Scientific-technical journal

Volume 2 | Issue 1 Article 3

3-7-2019

SOLUTION OF THE GOURSAT PROBLEM USING A TRANSFORMATION OPERATOR FOR A THIRD-ORDER PSEUDOPARABOLIC EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENTS

G I. Alimjonova
Fergana Polytechnic Institute

FUNDAMENTAL SCIENCES

SOLUTION OF THE GOURSAT PROBLEM USING A TRANSFORMATION OPERATOR FOR A THIRD-ORDER PSEUDOPARABOLIC EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENTS

G.I.Alimjonova

Fergana Polytechnic Institute

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГУРСА С ПОМОЩЮ ОПЕРАТОРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ

Г.И. Алимжонова

Ферганский политехнический институт

СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТЛИ УЧИНЧИ ТАРТИБЛИ ПСЕВДОПАРАБОЛИК ТЕНГЛАМА УЧУН ГУРСА МАСАЛАСИНИ АЛМАШТИРИШ ОПЕРАТОРИ ЁРДАМИДА ЕЧИШ

Г.И. Алимжонова

Фарғона политехника институти

Abstract. *This paper discusses classical problems for degenerate and differential equations with singular coefficients. The solution to the Goursat problem for third-order pseudoparabolic equations with singular coefficients is shown using the transformation operator.*

Key words: differential equation, classic task, singular coefficient, Goursat's task, conversion operator.

Аннотация. *В настоящей работе обсуждаются классические задачи для вырождённых и дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами. Показано решение задачи Гурса для псевдопараболических уравнений третьего порядка с сингулярными коэффициентами с помощью оператора преобразования.*

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, классическая задача, сингулярный коэффициент, задача Гурса, оператор преобразования.

Аннотация. *Ушбу мақолада бузиладиган ва сингуляр коэффициентли дифференциал тенгаламалар учун классик масалаларни қўйилишида кичик ҳадлардаги коэффициентлар кўриб чиқилган. Сингуляр коэффициентли учинчи тартибли псевдопараболик тенгламалар учун Гурса масаласи алмаштириш оператори ёрдамида ечиб кўрсатилаган.*

Таянч сўзлар: дифференциал тенглама, классик масала, сингуляр коэффициент, Гурса масаласи, алмаштириш оператори.

Маълумки бузиладиган ва сингуляр коэффициентли дифференциал тенгламалар учун баъзи классик масалалар нокоррект бўлиб қолмоқда. Масаланинг қўйилишига кичик ҳадлардаги коэффициентлар муҳим таъсир этмоқда. Бундай масалалар сингуляр коэффициентли юқори тартибли ноклассик тенгламалар учун деярли ўрганилмаган.

Ушбу иш қуйидаги тенглама учун Гурса масаласини аналогининг классик ечимини топишга бағишланган

$$L_b^a(u) \equiv \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a}{x}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + bu = f\left(x, y\right) \qquad (1)$$

бу ерда $f\left(x, y\right)$ берилган функция, $a, b \in R$, жумладан $0 < a < 1$.

G_α масаласи. $\Omega=\{(x,y):0<x<l,\ 0<y<h\}$ соҳада (1) тенгламанинг қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$ ечими топилсин:

$$u(x,0)=\psi(x),\qquad 0\le x\le l, \tag{2}$$

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\qquad 0\le y\le h, \tag{3}$$

$$\lim_{x\to 0}x^a u_x(x,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \tag{4}$$

бу ерда $\psi(x),\varphi_1(y),\varphi_2(y)$–берилган силлиқ функциялар, $\varphi_1(0)=\psi(0),\ \varphi_2(0)=0$ келишув шартлари бажарилиши талаб этилади.

Бундай масала олдин ўрганилмаган. Умумий кўринишдаги чизиқли юқори тартибли ҳосиласи u_{xxy} бўлган силлиқ коэффициентли тенгламлар учун масалалар А.П.Солдатов, М.Х.Шхануков, В.И.Жегалов, А.Н.Миронов, Е.А.Уткина, A.Maher, Т.Д.Джураев, О.С.Зикиров ва бошқалар томонидан ўрганилган.

Қўйилган Гурса масаласини ечиш учун қуйидаги каср тартибли Эрдей–Кобер [1] операторидан фойдаланамиз:

$$I_{\eta,\alpha}^{x}f(x)=\frac{2x^{-2(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x\left(x^2-s^2\right)^{\alpha-1}s^{2\eta+1}f(s)ds, \tag{5}$$

бу ерда $\alpha>0,\ \ \eta\ge-\frac{1}{2},\ \Gamma(z)$–Эйлернинг Гамма функцияси [2].

Маълумки [1], (5) оператор учун, $\alpha>0,\ \eta\ge-\left(1/2\right)\ \ f(x)\in C^2(0,b),\quad b>0,$ $\lim\limits_{x\to 0}x^{2\eta+1}f'(x)=0$ шартлар бажарилганда, ушбу тенглик ўринли бўлади

$$B_{\eta+\alpha}^{x}I_{\eta,\alpha}^{x}f(x)=I_{\eta,\alpha}^{x}B_{\eta}^{x}f(x)$$

бу ерда – Бессел оператори.

Эрдейи-Кобер операторининг ушбу хоссасини қуйидаги ёрдамчи масалани ечишга тадбиқ этамиз.

G_α масалани ечиш учун қуйидаги ёрдамчи масалани тадқиқ этамиз. G_0 масала. Ω сохада (1) тенгламани (2), (3) ва

$$u_x(0,y)=0 \tag{6}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

G_0 масалани ечимини қуйидаги кўринишда излаймиз

$$u(x,y)=I_{-1/2,\alpha}^{(x)}v(x,y), \tag{7}$$

бу ерда $\alpha\in R,\ \ \alpha>0,\ \ v(x,y)$– номаълум силлиқ функция.

(7) тенгликни (2) ва (3) шартларга қўйиб номаълум $v(x,y)$ функцияга нисбатан қуйидаги масалага келамиз:

$$L_0(\upsilon)\equiv\upsilon_{xxy}+c\upsilon=F(x,y),\qquad (x,y)\in\Omega, \tag{8}$$

$$\upsilon(x,0)=\psi_1(x),\qquad 0\le x\le l, \tag{9}$$

$$\upsilon(0,y)=\gamma_0\varphi_1(y),\qquad 0\le y\le h, \tag{10}$$

$$\upsilon_x(0,y)=0,\qquad 0\le y\le h, \tag{11}$$

$$F(x,y)=\left(I_{-1/2,\alpha}^{(x)}\right)^{-1} f(x,y) \quad \psi_1(x)=\left(I_{-1/2,\alpha}^{(x)}\right)^{-1}\psi(x)$$

{(8)–(11)} масалани ечими [3] мақолада ошкор кўринишда топганмиз. Ушбу холда бу ечим қуйидаги кўринишга эга:

$$\upsilon(x,y)=\psi_1(x)+\gamma_0\varphi_1(y)-\psi_1(0)_0F_2\left(1,\frac{1}{2},-\frac{s}{4}x^2y\right)+$$

$$+cy\int_0^x\left[{}_0F_2\left(2,\frac{3}{2};-\frac{s}{4}y(\xi-x)^2(\xi-x)\right)\right]\psi_1(\xi)d\xi-$$

$$-\gamma_0\frac{c}{2}x^2\int_0^y{}_0F_2\left(2;\frac{3}{2};-\frac{c}{4}x^2(\eta-y)\right)\psi_1(\eta)d\eta-$$

$$-\int_0^x\int_0^y R(x,y;\xi,\eta)F(\xi,\eta)d\xi d\eta \qquad (12)$$

$\upsilon(x,y)$ функциянинг (12) ифодасини (7) тенгликка қўямиз ва бир қанча ҳисоб китобларни бажарганимиздан сўнг G_0 масаланинг ечими қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$u_1(x,y)=\psi(x)+\varphi_1(y)-\psi(0)\,{}_0F_2\left(1,\alpha+\frac{1}{2};-\frac{c}{4}yx^2\right)+cy\int_0^x\psi(s)K_1(x,y,s)ds+$$

$$+\frac{c}{4}x^2\int_0^y\varphi_1(\eta)\,{}_0F_2\left(2,\alpha+\frac{1}{2};\frac{c}{4}x^2(\eta-y)\right)d\eta.$$

Бу ерда

$$K_1(x,y,s)=\left(\frac{s}{x}\right)^{\alpha}(x-s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\omega^n}{(2)_n\left(\frac{3}{2}\right)_n n!}\,{}_2F_1\left(\alpha,1-\alpha,\frac{3}{2}+n;\sigma\right)=$$

$$=\left(\frac{s}{x}\right)^{\alpha}(x-s)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\alpha_m)(1-\alpha)_m}{\left(\frac{3}{2}\right)_m m!}\sigma^m\,{}_0F_2\left(\frac{3}{2}+m,2;\omega\right)$$

$$\omega=-\frac{c}{4}y(x-s)^2,\ \sigma=-\frac{(x-s)^2}{4xs}.$$

Энди G_α масалани ечими учун (1) тенгламанинг қуйидаги хоссасидан фойдаланамиз: агар $u_1=u_1(x,y;1-\alpha)$ функция $L_{1-\alpha}(u_1)=0$ тенгламанинг $u_1(x,0)=\psi(x)$, $u_1(0,y)=\varphi_1(y)$ ва $u_{1x}(0,y)=0$ шартларини қаноатлантирувчи ечими бўлсин, у ҳолда

$$u_2(x,y)=x^{1-2\alpha}u_1(x,y,1-\alpha) \qquad (13)$$

функция $L_2(u_2)=0$ тенгламани $u_2(0,y)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}x^{2\alpha}u_{2x}(x,y)=(1-2\alpha)\varphi_1(y)$ шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлади.

Бундан ташқари $K_1\left(x,y,s;1-\alpha\right)=\left(\dfrac{s}{x}\right)^{1-2\alpha}K_1\left(x,y,s;\alpha\right)$ эканлигини ҳисобга олсак ва $\left(1-2\alpha\right)\varphi_1\left(y\right)$ ни $\dfrac{\varphi_2\left(y\right)}{1-2\alpha}$ билан алмаштирсак, u_2 нинг қуйидаги умумий кўриниши ҳосил бўлади:

$$u_2\left(x,y\right)=x^{1-2\alpha}\psi\left(x\right)+\frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\varphi_2\left(y\right)-\psi\left(0\right)x^{1-2\alpha}\,{}_0F_2\left(1,\frac{3}{2}-\alpha;-\frac{c}{4}yx^2\right)+$$

$$+cy\int_0^x\psi\left(s\right)s^{1-2\alpha}K_1\left(x,y,s;\alpha\right)ds+\frac{c}{4}\frac{x^{3-2\alpha}}{1-2\alpha}\int_0^y\varphi_2\left(\eta\right){}_0F_2\left(2,\frac{3}{2}-\alpha;\frac{c}{4}x^2\left(\eta-y\right)\right)d\eta$$

Каср тартибли операторни алмаштириш сифатида қўллаб Гурса масаласининг ечим формуласини ошкор кўринишда топилди, бунда қуйидаги теорема ўринли:

Теорема: Агар $0<\alpha<1$ ва $\psi_k\left(x\right)\in C^2\left(0,l\right]\,\varphi_k\left(y\right)\in C^1\left[0,h\right]\left(k=1,2\right)$, у ҳолда

Гурса масаласининг ягона ечими мавжуд бўлади.

Топилган Гурса масласининг ечими формуласи ва Риман функциясидан фойдаланиб (1) тенглама учун бошқа бошланғич чегаравий нолокал масалаларни тадқиқ этиш мумкин.

References:

[1]. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integrali i proizvodnыe drobnogo poryadka i ix prilojeniya. Minsk: Nauka i texnika. 1987. –702s.

[2]. 2. Beytmen G., Erdeyi A. Visshie transtsendentnie funktsii, t.1.2.–M.: Nauka, 1973.–296 s.

[3]. Xojiakbarova G., Uchinchi tartibli psevdoparabolik tenglama uchun Gursa masalasi. FarDU.Ilmiy xabarlar–Nauchniy vestnik.FerGU 3–2016. 11–16b.