I рода. В дальнейшем принимается $H_r = 200\text{мм}, H_x = 1\text{м}$, с граничными условиями, заданными следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \psi(i, 0) &= 0, \\ Vr(i, 0) &= 0, \\ Vx(i, 0) &= 0, \\ Vx(i, 0) &= Vx(i, 1), \\ \alpha(Hr - 1) &= 0, \\ \beta(Hr - 1) &= 2 \\ \psi(i, Hr) &= 2, \end{aligned} \right\} \tag{23}$$

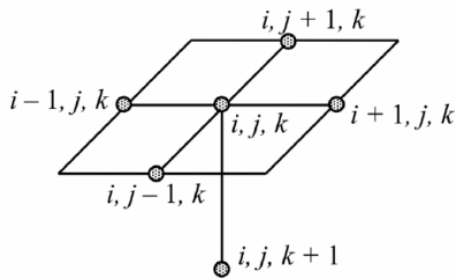
$$\begin{aligned} \frac{\psi_{i,j+1}^{k+1} - 2\psi_{i,j}^{k+1} + \psi_{i,j-1}^{k+1}}{\Delta \eta^2} \left(\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)^2 \right) + \frac{\psi_{i+1,j}^k - 2\psi_{i,j}^{k+1} + \psi_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta \xi^2} \frac{1}{L^2} - \\ \frac{\psi_{i,j+1}^{k+1} - \psi_{i,j-1}^{k+1}}{2\Delta \eta} \left(r \frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} \right) + \frac{1}{r} \frac{1}{f(x)} + \\ \frac{1}{2\Delta \xi} \left(\frac{\psi_{i+1,j+1}^k - \psi_{i+1,j-1}^{k+1}}{2\Delta \eta} - \frac{\psi_{i-1,j+1}^{k+1} - \psi_{i-1,j-1}^{k+1}}{2\Delta \eta} \right) 2 \frac{1}{L} \left(-r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) = r_j \zeta_{i,j}, \\ \psi_{i,j+1}^{k+1} \left(\frac{\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)^2}{\Delta \eta^2} - \frac{\left(r \frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} \right) + \frac{1}{r} \frac{1}{f(x)}}{2\Delta \eta} \right) + \end{aligned} \tag{24}$$

BUILDING

$$\psi_{i,j-1}^{k+1} \left(\frac{((\frac{1}{f(x)})^2 + (r \frac{f'(x)}{f^2(x)})^2)}{\Delta \eta^2} + \frac{(r \frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} + \frac{1}{r f(x)})}{2\Delta \eta} \right) -$$

$$\psi_{i,j}^{k+1} \left(\frac{2((\frac{1}{f(x)})^2 + (r \frac{f'(x)}{f^2(x)})^2)}{\Delta \eta^2} + \frac{2 \frac{1}{L^2}}{\Delta \xi^2} \right) = r_j \zeta_{i,j} - \frac{\psi_{i+1,j}^k + \psi_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta \xi^2} \frac{1}{L^2} -$$

$$2 \frac{1}{L} \left(-r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) \frac{1}{2\Delta \xi} \left(\frac{\psi_{i+1,j+1}^k - \psi_{i+1,j-1}^{k+1}}{2\Delta \eta} - \frac{\psi_{i-1,j+1}^{k+1} - \psi_{i-1,j-1}^{k+1}}{2\Delta \eta} \right).$$



По каждому из неявных направлений разностная схема по-прежнему является линейной.

Рис.2 Сеточный шаблон неявной схемы.

$$\psi_{i,j+1}^{k+1} \left(\frac{((\frac{1}{f(x)})^2 + (r \frac{f'(x)}{f^2(x)})^2)}{\Delta \eta^2} - \frac{(r \frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} + \frac{1}{r f(x)})}{2\Delta \eta} \right) +$$

$$\psi_{i,j-1}^{k+1} \left(\frac{((\frac{1}{f(x)})^2 + (r \frac{f'(x)}{f^2(x)})^2)}{\Delta \eta^2} + \frac{(r \frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} + \frac{1}{r f(x)})}{2\Delta \eta} \right) -$$

$$\psi_{i,j}^{k+1} \left(\frac{2((\frac{1}{f(x)})^2 + (r \frac{f'(x)}{f^2(x)})^2)}{\Delta \eta^2} + \frac{2 \frac{1}{L^2}}{\Delta \xi^2} \right) = r_j \zeta_{i,j} - \frac{\psi_{i+1,j}^k + \psi_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta \xi^2} \frac{1}{L^2} -$$

$$2 \frac{1}{L} \left(-r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) \frac{1}{2\Delta \xi} \left(\frac{\psi_{i+1,j+1}^k - \psi_{i+1,j-1}^{k+1}}{2\Delta \eta} - \frac{\psi_{i-1,j+1}^{k+1} - \psi_{i-1,j-1}^{k+1}}{2\Delta \eta} \right). \tag{25}$$

Для решения полученной системы линейных алгебраических уравнений используется метод прогонки:

$$\psi_{i,j+1}^{k+1} = \alpha_j \psi_{i,j}^{k+1} + \beta_j \tag{26}$$

$$\psi_{i,j}^{k+1} \alpha_j \left(\frac{((\frac{1}{f(x)})^2 + (r \frac{f'(x)}{f^2(x)})^2)}{\Delta \eta^2} - \frac{(r \frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} + \frac{1}{r f(x)})}{2\Delta \eta} \right) +$$

$$\beta_j \left(\frac{((\frac{1}{f(x)})^2 + (r \frac{f'(x)}{f^2(x)})^2)}{\Delta \eta^2} - \frac{(r \frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} + \frac{1}{r f(x)})}{2\Delta \eta} \right) +$$

$$\psi_{i,j-1}^{k+1} \left(\frac{((\frac{1}{f(x)})^2 + (r \frac{f'(x)}{f^2(x)})^2)}{\Delta \eta^2} + \frac{(r \frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} + \frac{1}{r f(x)})}{2\Delta \eta} \right) -$$

BUILDING

$$\begin{aligned}
 & \psi_{i,j}^{k+1} \left(\frac{2 \left(\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)^2 \right)}{\Delta \eta^2} + \frac{2}{\Delta \xi^2} \right) = r_j \zeta_{i,j} - \frac{\psi_{i+1,j}^k + \psi_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta \xi^2} \frac{1}{L^2} - \\
 & \quad 2 \frac{1}{L} \left(-r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) \frac{1}{2\Delta \xi} \left(\frac{\psi_{i+1,j+1}^k - \psi_{i+1,j-1}^{k+1}}{2\Delta \eta} - \frac{\psi_{i-1,j+1}^{k+1} - \psi_{i-1,j-1}^k}{2\Delta \eta} \right). \\
 & \psi_{i,j}^{k+1} (\alpha_j \left(\frac{\left(\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)^2 \right)}{\Delta \eta^2} - \frac{\left(r \left(\frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} \right) + \frac{1}{r} \frac{1}{f(x)} \right)}{2\Delta \eta} \right) - \\
 & \quad \left(\frac{2 \left(\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)^2 \right)}{\Delta \eta^2} + \frac{2}{\Delta \xi^2} \right) + \beta_j \left(\frac{\left(\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)^2 \right)}{\Delta \eta^2} - \right. \\
 & \quad \left. \frac{\left(r \left(\frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} \right) + \frac{1}{r} \frac{1}{f(x)} \right)}{2\Delta \eta} \right) + \\
 & \psi_{i,j-1}^{k+1} \left(\frac{\left(\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)^2 \right)}{\Delta \eta^2} + \frac{\left(r \left(\frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} \right) + \frac{1}{r} \frac{1}{f(x)} \right)}{2\Delta \eta} \right) = \\
 & r_j \zeta_{i,j} - \frac{\psi_{i+1,j}^k + \psi_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta \xi^2} \frac{1}{L^2} - 2 \frac{1}{L} \left(-r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) \frac{1}{2\Delta \xi} \left(\frac{\psi_{i+1,j+1}^k - \psi_{i+1,j-1}^{k+1}}{2\Delta \eta} - \frac{\psi_{i-1,j+1}^{k+1} - \psi_{i-1,j-1}^k}{2\Delta \eta} \right). \tag{27}
 \end{aligned}$$

Уравнения (26) изменяются в таком виде:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\left(\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)^2 \right)}{\Delta \eta^2} + \frac{\left(r \left(\frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} \right) + \frac{1}{r} \frac{1}{f(x)} \right)}{2\Delta \eta} \\
 \psi_{i,j}^{k+1} = & \frac{\left(\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)^2 \right)}{\Delta \eta^2} + \frac{\left(r \left(\frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} \right) + \frac{1}{r} \frac{1}{f(x)} \right)}{2\Delta \eta} \psi_{i,j+1}^{k+1} + \\
 & \left(\frac{2 \left(\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)^2 \right)}{\Delta \eta^2} + \frac{2}{\Delta \xi^2} \right) - \alpha_j \left(\frac{\left(\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)^2 \right)}{\Delta \eta^2} - \frac{\left(r \left(\frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} \right) + \frac{1}{r} \frac{1}{f(x)} \right)}{2\Delta \eta} \right) \\
 & r_j \zeta_{i,j} - \frac{1}{L^2} \frac{\psi_{i+1,j}^k + \psi_{i-1,j}^{k+1}}{\Delta \xi^2} - 2 \frac{1}{L} \left(-r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right) \frac{1}{2\Delta \xi} \left(\frac{\psi_{i+1,j+1}^k - \psi_{i+1,j-1}^{k+1}}{2\Delta \eta} - \frac{\psi_{i-1,j+1}^{k+1} - \psi_{i-1,j-1}^k}{2\Delta \eta} \right) - \beta_j \left(\frac{\left(\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)^2 \right)}{\Delta \eta^2} - \frac{\left(r \left(\frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} \right) + \frac{1}{r} \frac{1}{f(x)} \right)}{2\Delta \eta} \right) \\
 & \left(\alpha_j \left(\frac{\left(\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)^2 \right)}{\Delta \eta^2} - \frac{\left(r \left(\frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} \right) + \frac{1}{r} \frac{1}{f(x)} \right)}{2\Delta \eta} \right) - \left(\frac{2 \left(\left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)} \right)^2 \right)}{\Delta \eta^2} + \frac{2}{\Delta \xi^2} \right) \right)
 \end{aligned}$$

Значения прогоночных коэффициентов находятся по рекуррентным формулам, которые в общем виде (индекс j есть индекс неявного направления) можно записать так:

BUILDING

$$\begin{aligned}
 \alpha_{j-1} &= \frac{\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)^2}{\Delta \eta^2} + \frac{\left(r \frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} + \frac{1}{r f(x)}\right)}{2\Delta \eta}}{2\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)^2} - \frac{2\frac{1}{L^2}}{\Delta \xi^2} - \alpha_j \left(\frac{\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)^2}{\Delta \eta^2} - \frac{\left(r \frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} + \frac{1}{r f(x)}\right)}{2\Delta \eta}\right)}, \\
 \beta_{j-1} &= \frac{r_j \zeta_{i,j} - \frac{1}{L^2} \psi_{i+1,j}^k + \psi_{i-1,j}^{k+1} - 2\frac{1}{L} \left(-r \frac{f'(x)}{f^2(x)}\right) \frac{1}{2\Delta \xi} \left(\frac{\psi_{i+1,j+1}^k - \psi_{i+1,j-1}^{k+1}}{2\Delta \eta} - \frac{\psi_{i-1,j+1}^{k+1} - \psi_{i-1,j-1}^k}{2\Delta \eta}\right)}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)^2} - \frac{\left(r \frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} + \frac{1}{r f(x)}\right)}{2\Delta \eta} - \left(\frac{2\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)^2}{\Delta \eta^2} + \frac{2}{\Delta \xi^2}\right)}, \\
 \beta_j &= \frac{\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)^2}{\Delta \eta^2} - \frac{\left(r \frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} + \frac{1}{r f(x)}\right)}{2\Delta \eta}}{\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)^2} - \frac{\left(r \frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} + \frac{1}{r f(x)}\right)}{2\Delta \eta} - \left(\frac{2\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)^2}{\Delta \eta^2} + \frac{2}{\Delta \xi^2}\right)}, \\
 \alpha_j &= \frac{\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)^2}{\Delta \eta^2} - \frac{\left(r \frac{f''(x)f^2(x) - 2(f'(x))^2 f(x)}{f^4(x)} + \frac{1}{r f(x)}\right)}{2\Delta \eta} - \left(\frac{2\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2 + \left(r \frac{f'(x)}{f^2(x)}\right)^2}{\Delta \eta^2} + \frac{2}{\Delta \xi^2}\right)}. \tag{28}
 \end{aligned}$$

Из граничных условий при $j=0$ и $j=Hr$ определяются значения прогоночных коэффициентов. При этом $\alpha(Hr-1) = 0$ и $\beta(Hr-1) = 2$ определяются из соответствующих краевых условий. После этого обратной прогонкой находятся все значения сеточной функции на соответствующих новых временных слоях. При использовании неявных схем на каждом шаге по времени приходится проводить больше вычислений, чем при использовании явных схем, но зато можно проводить расчет с существенно большим шагом по времени, так как они безусловно устойчивы. Однако при использовании слишком большого шага по времени можно получить бессмысленные результаты. Это связано с тем, что при увеличении шага по времени растет погрешность аппроксимации. Уравнение (21) будем решать методом Мак-Кормака (30)-(31). Данный метод широко применяется для решения уравнений газовой динамики. Фактически это один из вариантов двухшагового метода Лакса— Вендроффа, не требующий вычисления значений искомой функции в точках $j+1/2$ и $j-1/2$. Благодаря этому метод Мак-Кормака особенно удобен для решения нелинейных уравнений в частных производных. Применяя явный метод предиктор-корректор к линейному волновому уравнению, получаем следующую разностную схему. Это схема второго порядка точности с погрешностью аппроксимации $O((\Delta t)^2, (\Delta x)^2)$.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \left(V_r \left(\frac{1}{f(x)} \right) - V_x r \frac{f'(x)}{f^2(x)} + \frac{1}{\text{Re } r} \frac{1}{f(x)} \right) + \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \left(V_x \frac{1}{L} - \zeta \left(\frac{V_r}{r} - \frac{1}{\text{Re } r^2} \right) \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2}. \tag{29}$$

Предиктор:

$$\begin{aligned}
 \frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^n}{\Delta t} + \frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j}^n}{\Delta \eta} \left(V_r \left(\frac{1}{f(x)} \right) - V_x r \frac{f'(x)}{f^2(x)} + \frac{1}{\text{Re } r} \frac{1}{f(x)} \right) + \frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i,j}^n}{\Delta \xi} \left(V_x \frac{1}{L} - \right. \\
 \left. \zeta_{i,j}^n \left(\frac{V_r}{r} - \frac{1}{\text{Re } r^2} \right) \right) = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 \left(\frac{\zeta_{i,j+1}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta \eta^2} \right), \\
 \zeta_{i,j}^{n+1} = \zeta_{i,j}^n - \Delta t \left(\frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j}^n}{\Delta \eta} \left(V_r \left(\frac{1}{f(x)} \right) - V_x r \frac{f'(x)}{f^2(x)} + \frac{1}{\text{Re } r} \frac{1}{f(x)} \right) + \frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i,j}^n}{\Delta \xi} \left(V_x \frac{1}{L} - \right. \right. \\
 \left. \left. \zeta_{i,j}^n \left(\frac{V_r}{r} - \frac{1}{\text{Re } r^2} \right) \right) - \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{1}{f(x)} \right)^2 \left(\frac{\zeta_{i,j+1}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta \eta^2} \right) \right). \tag{30}
 \end{aligned}$$

BUILDING

Корректор

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = 0.5(\zeta_{i,j}^n + \bar{\zeta}_{i,j}^{n+1} - \Delta t((V_r(\frac{1}{f(x)}) - V_x r \frac{f'(x)}{f^2(x)} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{r} \frac{1}{f(x)}) \frac{\zeta_{i,j}^n - \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta \eta} + (V_x \frac{1}{L}) \frac{\zeta_{i,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n}{\Delta \xi} - \zeta_{i,j}^n (\frac{V_r}{r} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{r^2}) - \frac{1}{\text{Re}} ((\frac{1}{f(x)})^2 (\frac{\zeta_{i,j+1}^n - 2\zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta \eta^2}))). \tag{31}$$

Первоначально (предиктор) находится оценка величин на (n+1)-м шаге по времени, а потом (корректор) определяет окончательное значение на (n+1)-м шаге по времени. Отметим, что в предикторе производная аппроксимируется разностями вперед, а в корректоре-разностями назад. [2] Большинство уравнений в частных производных, встречающихся в гидродинамике и теплопередаче, содержат лишь частные производные первого и второго порядков, при этом для аппроксимации производных стараются использовать не более трех узлов разностной сетки. Поэтому на равномерной сетке чаще всего применяют приведенные ниже конечно-разностные аппроксимации первых производных, остальное уравнение (11) будем решать центральными разностями, это схема второй порядки точности с погрешностью аппроксимации $O((\Delta t)^2, (\Delta x)^2)$.

Решим уравнения (11) $V_{xi,j} = \frac{1}{r_j f(x)} \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta \eta}, \tag{32}$

$$V_{ri,j} = -\frac{1}{r_j} (\frac{1}{L} \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta \xi} - r_j \frac{f'(x)}{f^2(x)} \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta \eta}).$$

4. Обсуждение результатов.

Результаты численного расчета продемонстрированы на рис. 3 показаны эпюры скорости на различном участке трубы.

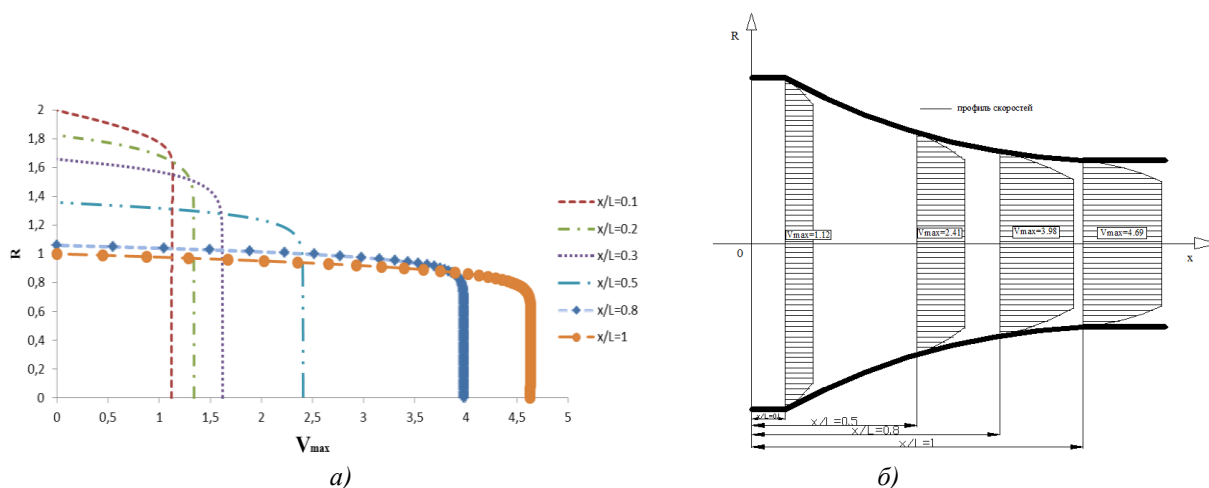


Рис.3.а-Эпюра скорости(двумерный численный) на Re=500. б-Профиль скорости на различном участке трубы.

На рис. 3 видно как увеличивается скорость течения жидкости на криволинейно плавно сужающемся участке трубы. Скорость жидкости увеличивается так как, уменьшается радиус трубы. Таким образом, в работе показана методика численного исследования на сужающемся участке трубы на основе известных гидродинамических уравнений. Разработанная численная программа является важным инструментом при проектировании различных сужающемся участке трубы.

Литература

[1]. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа: учебник для вузов. 6-е изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1987. 840 с.

BUILDING

- [2]. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. Т. 2: Пер. с англ. — М.: Мир, 1990. — 728—392 с.
- [3]. U., K.N. Ghia and C.T. Shin. High-Resolutions for incompressible flow using the Navier-
- [4]. Stokes equations and a multigrid method // J. Comp. Phys. 1982. V. 48. P. 387–411.
- [5]. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. // М., «Наука», 1981, с. 287.