Scientific-technical journal

Volume 2 | Issue 1 Article 1

3-7-2019

A PROBLEM OF BITSADZE-SAMARSKI FOR AN INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATION

A K. Urinov
Fergana State University

M M. Abdumannopov
Fergana State University

УДК 517.927

A PROBLEM OF BITSADZE-SAMARSKI FOR AN INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATION

A.K. Urinov, M.M. Abdumannopov

Fergana State University

ЗАДАЧА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

А.К. Уринов, М.М. Абдуманнопов

Ферганский государственный университет

БИР ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН БИЦАДЗЕ-САМАРСКИЙ МАСАЛАСИ

А.К. Ўринов, М.М. Абдуманнопов

Фарғона давлат Университети

In the article, a problem with condition of Bitsadze-Samarski was investigated for an ordinary differential equation which includes integral operator.

Keywords: differential equation, integral operator, boundary-value problem, Bitsadze-Samarski's condition, integral equation.

В этой статье изучена задача Бицадзе-Самарского для одного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, содержаший интегральный оператор.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, краевая задача, интегральное уравнение, условие Бицадзе-Самарского.

Ушбу мақолада интеграл оператор қатнашган иккинчи тартибли интегро-дифференциал тенглама учун Бицадзе-Самарский масаласи ўрганилган.

Таянч сўзлар: дифференциал тенглама, чегаравий масала, Бицадзе-Самарский шарти, интеграл тенглама.

Фараз қилайлик, берилган $a(x), b(x), c(x)$ ва $f(x)$ функциялар $[0,1]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. $(0,1)$ интервалда

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)+c(x)\int_0^x y(t)\bar{J}_s[\lambda(x-t)]dt = f(x), \quad 0<x<1 \quad (1)$$

интегро - дифференциал тенгламани қарайлик, бу ерда λ- берилган ҳақиқий сон, $\bar{J}_s(x)=\Gamma(s+1)(x/2)^{-s}J_s(x)$-Бессел-Клиффорд функцияси, $J_s(x)$ эса Бессел функцияси [1], $s>(-1/2)$.

BS масала. (1) тенгламанинг $[0,1]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$y(0)=\alpha y(\xi)+k_1, \quad y(1)=\beta y(\eta)+k_2, \quad (2)$$

бу ерда α, β, k_1 ва k_2- берилган ҳақиқий сонлар, $\xi, \eta \in (0,1)$.

1-теорема. *Агар* $b(x)<xc(x)\le 0 \quad x\in(0,1)$ *ва* $|\alpha|\le 1, |\beta|\le 1$ *тенгсизликлар бажарилса, BS масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Фараз қилайлик, BS масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин. У ҳолда $y(x)=y_1(x)-y_2(x)$ функция

$$y''(x)+a(x)y'(x)+b(x)y(x)+c(x)\int_0^x y(t)\bar{J}_s[\lambda(x-t)]dt=0,\ x\in(0,1); \tag{3}$$

$$y(0)=\alpha y(\xi), \qquad y(1)=\beta y(\eta) \tag{4}$$

шартларни қаноатлантиради.

Фараз қилайлик, $\{(3),(4)\}$ масала $y(x)\not\equiv 0,\ x\in[0,1]$ ечимга эга бўлсин. У ҳолда Вейерштрасс теоремасига асосан $[2]$ қуйидаги муносабат

$$\sup_{[0,1]}|y(x)|=|y(x_0)|=M>0$$

ўринли бўлади, бу ерда $x_0-[0,1]$ оралиқда ётувчи ўзгармас сон. Агар $x_0=0$ десак, $|y(\xi)|<|y(0)|$ тенгсизлик ўринли бўлиб, (4) шартларнинг биринчисидан $|y(0)|<|\alpha||y(0)|\le|y(\xi)|<|y(0)|$,

яъни, $|y(0)|<|y(0)|$ кўринишдаги нотўғри тенгсизликка келамиз. Демак, $x_0\ne 0$.

Фараз қилайлик, $x_0=1$ бўлсин. У ҳолда $|y(\eta)|<|y(1)|$ тенгсизлик ўринли бўлиб, (4) шартларнинг иккинчисидан қуйидаги

$$|y(1)|<|\beta||y(1)|\le|y(\eta)|<|y(1)|$$

тенгсизлик, яьни $|y(1)|<|y(1)|$ кўринишидаги нотўғри тенгсизликка эга бўламиз. Демак, $x_0\ne 1$.

У ҳолда, $x_0\in(0,1)$. Шунинг учун қуйидаги тенглик ўринли бўлиши зарур:

$$y''(x_0)+a(x_0)y'(x_0)+b(x_0)y(x_0)+c(x_0)\int_0^{x_0} y(t)\bar{J}_s[\lambda(x_0-t)]dt=0.$$

Бу тенгликни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$y''(x_0)+a(x_0)y'(x_0)+c(x_0)\int_0^{x_0}\left\{y(x_0)+y(t)\bar{J}_s[\lambda(x_0-t)]\right\}dt+$$
$$+\left[b(x_0)-x_0c(x_0)\right]y(x_0)=0. \tag{5}$$

Агар x_0 - $y(x)$ функциянинг мусбат максимумга эришадиган нуқтаси бўлса, $y(x_0)>0$, $y'(x_0)=0$, $y''(x_0)\le 0$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Бундан ташқари $s>(-1/2)$ бўлгани учун $\left|\bar{J}_s\left[\lambda(x_0-t)\right]\right|\le 1$ бўлиб [1], $y(x_0)+y(t)\bar{J}_s\left[\lambda(x_0-t)\right]\ge 0$ тенгсизлик ҳам бажарилади. Теорема шартига асосан $b(x_0)-x_0c(x_0)<0$. Буларни ва $c(x_0)\le 0$ шартни эътиборга олсак,

$$y''(x_0)+a(x_0)y'(x_0)+c(x_0)\int_0^{x_0}\left\{y(x_0)+y(t)\bar{J}_s[\lambda(x_0-t)]\right\}dt+$$
$$+\left[b(x_0)-x_0c(x_0)\right]y(x_0)<0$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса (5) тенгликка зид.

Агар x_0 - $y(x)$ функциянинг манфий минимум қабул қиладиган нуқтаси бўлса, яъни $y(x_0)<0$ бўлса, (5) нинг иккала томонини (-1) га кўпайтириб, юқоридаги мулоҳазаларни

$\left[-y(x)\right]$ функцияга нисбатан такрорлаб, (5) тенгликка зид тенгсизликка келамиз. Демак, $x_0 \notin (0,1)$.

Юқорида олинган қарама-қаршиликлардан $y(x) \not\equiv 0, x \in [0,1]$ деган фаразимизнинг нотўғрилиги келиб чиқади. Унда $y(x) \equiv 0$, яъни $y_1(x) = y_2(x), x \in [0,1]$ тенглик ўринли. 1-теорема исботланди.

2-теорема. *Агар 1-теорема шартлари ва* $a(x) \in C^1[0,1]$, $1-\alpha+\beta\eta(\alpha-1)+\alpha\xi(1-\beta) \neq 0$ *шартлар бажарилган бўлса, BS масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

Исбот. (1) тенгламани

$$y''(x) = f_1(x),\ x \in (0,1) \tag{6}$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$f_1(x) = f(x) - a(x)y'(x) - b(x)y(x) - c(x)\int_0^x y(t)\bar{J}_s\left[\lambda(x-t)\right]dt.$$

Агар $f_1(x)$ функцияни вақтинча маълум деб ҳисобласак, (6) тенгламанинг $y(x)$ ечими учун

$$y(x) = y(0)(1-x) + y(1)x + \int_0^1 G(x,t)\, f_1(t)dt,\ x \in [0,1] \tag{7}$$

тенглик ўринли бўлади $[3]$, бу ерда $G(x,t)$ - Грин функцияси:

$$G(x,t) = \begin{cases} x(t-1), & x \le t; \\ (x-1)t, & x \ge t. \end{cases} \tag{8}$$

(7) тенгликка $f_1(x)$ функциянинг ифодасини қўйиб, сўнгра ҳосил бўлган тенгликда $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ва $\gamma(t)$ иштирок этган ҳадда эса интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x) = y(0)(1-x) + y(1)x + \int_0^1 f(t)G(x,t)dt + \int_0^1 M_2(x,t)y(t)dt,\ x \in [0,1] \tag{9}$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M_2(x,t) = [G(x,t)a(t)]'_t - b(t)G(x,t) - G(x,t)\int_t^1 c(\xi)\bar{J}_s[\lambda(\xi-t)]dt.$$

(9) тенгликда $x=\xi$ ва $x=\eta$ деб, $y(\xi)$ ва $y(\eta)$ ларни топамиз. Сўнгра уларни (2) шартларга қўйиб, $y(-1)$ ва $y(1)$ номаълумларга нисбатан қуйидаги кўринишдаги чизиқли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} \left[1-\alpha(1-\xi)\right]y(0) - \alpha\xi y(1) = m_1 + \alpha\int_0^1 y(t)M_2(\xi,t)\,dt, \\ \beta(\eta-1)y(0) + \left(1-\beta\eta\right)y(1) = m_2 + \beta\int_0^1 y(t)M_2(\eta,t)\,dt, \end{cases} \tag{10}$$

бу ерда

$$m_1 = k_1 + \alpha\int_0^1 G(\xi,t)f(t)\,dt \quad m_2 = k_2 + \beta\int_0^1 G(\eta,t)f(t)\,dt\,,$$

$$M_2(x,t) = [G(x,t)a(t)]'_t - b(t)G(x,t) - G(x,t)\int_t^1 c(t)\bar{J}_s[\lambda(x-t)]dt.$$

Теорема шартига асосан бу тенгламалар системасининг асосий детерминанти нолдан фарқли. Шунинг учун унинг ечими мавжуд ва ягона. $y(0)$ ва $y(1)$ ларнинг (10) системадан топилган ифодаларини (9) га қўйиб, баъзи соддалаштиришларни бажарсак, $y(x)$ функцияга нисбатан

$$y(x) + \int_0^1 K_1(x,t)y(t)dt = \Phi_1(x), \quad x \in (0,1) \tag{11}$$

кўринишдаги иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламасига эга бўламиз, бу ерда $K_1(x,t)$ ва $\Phi_1(x)$- маълум функциялар бўлиб, α, β, k_1, k_2 сонлар ва $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$, $G(x,t)$ функциялар орқали ифодаланади.

(11) интеграл тенглама BS масалага эквивалент бўлиб, унга мос биржинсли интеграл тенглама $\{(3),(4)\}$ масалага эквивалентдир. Оҳирги масала фақат тривиал ечимга эга бўлгани учун (11) га мос биржинсли тенглама ҳам фақат тривиал ечимга эга. У ҳолда, Фредгольм альтернативасига асосан [4], (11) интеграл тенгламанинг ечими мавжуд ва ягона. (11) тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $y(x)$ Î $C[0,1]$ Ç $C^2(0,1)$. 2-теорема исботланди.

References:

[1]. O'rinov A.Q. Maxsus funktsiyalar va maxsus operatorlar.-Farg'ona: Farg'ona nashriyoti, 2012. 112 bet.
[2]. Azlarov T., Mansurov X.. Matematik analiz.-Toshkent: "O'qituvchi", 1994, 416 bet.
[3]. O'rinov A.Q. Oddiy differentsial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar.-Toshkent: MUMTOZ SO'Z, 2014, 164 bet.
[4]. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. –Toshkent: Yangiyul polygraph service, 2007, 256 bet.

Адабиётлар

[1]. Ўринов А.Қ. Махсус функциялар ва махсус операторлар.-Фарғона: Фарғона нашриёти, 2012. 112 бет.
[2]. Азларов Т., Мансуров Х.. Математик анализ.-Тошкент: "Ўқитувчи", 1994, 416 бет.
[3]. Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар.-Тошкент: MUMTOZ SO'Z, 2014, 164 бет.
[4]. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. –Toshkent: Yangiyul polygraph service, 2007, 256 bet.