Scientific Bulletin of Namangan State University

Volume 1 | Issue 6 Article 1

9-10-2019

IMPROVEMENT OF ONE RESULT FOR THE POTTS MODEL ON THE CALEY TREE

Rustamjon Maxmudovich Xakimov
NamSU assistant professor (DSc) at the Department of Math

Ikromjon Qaxramon o`g`li O`ktamaliyev
NamSU student at the Department of Math

IMPROVEMENT OF ONE RESULT FOR THE POTTS MODEL ON THE CALEY TREE

Cover Page Footnote

???????

Erratum

???????

УЛУЧШЕНИЕ ОДНОГО РЕЗУЛЬТАТА ДЛЯ МОДЕЛИ ПОТТСА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Хакимов Рустамжон Махмудович, Уктамалиев Икромжон Кахрамон угли
доцент кафедры Математика НамГУ (DSc) и студент

Аннотация. *В данной статье изучается модель Поттса на дереве Кэли. Улучшен один из ранее изветсных результатов,т.е. доказано, что на одном из инвариантных множеств для модели Поттса с нулевым внешним полем существуют ровно две периодические (не трансляционно-инвариантные) меры Гиббса.*

Ключевые слова*: дерево Кэли, конфигурация, модель Поттса, мера Гиббса, периодические меры, трансляционно-инвариантные меры.*

IMPROVEMENT OF ONE RESULT FOR THE POTTS MODEL ON THE CALEY TREE

Xakimov Rustamjon Maxmudovich, O`ktamaliyev Ikromjon Qaxramon o`g`li
NamSU assistant professor (DSc) at the Department of Math and student

Abstract. *We study the Potts model on the Cayley tree. We improved one of the previously known results. We proved that on one of the invariant sets for the Potts model with a zero external field there exist exactly two periodic (not translation-invariant) Gibbs measures.*

Keywords: *Cayley tree, configuration, Potts model, Gibbs measure, periodic measures, translation-invariant measures.*

KELI DARAXTIDA POTTS MODELI UCHUN OLINGAN BIR NATIJANING TAKOMILLANISHI

Xakimov Rustamjon Maxmudovich, O`ktamaliyev Ikromjon Qaxramon o`g`li
NamDU Matematika kafedrasi dotsenti (DSc) va talabasi

Annotatsiya: *Mazkur ishda Keli daraxtida Potts modeli o`rganilgan. Bunda avval olingan natijalarning biri takomillashgan, yani tashqi maydonga ega bo`lmagan Potts modeli uchun invariant to`plamlarning birida faqat ikkita davriy (tranlytsion-invariant bo`lmagan) Gibbs o`lchovlari mavjudligi isbotlangan.*

Kalit so’zlar: *Keli daraxti, konfiguratsiya, Potts modeli, Gibbs o`lchovi, davriy Gibbs o’lchovlari, translyatsion-invariant Gibbs o’lchovlari.*

Основной проблемой данного гамильтониана является описание всех отвечающих ему мер Гиббса. Определение меры Гиббса и других понятий, связанных с теорией мер Гиббса, можно найти, например, в работах [1]-[4].

Дерево Кэли $\Im^k$ порядка $k \geq 1-$бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер. Пусть $\Im^k = (V, L, i)$, где $V-$ есть множество вершин $\Im^k$, $L-$множество его ребер, и $i-$функция инцидентности, сопоставляющая каждому ребру $l \in L$ его концевые точки $x, y \in V$. Если

$i(l)=\{x,y\}$, то x и y называются *ближайшими соседями вершины* и обозначается $l=\langle x,y\rangle$. Расстояние $d(x,y),\ x,y\in V$ на дереве Кэли определяется формулой

$$d(x,y)=\min\{d\,|\,\exists x=x_0,x_1,\ldots,x_{d-1},x_d=y\in V\ \text{ такие, что } \langle x_0,x_1\rangle,\ldots,\langle x_{d-1},x_d\rangle\}.$$

Для фиксированого $x^0\in V$ обозначим $W_n=\{x\in V\,|\,d(x,x^0)=n\}$,

$$V_n=\{x\in V\,|\,d(x,x^0)\le n\},\ L_n=\{l=\langle x,y\rangle\in L\,|\,x,y\in V_n\}.$$

Мы рассмотрим модель, где спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi=\{1,2,\ldots,q\}$, $q\ge 2$ и расположены на вершинах дерева. Тогда *конфигурация* σ на V определяется как функция $x\in V\to\sigma(x)\in\Phi$; множество всех конфигураций совпадает с $\Omega=\Phi^V$.

Гамильтониан модели Поттса определяется

$$H(\sigma)=-J\sum_{\langle x,y\rangle\in L}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}-\alpha\sum_{x\in V}\delta_{1\sigma(x)},\qquad (1)$$

где $J\in R$, $\alpha\in R-$внешнее поле, $\langle x,y\rangle$ ближайшие соседи и $\delta_{ij}-$символ Кронекера:

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & \text{если } i\ne j\\ 1, & \text{если } i=j.\end{cases}$$

Определим конечномерное распределение вероятностной меры μ_n в обьеме V_n как

$$\mu_n(\sigma_n)=Z_n^{-1}\exp\left\{-\beta H_n(\sigma_n)+\sum_{x\in W_n}h_{\sigma(x),x}\right\},\qquad (2)$$

где $\beta=\dfrac{1}{T}$, $T>0-$температура, $Z_n^{-1}-$нормирующий множитель и $\{h_x=(h_{1,x},\ldots,h_{q,x})\in R^q,\ \ x\in V\}$ совокупность векторов и

$$H_n(\sigma_n)=-J\sum_{\langle x,y\rangle\in L_n}\delta_{\sigma(x)\sigma(y)}-\alpha\sum_{x\in V_n}\delta_{1\sigma(x)}.$$

Говорят, что последовательность вероятностных распределений (2) согласованная, если для всех $n\ge 1$ и $\sigma_{n-1}\in\Phi^{V_{n-1}}$:

$$\sum_{\omega_n\in\Phi^{W_n}}\mu_n(\sigma_{n-1}\vee\omega_n)=\mu_{n-1}(\sigma_{n-1}).$$

Здесь $\sigma_{n-1}\vee\omega_n$ есть объединение конфигураций. В этом случае, существует единственная мера μ на Φ^V такая, что для всех n и $\sigma_n\in\Phi^{V_n}$

$$\mu(\{\sigma|_{V_n}=\sigma_n\})=\mu_n(\sigma_n).$$

Такая мера называется расщепленной гиббсовской мерой, соответствующей гамильтониану (1) и векторзначной функции $h_x,\ x\in V$.

Следующее утверждение описывает условие на h_x, обеспечивающее согласованность $\mu_n(\sigma_n)$.

Теорема 1.[5] Последовательность вероятностных распределений $\mu_n(\sigma_n)$, $n=1,2,\dots$ в (2) является согласованной тогда и только тогда, когда для любого $x \in V$ имеет место следующее уравнение:

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta, \alpha), \tag{3}$$

где $F: h=(h_1,\dots,h_{q-1}) \in R^{q-1} \to F(h,\theta,\alpha)=(F_1,\dots,F_{q-1}) \in R^{q-1}$ определяется как:

$$F_i = \alpha\beta\delta_{1i} + \ln\frac{(\theta-1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}},$$

и $\theta = \exp(J\beta)$, $S(x)-$ множество прямых потомков точки x.

Известно, что существует взаимнооднозначное соответствие между множеством V вершин дерева Кэли порядка $k \ge 1$ и группой G_k свободных произведений $k+1$ циклической группы второго порядка с образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$.

Пусть $G_k^* -$подгруппа группы G_k.

Определение 1. Совокупность величин $h=\{h_x, x \in G_k\}$ называется G_k^*-периодической, если $h_{yx}=h_x$ для любых $x \in G_k$, $y \in G_k^*$.

G_k-периодические совокупности называются трансляционно-инвариантными.

Определение 2. Мера μ называется G_k^*-периодической, если она соответствует G_k^*-периодической совокупности величин h.

Следуюшая теорема характеризует периодические меры Гиббса.

Теорема 2.[6] Пусть $K-$нормальный делитель конечного индекса в G_k. Тогда для модели Поттса все K-периодические меры Гиббса являются либо $G_k^{(2)}$-периодическими, либо трансляционно-инвариантными, где $G_k^{(2)}$ есть подгруппа, состоящая из слов четной длины.

Рассмотрим случай $q=3$, т.е. $\sigma: V \to \Phi = \{1,2,3\}$. В силу Теоремы 2 имеются только $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса, которые соответствуют совокупности векторов $h=\{h_x \in R^{q-1}: x \in G_k\}$ вида

$$h_x = \begin{cases} h^1, & \text{если } |x| - \text{четно} \\ h^2, & \text{если } |x| - \text{нечетно.} \end{cases}$$

Здесь $h^1=(h_1^1,h_2^1)$, $h^2=(h_1^2,h_2^2)$. Тогда в силу (3) имеем:

$$\begin{cases} h^1 = kF(h^2,\theta) \\ h^2 = kF(h^1,\theta) \end{cases}$$

В работе [7] на инвариантном множестве $I_2 = \{z \in R^4 : z_1 = z_2,\ z_3 = z_4\}$ изучалась следующая система уравнений:

$$\begin{cases} z_1 = \left(\dfrac{\theta z_3 + z_4 + 1}{z_3 + z_4 + \theta}\right)^k, & z_2 = \left(\dfrac{\theta z_4 + z_3 + 1}{z_3 + z_4 + \theta}\right)^k, \\ z_3 = \left(\dfrac{\theta z_1 + z_2 + 1}{z_1 + z_2 + \theta}\right)^k, & z_4 = \left(\dfrac{\theta z_2 + z_1 + 1}{z_1 + z_2 + \theta}\right)^k \end{cases} \tag{4}$$

и была доказана следующая теорема.

Теорема 3. [7] Пусть $k = 3,\ q = 3$ и $J < 0$. Тогда для модели Поттса при $0 < \theta < \theta_{cr} = \dfrac{1}{4}$ существуют не менее двух $G_k^{(2)}$-периодических (не трансляционно-инвариантных) мер Гиббса, соответствующих совокупности величин из $I_2 = \{z \in R^4 : z_1 = z_2,\ z_3 = z_4\}$.

Следующая теорема улучшает результат теоремы 3.

Теорема 4. Пусть $k = 3,\ q = 3$ и $J < 0$. Тогда для модели Поттса при $0 < \theta < \theta_{cr} = \dfrac{1}{4}$ существуют ровно две $G_k^{(2)}$-периодические (не трансляционно-инвариантные) меры Гиббса, соответствующие совокупности величин из I_2.

Доказательство. При $J < 0$ $(0 < \theta < 1)$ и $\alpha = 0$ покажем, что система уравнений (4) имеет неединственое решение (z_1, z_2, z_3, z_4) с $z_1 = z_2$, $z_3 = z_4$. При этих условиях из (4) имеем ($\sqrt[3]{z_1} = x,\ \sqrt[3]{z_3} = z$)

$$\begin{cases} x = f(z), \\ z = f(x), \end{cases} \tag{5}$$

где

$$f(x) = \frac{(\theta+1)x^3 + 1}{2x^3 + \theta}.$$

Из (5) получим

$$x = f(f(x)). \tag{6}$$

Ясно, что корни уравнения $x = f(x)$ также являются корнями уравнения (6). Поэтому, чтобы найти корни (6), отличных от корней уравнения $x = f(x)$, рассмотрим уравнение

$$\frac{f(f(x)) - x}{f(x) - x} = 0.$$

Разделив числитель на знаменатель левой части этого уравнения, получим уравнение

$$(\theta^3 + 3\theta^2 + 7\theta + 1)x^6 + (2\theta^2 + 2\theta - 4)x^5 + (\theta^3 + 2\theta^2 - \theta - 2)x^4 +$$
$$+(6\theta^2 + 4\theta + 2)x^3 + (\theta^3 + \theta^2 - 2\theta)x^2 + (\theta^2 + \theta - 2)x + \theta^3 + \theta + 1 = 0. \tag{7}$$

Обозначим левую часть (7) через $F(x,\theta)$. Тогда $F(0,\theta)=\theta^3+\theta+1>0$ при любых $\theta>0$ и $F(1,\theta)=4\theta^3+15\theta^2+12\theta-4=4(\theta+2)^2(\theta-\frac{1}{4})<0$ при $0<\theta<\frac{1}{4}$. Отсюда следует, что график функции $F(x,\theta)$ пересекает ось Ox не менее дважды при $0<\theta<\frac{1}{4}$, и так как $F(x,\frac{1}{4})=\frac{1}{64}(x-1)^2(189x^4+162x^3+54x+81)$, то график касается оси Ox при $\theta=\frac{1}{4}$ в точке $x=1$. Докажем, что функция $F(x,\theta)>0$ при $\frac{1}{4}<\theta<1$. Рассмотрим функцию $F(x,\theta)$ относительно переменной θ

$$F(x,\theta)=(x^6+x^4+x^2+1)\theta^3+(3x^6+2x^5+2x^4+6x^3+x^2+x)\theta^2+$$
$$+(7x^6+2x^5-x^4+4x^3-2x^2+x+1)\theta+x^6-4x^5-2x^4+2x^3-2x+1.$$

Производная от этой функции по переменной θ имеет вид

$$F'_\theta(x,\theta)=3(x^6+x^4+x^2+1)\theta^2+2(3x^6+2x^5+2x^4+6x^3+x^2+x)\theta+$$
$$+7x^6+2x^5-x^4+4x^3-2x^2+x+1$$

и положительная при $\theta>0,\ x>0$, так как

$$7x^6+2x^5-x^4+4x^3-2x^2+x+1=7x^6+x^5+x^3(x^2-x+1)+2x^3+x(x-1)^2+1>0.$$

Значит, функция $F(x,\theta)$ возрастает при $x>0$ и $\frac{1}{4}<\theta<1$. Кроме того,

$$F(x,\frac{1}{4})\ge 0,\ \ F'_\theta(x,\frac{1}{4})>0,\ \ F'_\theta(x,1)>0.$$

Отсюда получим, что $F(x,\theta)>0$ при $\frac{1}{4}<\theta<1$. Следовательно, уравнение (7) имеет не менее двух положительных корней.

Решим кубическое уравнение $F(x,\theta)=0$ относительно θ с помощью метода Кардано и получим решение вида $\theta=g(x)$, где $g(x)$ имеет громоздкий вид.

Анализируя функцию $g(x)$, получим, что каждому значению θ при $0<\theta<0.25$ соответствует ровно два значения x (Рис.1). Теорема доказана.

Замечание. При $\theta=\frac{1}{4}$ в случае $k=3,\ q=3$ получим, что $x=1\ (z=1)$, которое соответствует трансляционно-инвариантной мере Гиббса.

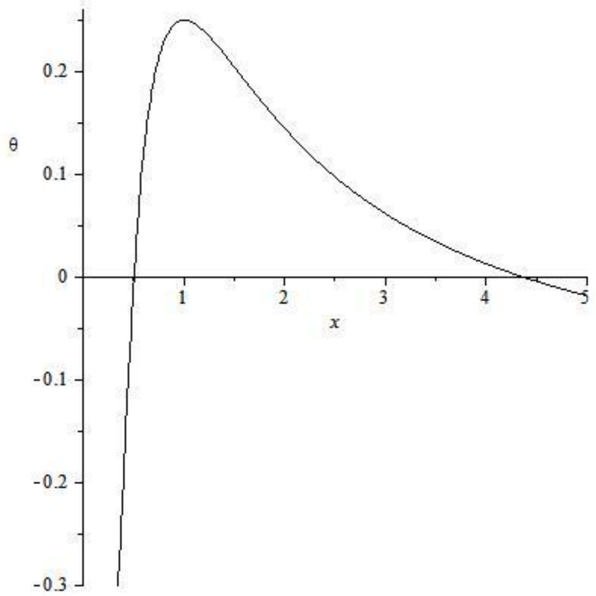

Рис.1. График функции $g(x)$ **при** $0<\theta<0.25$.

References:

1. Georgi X.-O. Gibbsovskie meri i fazovie perexodi. Moskva. "Mir" 1992.
2. Preston C. J. Gibbs States on Countable Sets, Cambridge Tracts Math., 68, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.
3. Sinay Ya. G. Teoriya fazovix perexodov. Strogie rezultati, Nauka, M., 1980.
4. Rozikov U.A. Gibbs measures on Cayley trees. World Scientific.-2013.
5. Ganixodjaev N.N., Rozikov U.A. Opisanie periodicheskix kraynix gibbsovskix mer nekotorix modeley na dereve Keli. // TMF, **111**: 1 (1997), 109–117.
6. Rozikov U.A., Xakimov R.M. Periodicheskie meri Gibbsa dlya modeli Pottsa na dereve Keli. // TMF, 175: 2 (2013), 300–312.
7. Xakimov R.M. O sushestvovanii periodicheskix mer Gibbsa dlya modeli Pottsa na dereve Keli. // Uzb. mat. jurnal. –Tashkent, 2014. -№ 3. -C. 134-142.