Scientific-technical journal

Volume 1 | Issue 1 Article 1

3-8-2018

ON UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE THREE-DIMENSIONAL EQUATION OF A MIXED TYPE WITH THREE SINGULAR COEFFICIENTS

K T. Karimov
Fergana State University, radiofizik2012@mail.ru

Follow this and additional works at: https://uzjournals.edu.uz/ferpi

Recommended Citation
Karimov, K T. (2018) "ON UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE THREE-DIMENSIONAL EQUATION OF A MIXED TYPE WITH THREE SINGULAR COEFFICIENTS," *Scientific-technical journal*: Vol. 1 : Iss. 1 , Article 1.
Available at: https://uzjournals.edu.uz/ferpi/vol1/iss1/1

This Article is brought to you for free and open access by 2030 Uzbekistan Research Online. It has been accepted for inclusion in Scientific-technical journal by an authorized editor of 2030 Uzbekistan Research Online. For more information, please contact sh.erkinov@edu.uz.

УДК 517.956.6

ON UNIQUENESS OF THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR THE THREE-DIMENSIONAL EQUATION OF A MIXED TYPE WITH THREE SINGULAR COEFFICIENTS

K.T. Karimov

Fergana State University

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ТРЕМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

К.Т. Каримов

Ферганский государственный университет

УЧТА СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТГА ЭГА БЎЛГАН УЧ ЎЛЧОВЛИ АРАЛАШ ТИПДАГИ ТЕНГЛАМА УЧУН ДИРИХЛЕ МАСАЛАСИНИНГ ЯГОНАЛИГИ ҲАҚИДА

К.Т. Каримов

Фарғона давлат университети

Abstract. *For a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients, the Dirichlet problem is studied in this paper. On the basis of the completeness property of the function systems of two one-dimensional spectral problems, the uniqueness theorem is proved.*

Keywords: Dirichlet's problem, mixed type equation, spectral method, uniqueness of the solution.

Аннотация. *В данной статье для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами изучена задача Дирихле. На основании свойства полноты систем собственных функций двух одномерных спектральных задач, доказано теорема единственности.*

Ключевые слова: задача Дирихле, уравнения смешанного типа, спектральный метод, единственность решения.

Аннотация. *Ушбу мақолада учта сингуляр коэффициентга эга бўлган уч ўлчовли аралаш типдаги тенглама учун Дирихле масаласи ўрганилган. Иккита бир ўлчовли спектрал масалаларнинг хос функциялари тўлалиги хоссаларига асосан ягоналик теоремаси исботланган.*

Таянч сўзлар: Дирихле масаласи, аралаш типдаги тенглама, спектрал усул, ечимнинг ягоналиги.

1. Постановка задачи. Рассмотрим трехмерное уравнение смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами

$$u_{xx}+(\operatorname{sgn} y)u_{yy}+u_{zz}+\frac{2\alpha}{x}u_x+\frac{2\beta}{|y|}u_y+\frac{2\gamma}{z}u_z=0 \tag{1}$$

в призматической области $\Omega=\{(x,y,z):0<x<1,\ -a<y<b,\ \ 0<z<1\}$, где $u=u(x,y,z)-$ неизвестная функция, а $a,b,\alpha,\beta,\gamma\in R$, причем $a>0,\ b>0$, $0<\alpha,\beta,\gamma<(1/2)$.

Уравнение (1) в области Ω принадлежит смешанному типу, а именно: в области $\Omega^+ = \Omega \cap \{y > 0\}$ – эллиптическому типу, а в области $\Omega^- = \Omega \cap \{y < 0\}$ – гиперболическому типу. Плоскости $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$ являются плоскостью сингулярности коэффициентов уравнения, а среди них $y = 0$ называется плоскостями изменения типа.

В данной работе для уравнения (1) в области Ω поставлена и исследована следующая задача. **Задача D.** Найти функцию $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и краевым условиям

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y, z) = \lim_{y \to +0} y^{2\beta} u_y(x, y, z),\ 0 < x < 1, 0 < z < 1; \quad (2)$$

$$u(0, y, z) = u(1, y, z) = 0, \quad -a \le y \le b,\ 0 \le z \le 1; \quad (3)$$

$$u(x, y, 0) = u(x, y, 1) = 0, \quad -a \le y \le b,\ 0 \le x \le 1; \quad (4)$$

$$u(x, b, z) = f(x, z), \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le z \le 1; \quad (5)$$

$$u(x, -a, z) = g(x, z), \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le z \le 1, \quad (6)$$

где $f(x, z), g(x, z) -$ заданные непрерывные функции.

Интерес к задаче Дирихле для уравнения смешанного типа возник после работы Ф.И.Франкля [1], в которой впервые обращено внимание на то, что задачи трансзвуковой газовой динамики сводятся к этой задаче. А.В.Бицадзе [2] доказал, что задача Дирихле для уравнения $u_{xx} + (\operatorname{sgn} y) u_{yy} = 0$ поставлено некорректно. После этой работы возникла проблема поиска смешанных областей, для которых задача Дирихле является корректно поставленной. В дальнейшем задача Дирихле для уравнений смешанного типа изучалась многими авторами [3-5]. Более полную библиографию работ, посвященных этой тематике, можно найти в монографии [6]. Все задачи указанной выше в основном рассмотрено в двухмерных областях. Однако, задачи такого типа в трехмерных областях для уравнения с сингулярными коэффициентами остаются малоизученными. Здесь отметим работы [7-9] и др.

В данной работе установлен критерий единственности решение задачи Дирихле.

2. Построения собственных функций. Сначала находим нетривиальные решения задачи {(1), (3)-(4)}. С этой целю, разделив переменные по формуле $u(x, y, z) = W(x, z) Y(y)$, из уравнения (1) получим

$$(\operatorname{sgn} y) Y''(y) + \frac{2\beta}{|y|} Y'(y) - \lambda Y(y) = 0,\ -a < y < b; \quad (7)$$

$$W_{xx} + W_{zz} + \frac{2\alpha}{x} W_x + \frac{2\gamma}{z} W_z + \lambda W = 0,\ \ 0 < x < 1,\ 0 < z < 1, \quad (8)$$

где $\lambda -$ константа разделения.

С учетом однородных краевых условиях (3) и (4), для уравнения (8) получим задача на собственные значение в квадрате $\{(x, z) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$ с следующими краевыми условиями

$$W(0, z) = W(1, z) = 0,\ \ 0 \le z \le 1;\ \ W(x, 0) = W(x, 1) = 0,\ \ 0 \le x \le 1.$$

Путем разделения переменных $W(x, z) = X(x) Z(z)$, эта задача сводится к двум задачам на собственные значения:

$$X''(x) + \frac{2\alpha}{x} X'(x) + \mu X(x) = 0, \quad (9)$$

$$X(0)=0, \quad X(1)=0; \tag{10}$$

$$Z''(z)+\frac{2\gamma}{z}Z'(z)+(\lambda-\mu)Z(z)=0, \tag{11}$$

$$Z(0)=0, \quad Z(1)=0, \tag{12}$$

где $\mu-$ константа разделения.

В уравнение (9), произведя замену $X(x)=\left(t/\sqrt{\mu}\right)^{(1/2)-\alpha}\ p(t)$, где $t=\sqrt{\mu}x$, получим уравнение Бесселя [10, с.49]: $t^2p''(t)+tp'(t)+\left\{t^2-\left[(1/2)-\alpha\right]^2\right\}p(t)=0$.

(13)

Принимая во внимание вид общего решения [10, с.51] уравнения (13) и введенные обозначения, получим общее решение уравнения (9) в виде

$$X(x)=d_1x^{(1/2)-\alpha}J_{(1/2)-\alpha}\left(\sqrt{\mu}x\right)+d_2x^{(1/2)-\alpha}J_{\alpha-(1/2)}\left(\sqrt{\mu}x\right), \tag{14}$$

здесь d_1 и d_2 –произвольные постоянные, $J_l(x)-$функция Бесселя порядка l первого рода [10, с.51]. Из (14) следует, что решение уравнения (9), удовлетворяющее первому из условий (10), существует при $\alpha<(1/2)$ и оно определяется равенством

$$X(x)=d_1x^{(1/2)-\alpha}J_{(1/2)-\alpha}\left(\sqrt{\mu}x\right). \tag{15}$$

Подставляя (15) к второму из условий (10), получим условия существования нетривиального решения задачи {(9),(10)}:

$$J_{(1/2)-\alpha}\left(\sqrt{\mu}\right)=0. \tag{16}$$

Известно, что при $l>-1$ функция Бесселя $J_l(z)$ имеет счетное число нулей, причем все они вещественны и с попарно противоположными знаками [10, с.528]. Так как $(1/2)-\alpha>0$, то уравнения (16) имеет счетное число вещественных корней $\mu_1<\mu_2<...<\mu_n<...$. Обозначая через σ_n-n-ый положительный корень уравнения (16), получим те значения параметра μ, при которых существуют нетривиальные решения задачи (т.е. собственные значения задачи) {(9),(10)}: $\mu_n=\sigma_n{}^2,\ n\in N$.

Полагая в (15) $\mu=\mu_n$ и $d_1=1$, получим нетривиальное решение (собственную функцию) задачи {(9),(10)}:

$$X_n(x)=x^{(1/2)-\alpha}J_{(1/2)-\alpha}(\sigma_nx),\ n\in N. \tag{17}$$

Теперь перейдем к исследованию задачи {(11), (12)}. Методом, примененным в задачи {(9),(10)}, найдем общее решение уравнения (11) в виде

$$Z(z)=d_3z^{(1/2)-\gamma}J_{(1/2)-\gamma}\left(\sqrt{\lambda-\mu_n}z\right)+d_4z^{(1/2)-\gamma}J_{\gamma-(1/2)}\left(\sqrt{\lambda-\mu_n}z\right), \tag{18}$$

где d_3 и d_4 – произвольные постоянные.

Поставляя (18) краевые условия (12) имеем $d_4=0$ и

$$J_{(1/2)-\gamma}\left(\sqrt{\lambda-\mu_n}\right)=0. \tag{19}$$

Обозначая через δ_m-m-ый положительный корен уравнения (19), получим те значения параметра λ, при которых существуют нетривиальные решение задачи {(11),(12)}: $\lambda_{nm}=\sigma_n^2+\delta_m^2,\quad n,m\in N$. Полагая в (18) $\lambda=\lambda_{nm}$, $d_3=1$ и $d_4=0$, получим етривиальное решение (собственную функцию) задачи {(11),(12)} в виде

$$Z_m(z)=J_{(1/2)-\gamma}(\delta_mz),\ m\in N. \tag{20}$$

Полагая в уравнение (7) $\lambda=\lambda_{nm}$, найдем общее решения этого уравнении при $y>0$ и $y<0$

$$: Y_{nm}(y)=\begin{cases} a_{nm}y^{\frac{1}{2}-\beta}I_{\frac{1}{2}-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)+b_{nm}y^{\frac{1}{2}-\beta}K_{\frac{1}{2}-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right), \quad y>0, \\ c_{nm}(-y)^{\frac{1}{2}-\beta}J_{\frac{1}{2}-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right)+d_{nm}(-y)^{\frac{1}{2}-\beta}J_{\beta-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right), \; y<0, \end{cases} \tag{21}$$

здесь a_{nm}, b_{nm}, c_{nm} и d_{nm}–произвольные постоянные, $I_\omega(z)$ и $K_\omega(z)$–модифицированные функции Бесселя порядка ω первого и третьего рода [10, с.91-92] соответственно.

Подставляя (17), (20), (21) в равенство $u(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$, получим нетривиальные в области Ω решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (3) и (4):

$$u_{nm}(x,y,z)=\begin{cases} x^{(1/2)-\alpha}y^{(1/2)-\beta}z^{(1/2)-\gamma}J_{(1/2)-\alpha}(\sigma_n x)J_{(1/2)-\gamma}(\delta_m z)\times \\ \quad\times\left[a_{nm}I_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)+b_{nm}K_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)\right], \; y>0; \\ x^{(1/2)-\alpha}(-y)^{(1/2)-\beta}z^{(1/2)-\gamma}J_{(1/2)-\alpha}(\sigma_n x)J_{(1/2)-\gamma}(\delta_m z)\times \\ \quad\times\left[c_{nm}J_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right)+d_{nm}J_{\beta-(1/2)}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right)\right], \; y<0. \end{cases}$$

Теперь подберем постоянные a_{nm}, b_{nm}, c_{nm} и d_{nm} так, чтобы для функций $u_{nm}(x,y,z)$ выполнялись условия склеивания (2) и $u(x,-0,z)=u(x,+0,z)$. Непосредственно нетрудно убедится, что равенство $u(x,-0,z)=u(x,+0,z)$ выполняется, если $d_{nm}=\dfrac{\pi b_{nm}}{2\cos(\beta\pi)}$ при любых a_{nm} и c_{nm}, а условия склеивания (2) выполняется, если $d_{nm}=\dfrac{\pi b_{nm}}{2\cos(\beta\pi)}$ и $c_{nm}=\dfrac{\pi b_{nm}}{2\cos(\beta\pi)}-a_{nm}$. Тогда на основании этих равенств, система функций $u_{nm}(x,y,z)$ напишется в следующем виде

$$u_{nm}(x,y,z)=\begin{cases} x^{(1/2)-\alpha}y^{(1/2)-\beta}z^{(1/2)-\gamma}J_{(1/2)-\alpha}(\sigma_n x)J_{(1/2)-\gamma}(\delta_m z)\times \\ \quad\times\left[a_{nm}I_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)+b_{nm}K_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)\right], \; y>0; \\ x^{(1/2)-\alpha}(-y)^{(1/2)-\beta}z^{(1/2)-\gamma}J_{(1/2)-\alpha}(\sigma_n x)J_{(1/2)-\gamma}(\delta_m z)\times \\ \quad\times\left[-a_{nm}J_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right)+b_{nm}\bar{Y}_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right)\right], \; y<0, \end{cases} \tag{22}$$

где $\bar{Y}_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right)=\dfrac{\pi}{2\cos(\beta\pi)}\left[J_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right)+J_{\beta-(1/2)}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right)\right]$.

3. Единственность решения задачи D.

Теорема. Если существует решение $u(x,y,z)$ задачи D, то оно единственно только тогда, когда

$$\Delta_{nm}(a,b)=I_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right)\bar{Y}_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}a\right)+ \\ +K_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right)J_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}a\right)\neq 0 \tag{23}$$

при всех $n,m\in N$.

Доказательство. Пусть $u(x,y,z)$ есть решение задачи D. Рассмотрим следующую функцию

$$u_{nm}(y)=\int_0^1\int_0^1 u(x,y,z)x^{2\alpha}X_n(x)z^{2\gamma}Z_m(z)dxdz=$$

$$=\int_0^1\left(\int_0^1 u(x,y,z)x^{(1/2)+\alpha}J_{(1/2)-\alpha}(\sigma_n x)dx\right)z^{(1/2)+\gamma}J_{(1/2)-\gamma}(\delta_m z)dz,\ m,n\in N. \quad (24)$$

В работе Г.Н. Ватсона [10, с.531] отмечается, что система функций $\left\{J_{(1/2)-\alpha}(\sigma_n x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ ортогональна с весом x в промежутке $[0,1]$. Поэтому система собственных функций (17) ортогональна с весом $x^{2\alpha}$ в этом промежутке, т.е.

$$\int_0^1 x^{(1/2)-\alpha}J_{(1/2)-\alpha}(\sigma_m x)x^{(1/2)-\alpha}J_{(1/2)-\alpha}(\sigma_n x)x^{2\alpha}dx=\int_0^1 xJ_{(1/2)-\alpha}(\sigma_m x)J_{(1/2)-\alpha}(\sigma_n x)dx=0\,. \quad (25)$$

Также в этой работе [10, с.633] автор указал на то, что система функций $\left\{J_{(1/2)-\alpha}(\sigma_n x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ полна с весом x в пространстве $L_2[0,1]$ и для них имеет место соотношение

$$\int_0^1 xJ^2_{(1/2)-\alpha}(\sigma_n x)dx=\frac{1}{2}J^2_{(3/2)-\alpha}(\sigma_n).$$

Отсюда следует, что система собственных функций (17) полна в пространстве $L_2[0,1]$ с весом $x^{2\alpha}$ и для функций этой системы имеет место соотношение

$$\int_0^1 x^{1-2\alpha}J^2_{(1/2)-\alpha}(\sigma_n x)x^{2\alpha}dx=\int_0^1 xJ^2_{(1/2)-\alpha}(\sigma_n x)dx=\frac{1}{2}J^2_{(3/2)-\alpha}(\sigma_n). \quad (26)$$

Следовательно, система функции (17) полна в $L_2[0,1]$ с весом $x^{2\alpha}$.

Проведя те же рассуждения, можно убедится в том, что система собственных функций (20) полна в $L_2[0,1]$ с весом $z^{2\gamma}$. На основании (24) введем функции

$$u_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)=\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}\int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2}u(x,y,z)x^{2\alpha}X_n(x)z^{2\gamma}Z_m(z)dxdz,\ n,m\in N, \quad (27)$$

где ε_1 и ε_2 - достаточное малое числа. Дифференцируем равенство (27) по y при $y\in(-a,0)\cup(0,b)$:

$$\left[u_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)\right]'=\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}\int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2}u_y(x,y,z)x^{2\alpha}X_n(x)z^{2\gamma}Z_m(z)dxdz,\ n,m\in N;$$

$$\left[u_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)\right]''=\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}\int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2}u_{yy}(x,y,z)x^{2\alpha}X_n(x)z^{2\gamma}Z_m(z)dxdz,\ n,m\in N.$$

Учитывая уравнение (1) из последних равенств, имеем

$$\left[u_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)\right]''=-(\operatorname{sgn}y)\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}\int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2}\left(u_{xx}+\frac{2\alpha}{x}u_x+u_{zz}+\frac{2\gamma}{z}u_z+\frac{2\beta}{|y|}u_y\right)x^{2\alpha}X_n(x)z^{2\gamma}Z_m(z)dxdz=$$

$$=-(\operatorname{sgn} y)\left[\int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2}\left(\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} u_{xx}x^{2\alpha}X_n(x)dx+\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}\frac{2\alpha}{x}u_x x^{2\alpha}X_n(x)dx\right)z^{2\gamma}Z_m(z)dz+\right.$$
$$\left.+\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}\left(\int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} u_{zz}z^{2\gamma}Z_m(z)dz+\int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2}\frac{2\gamma}{z}u_z z^{2\gamma}Z_m(z)dz\right)x^{2\alpha}X_n(x)dz+\frac{2\beta}{|y|}\left[u_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)\right]'\right]. \tag{28}$$

Рассмотрим следующие интегралы:

$$\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} u_{xx}x^{2\alpha}X_n(x)dx=\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} x^{2\alpha}X_n(x)du_x=u_x x^{2\alpha}X_n(x)\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=1-\varepsilon_1}-\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} u_x\left(x^{2\alpha}X_n(x)\right)'dx=$$
$$=u_x x^{2\alpha}X_n(x)\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=1-\varepsilon_1}-u(x,y,z)\left(x^{2\alpha}X_n(x)\right)'\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=1-\varepsilon_1}+\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} u\left(x^{2\alpha}X_n(x)\right)''dx=$$
$$=u_x x^{2\alpha}X_n(x)\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=1-\varepsilon_1}-u(x,y,z)\left(x^{2\alpha}X_n(x)\right)'\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=1-\varepsilon_1}+$$
$$+\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} ux^{2\alpha}\left(X_n''(x)+2\frac{2\alpha}{x}X_n'(x)+\left(4\alpha^2-2\alpha\right)x^{-2}X_n(x)\right)dx,$$

$$\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}\frac{2\alpha}{x}u_x x^{2\alpha}X_n(x)dx=\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}2\alpha x^{2\alpha-1}X_n(x)du=$$
$$=2\alpha x^{2\alpha-1}X_n(x)u(x,y,z)\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=1-\varepsilon_1}-2\alpha\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} u\left(x^{2\alpha-1}X_n(x)\right)'dx=$$
$$=2\alpha x^{2\alpha-1}X_n(x)u(x,y,z)\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=1-\varepsilon_1}-\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} ux^{2\alpha}\left(\frac{2\alpha}{x}X_n'(x)+\left(4\alpha^2-2\alpha\right)x^{-2}X_n(x)\right)dx.$$

На основании полученных выше равенств имеем

$$\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} u_{xx}x^{2\alpha}X_n(x)dx+\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}\frac{2\alpha}{x}u_x x^{2\alpha}X_n(x)dx=$$
$$=\left\{\left[u_x X_n(x)-uX_n'(x)\right]x^{2\alpha}\right\}\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=1-\varepsilon_1}+\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} ux^{2\alpha}\left[X_n''(x)+\frac{2\alpha}{x}X_n'(x)\right]dx=$$
$$=\left\{\left[u_x X_n(x)-uX_n'(x)\right]x^{2\alpha}\right\}\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=1-\varepsilon_1}-\sigma_n^2\int_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} ux^{2\alpha}X_n(x)dx. \tag{29}$$

Аналогично находим

$$\int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} u_{zz}z^{2\gamma}Z_m(z)dz+\int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2}\frac{2\gamma}{z}u_z z^{2\gamma}Z_m(z)dz=$$
$$=\left\{\left[u_z Z_m(z)-uZ_m'(z)\right]z^{2\gamma}\right\}\Big|_{z=\varepsilon_2}^{z=1-\varepsilon_2}-\delta_m^2\int_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} uz^{2\gamma}Z_m(z)dz\cdot \tag{30}$$

Поставляя (29) и (30) в (28) получим

$$\left[u_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)\right]'' = -(\operatorname{sgn} y)\left[\int\limits_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2}\left(\left[u_x X_n(x) - uX_n'(x)\right]x^{2\alpha}\Big|_{x=\varepsilon_1}^{x=1-\varepsilon_1} - \sigma_n^2\int\limits_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1} ux^{2\alpha}X_n(x)\,dx\right)\times\right.$$

$$\times z^{2\gamma}Z_m(z)\,dz + \int\limits_{\varepsilon_1}^{1-\varepsilon_1}\left(\left[u_z Z_m(z) - uZ_m'(z)\right]z^{2\gamma}\Big|_{z=\varepsilon_2}^{z=1-\varepsilon_2} - \delta_m^2\int\limits_{\varepsilon_2}^{1-\varepsilon_2} uz^{2\gamma}Z_m(z)\,dz\right)\times$$

$$\left.\times x^{2\alpha}X_n(x)\,dx + \frac{2\beta}{|y|}\left[u_{nm}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(y)\right]'\right].$$

Переходя здесь к пределу при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0$, с учетом граничных условий (3), (4) и (10) получим, что $u_{nm}(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(\operatorname{sgn} y)u_{nm}''(y) + \frac{2\beta}{|y|}u_{nm}'(y) - \lambda_{nm}u_{nm} = 0, \quad -a < y < b.$$

Следовательно $u_{nm}(y) = Y_{nm}(y)$. Из (24) находим $u_{nm}(b)$ и $u_{nm}(-a)$:

$$u_{nm}(b) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 u(x,b,z)x^{2\alpha}X_n(x)z^{2\gamma}Z_m(z)\,dxdz =$$

$$= \int\limits_0^1\int\limits_0^1 f(x,y)x^{2\alpha}X_n(x)z^{2\gamma}Z_m(z)\,dxdz = F_{nm}, \tag{30}$$

$$u_{nm}(-a) = \int\limits_0^1\int\limits_0^1 u(x,-a,z)x^{2\alpha}X_n(x)z^{2\gamma}Z_m(z)\,dxdz =$$

$$= \int\limits_0^1\int\limits_0^1 g(x,y)x^{2\alpha}X_n(x)z^{2\gamma}Z_m(z)\,dxdz = G_{nm}. \tag{31}$$

Принимая во внимание (30) и (31), из (21) находим

$$\begin{cases} a_{nm}I_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right) + b_{nm}K_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right) = F_{nm}b^{\beta-(1/2)}, \\ -a_{nm}J_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}a\right) + b_{nm}\bar{Y}_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}a\right) = G_{nm}a^{\beta-(1/2)}. \end{cases} \tag{32}$$

Определителем (32) является выражения $\Delta_{nm}(a,b)$, которое задается формулой (23). Если $\Delta_{nm}(a,b) \neq 0$, то система (32) имеет единственное решение

$$a_{nm} = \frac{F_{nm}b^{\beta-(1/2)}\bar{Y}_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}a\right) - G_{nm}a^{\beta-(1/2)}K_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right)}{\Delta_{nm}(a,b)},$$

$$b_{nm} = \frac{f_{nm}b^{\beta-(1/2)}J_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}a\right) + g_{nm}a^{\beta-(1/2)}I_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right)}{\Delta_{nm}(a,b)}.$$

Тогда функции $u_{nm}(y)$ примут вид

$$u_{nm}(y) = \begin{cases} \dfrac{F_{nm}(y/b)^{(1/2)-\beta}\Delta_{nm}(a,y) + G_{nm}(y/a)^{(1/2)-\beta}A_{nm}(y,b)}{\Delta_{nm}(a,b)}, & y > 0; \\ \dfrac{F_{nm}(-y/b)^{(1/2)-\beta}B_{nm}(a,-y) + G_{nm}(-y/a)^{(1/2)-\beta}\Delta_{nm}(-y,b)}{\Delta_{nm}(a,b)}, & y < 0, \end{cases} \tag{33}$$

где

$$\Delta_{nm}(a,y)=I_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)\bar{Y}_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}a\right)+K_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)J_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}a\right),$$

$$A_{nm}(y,b)=I_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right)K_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right)-K_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right)I_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}y\right),$$

$$B_{nm}(a,-y)=J_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}a\right)\bar{Y}_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right)-\bar{Y}_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}a\right)J_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right),$$

$$\Delta_{nm}(-y,b)=I_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right)\bar{Y}_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right)+K_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}b\right)J_{(1/2)-\beta}\left(\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)\right).$$

Пусть $f(x,z)\equiv 0$ и $g(x,z)\equiv 0$. Тогда из равенств (30), (31), (33) и (24) имеем

$$\int_0^1\left(\int_0^1 u(x,y,z)\,x^{(1/2)+\alpha}J_{(1/2)-\alpha}(\sigma_n x)\,dx\right)z^{(1/2)+\gamma}J_{(1/2)-\gamma}(\delta_m z)\,dz=0.$$

Отсюда в силу полноты системы $\left\{z^{(1/2)+\gamma}J_{(1/2)-\gamma}(\delta_m z)\right\}_{m=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2[0,1]$ следует

$$\int_0^1 u(x,y,z)\,x^{(1/2)+\alpha}J_{(1/2)-\alpha}(\sigma_n x)\,dx=0\cdot$$

В силу полноты системы $\left\{x^{(1/2)+\alpha}J_{(1/2)-\alpha}(\sigma_n x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2[0,1]$ из последнего равенства следует $u(x,y,z)\equiv 0$ для всех $x\in[0,1]$ и при любом $y\in[-a,b]$, $z\in[0,1]$. Поскольку $u(x,y,z)\in C(\bar{\Omega})$, то $u(x,y,z)\equiv 0$ в $\bar{\Omega}$. Отсюда следует утверждение теоремы.

References:

[1] Franklg' F.I. Izbrannqe trudq po gazovoy dinamike. M.: Nauka, 1973. 711 s.
[2] Bitsadze A.V. Nekorrektnostg' zadachi Dirixle dlya uravneniy smeshannogo tipa//DAN SSSR. 1953. T.122. № 2. S. 167-170.
[3] SHabat B.V. Primerq resheniya zadachi Dirixle dlya uravneniya smeshannogo tipa // DAN SSSR. 1957. T. 112. № 3. S. 386-389.
[4] Vaxaniya N.N. Ob odnoy osoboy zadache dlya uravneniya smeshannogo tipa // Tr. AN Gruz.SSR. 1963. T. 3. S. 69-80.
[5] Cannon J.R. Dirichlet problem for an equation of mixed type with a discontinitius coefficient // Ann. Math. Pura ed appl. 1963. Vol. 62. P. 371-377.
[6] Xachev M.M. Pervaya kraevaya zadacha dlya lineynqx uravneniy smeshannogo tipa. Nalg'chik: Elg'brus, 1998. 168 s.
[7] Naxushev A.M. Kriteriy yedinstvennosti zadachi Dirixle dlya uravneniya smeshannogo tipa v tsilindricheskoy oblasti // Differentsialg'nqe uravneniya. 1970. T. 6. № 1. 190-191.
[8] Safina R.M. Kriteriy yedinstvennosti resheniya zadachi Dirixle s osevoy simmetriey dlya trexmernogo uravneniya smeshannogo tipa s operatorom Besselya// Izv. vuzov. Matem., 2014. № 6. S.78–83.
[9] Safina R.M. Zadacha Dirixle s osevoy simmetriey dlya uravneniya smeshannogo B-elliptiko-B-giperbolicheskogo tipa s xarakteristicheskim vqrojdeniem, Vestn. Tatarsk. gumanitarno-pedagogicheskogo un-ta, 2010. № 4(22). S. 63–69.
[10] Vatson G. N. Teoriya besselevqx funktsiy. –M.: T.1.Izd. IL., 1949. -798s.