Scientific-technical journal

Volume 1 | Issue 4 Article 4

12-7-2018

THE BESSEL FUNCTION IN THE NUCLEUS IS COMPACT AND ITS PROPERTIES

L I. Raximova
Fergana State University

FUNDAMENTAL SCIENCES

THE BESSEL FUNCTION IN THE NUCLEUS IS COMPACT AND ITS PROPERTIES

L.I. Raximova

Fergana State University

ФУНКЦИЯ БЕССЕЛЯ В ЯДРЕ И ЕЕ СВОЙСТВА

Л.И. Рахимова

Ферганский государственный университет

ЯДРОСИДА БЕССЕЛ ФУНКЦИЯСИ ҚАТНАШГАН ЎРАМСИЗ ОПЕРАТОРЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Л.И. Рахимова

Фарғона давлат университети

Abstract. *The composition properties of two non-convolutional integral operators with a Bessel function in the kernel are investigated.*
Keywords: Bessel-Clifford function, packing operators, operators of fractional order.

Аннотация. *В работе исследованы композиционые свойствы двух не свёрточных интегральных операторов с функцией Бесселя в ядре.*
Ключевые слова: функция Бесселя-Клиффорда, не свёрточные операторы, оператор дробного порядка.

Аннотация. *Ушбу ишда ядросида Бессел функцияси қатнашган иккита ўрамсиз интеграл операторлар ва уларнинг композицион хоссалари ўрганилган.*
Таянч сўзлар: Бессел-Клиффорд функцияси, ўрамсиз операторлар, каср тартибли операторлар.

Ядросида Бессел функцияси қатнашган қуйидаги иккита ўрамсиз интеграл операторларни қараймиз [1]:

$$\bar{J}^{+}_{\alpha,\lambda} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t(x-t)}\right) f(t)dt\,, \quad (1)$$

$$\bar{I}^{-}_{\alpha,\lambda} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \bar{I}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x(x-t)}\right) f(t)dt\,, \quad (2)$$

бу ерда $\alpha \in R, \alpha > 0, \bar{J}_\nu(z) -$ Бессел-Клиффорд функцияси бўлиб, у $J_\nu(z) -$ Бессел функцияси орқали ушбу

$$\bar{J}_\nu(t) = \Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu} J_\nu(t)$$

тенглик билан ифодаланилади. $\bar{I}_\nu(z) = \bar{J}_\nu(iz)$ мавхум аргументли Бессел-Клиффорд функцияси, $\Gamma(\alpha)$- Эйлернинг гамма функцияси.

Бундан ташқари қуйидаги операторларни хам қараш мумкин:

$$\bar{I}^{+}_{\alpha,\lambda} = \bar{J}^{+}_{\alpha,i\lambda} \quad \bar{J}^{-}_{\alpha,\lambda} = \bar{I}^{-}_{\alpha,i\lambda}, \quad (3)$$

бу ерда $i -$ мавхум бирлик, $i^2 = 1$.

Бессел-Клиффорд функциясининг $J_\nu(0) = 1$ хоссасидан фойдаланиб, $\lambda = 0$ бўлганда қуйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\bar{J}^{+}_{\alpha,0} = \bar{I}^{+}_{\alpha,0} = \bar{J}^{-}_{\alpha,0} = \bar{I}^{-}_{\alpha,0} = \bar{I}^{\alpha}_{0,+}\,,$$

бу ерда $\bar{I}^{\alpha}_{0,+}$ каср тартибли Риман-Лиувилл операторлари [1]:

$$\bar{I}^{\alpha}_{0,+} f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \;\; \alpha > 0 \quad (4)$$

Энди (4) операторлар билан (1) ва (2) операторларни композициясини ўрганамиз. Бунда қуйидаги теорема ўринли бўлади.

1-теорема. Айтайлик $\alpha > 0,\ f(x) \in L_P(0,b),\ b < \infty,\ p \geq 1$ бўлсин. Агар $\beta > 0$ бўлса, у холда,қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:

$$I_{0+}^{\beta}\bar{J}_{\alpha,\lambda}^{+}f(x) = \bar{J}_{\alpha+\beta,\lambda}^{-}f(x)\,, \quad (5) \qquad \bar{I}_{\alpha}^{-},_{\lambda}\, I_{0_+}^{\beta}f(x) = \bar{I}_{\alpha+\beta,\lambda}^{-}f(x)\,. \quad (6)$$

Исбот. Олдин (5) тенгликни исботлайлик.(1) ва (4) ларни эътиборга олсак, қуйидаги

$$I_{0_+}^{\beta}\bar{J}_{\alpha,\lambda}^{+}f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x (x-t)^{\beta-1}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \times \times \bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{s(t-s)}\right)f(s)ds\right\}dt$$

тенглик ўринли.

Такрорий интегралларда Дирихле формуласини қўллаб, интеграллаш тартибини ўзгартирсак,охирги тенгликдан

$$I_{0+}^{\beta}\bar{J}_{\alpha,\lambda}^{+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(s)ds\int_s^x (x-t)^{\beta-1}(t-s)^{\alpha-1} \times$$
$$\times\,\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{s(t-s)}\right)dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(s)q(x,s)ds, \quad (7)$$

тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$q(x,s) = \int_0^x f(s)ds\int_s^x (x-t)^{\beta-1}(t-s)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{s(t-s)}\right)dt,$$

Охирги интегрални ҳисоблашда Бессел-Клиффорд функциясининг қатор кўринишидан, яъни:

$$\bar{J}_\nu(z) = \bar{I}_\nu(iz) = \Gamma(\nu+1)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z^2/4)^k}{(\nu+1)_k k!}\,.$$

У ҳолда,

$$q(x,s) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{[-\lambda^2 s/4]^k}{(\alpha)_k k!}\int_s^x (x-t)^{\beta-1}(t-s)^{\alpha+k-1}\quad dt$$ формулалардан фойдаланамиз.

Охирги интегралда $t = x-(x-s)\theta$ алмаштириб бажариб, бир қанча ҳисоблашни амалга оширганимиздан сўнг қуйидагига эга бўламиз:

$$q(x,s) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[-\frac{\lambda^2 s}{4}\right]^k}{(\alpha)_k k!}\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)}(x-s)^{\alpha+\beta+k-1} =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-s)^{\alpha+\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[-\lambda^2 s/4]^k}{(\alpha+\beta)_k k!}[s(x-s)]^k =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-s)^{\alpha+\beta-1}\bar{J}_{\alpha+\beta-1}\left(\lambda\sqrt{s(x-s)}\right)$$

$q(x,s)$ нинг топилган ифодасини (7) тенгликка қўйиб, (5) тенгликнинг тўғри эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. (6) тенглик ҳам худди шундай исботланади. 1-теорема исбот бўлди.

Энди (1) ва (2) операторларни М.С.Салохитдинов ва А.Қ.Ўриновлар томонидан киритилган [2], ушбу

$$A_{ax}^{n,\lambda}f(x) = f(x) - \int_a^x f(t)\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^n\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(\lambda\sqrt{(x-a)(x-t)}\right)dt, \quad (8)$$

$$B_{ax}^{n,\lambda}f(x) = f(x) + \int_a^x f(t)\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{1-n}\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(\lambda\sqrt{(t-a)(t-x)}\right)dt, \quad (9)$$

операторлар ва (4) оператор композицияси кўринишида ифодалаш мумкинлигини кўрсатамиз, бу ерда $J_0(t) -$ Бессел функцияси,$n = 0{,}1$.

Қуйиидаги теорема ўринли.

2-теорема . Айтайлик $\alpha > 0, f(x) \in L_P(0,b), b < \infty, p \geq 1$ бўлсин. У холда, қуйиидаги формула ўринли бўлади:

$$\bar{J}_{\alpha,\lambda}^{+}f(x) = I_{0+}^{\alpha}B_{0x}^{1,\lambda}f(x). \quad (10)$$

Ушбу теорема юқоридаги 1-теореманинг исботи каби Бессел функциясининг қаторга ёйилмасидан фойдаланиб исботланади. (1) ва (2) кўринишдаги ўрамсиз операторларни ихтиёрий $\alpha > 0$ учун ўрганишда (8) ва (9) операторлар мухим ахамиятга эга эканлигини кўрсатмоқда.

(10) кўринишдаги тенгликларни қолган (1) ва (2) кўринишдаги операторлар учун ҳам исботлаш мумкин.

Адабиётлар

[1] С.Г. Самко, А.А.Килбас, О.И.Маричев. Интегралы и производине дробного порядка и их некоторые приложения. -Минск: Наука и техника.-Минск: Науки и техника, 1987.-702с.

[2] М.С. Салохитдинов, А.Қ.Ўринов. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. -Ташкент: ФАН, 1997.- 168 с.