Scientific-technical journal

Volume 3 | Issue 4 Article 7

10-7-2020

ON A PROPERTY OF FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIATION OPERATORS IN THE KERNEL OF WHICH THE MEYER FUNCTION

M Y. Qosimova M.Y., Yusupova N.X.
Ferghana Polytechnic Institute

N Kh Yusupova
Ferghana Polytechnic Institute

SHORT MESSAGES

ON A PROPERTY OF FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIATION OPERATORS IN THE KERNEL OF WHICH THE MEYER FUNCTION

Qosimova M.Y., Yusupova N.X.

Ferghana Polytechnic Institute

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ, В ЯДРЕ КОТОРЫХ УЧАСТВУЕТ ФУНКЦИЯ МЕЙЕРА

Касимова М.Я., Юсупова Н.Х.

Ферганский политехнический институт

МЕЙЕР ФУНКЦИЯСИ ҚАТНАШГАН ЯДРОДА КАСРЛИ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЛАНГАН ОПЕРАТОРНИНГ БИР ХОССАСИ ҲАҚИДА

Касимова М.Я., Юсупова Н.Х.

Фарғона политехника институти

Abstract. *In this paper, compositions of operators are introduced and studied, in the kernel of which the Meyer function.*
Key words: kernel, integral, operator, Meyer function, Mellin transform.

Аннотация: *усшу мақолада ядрода Мейер функцияси қатнашган операторлар композицияси ва киритилган ва ўрганилган.*
Таянч сўзлар: ядро, интеграл, оператор, Мейер функцияси, Меллин алмаштирисҳлар.

Аннотация: *В данной работе введена и изучена композиции операторов, в ядре которых участвует функция Мейера.*
Ключевые слова: ядро, интеграл, оператор, функция Мейера, преобразование Меллина.

Пусть $a_i,\ b_j \in R, \quad (i=\overline{1,6};\quad j=\overline{1,5}), \quad \varphi(x) \in C(0,1) \cap L_1(0,1)$

Справедлива следующая.

Лемма. Если

$$-1 \prec \sum_{j=1}^{5} b_j - \sum_{i=1}^{6} a_i \prec 0,$$

то имеет место тождество

$$B_1\left[B_2\left[\varphi(x)\right]\right] \equiv \varphi(x), \tag{1}$$

Где

$$B_1\left[\varphi(x)\right] = \frac{d}{dx} x^{-a_6} \int_0^x G_{66}^{60}\left(\frac{t}{x}\middle|\begin{matrix} b_1-a_6, b_2-a_6,\ b_3-a_6, b_4-a_6,\ b_5-a_6\ 1-a_6 \\ a_1-a_6,\ \ a_2-a_6, a_3-a_6, a_4-a_6, a_5-a_6, 0 \end{matrix}\right)\varphi(t)dt, \tag{2}$$

$$B_1\left[\varphi(x)\right] = \frac{d}{dx} x^{-a_6} \int_0^x G_{66}^{60}\left(\frac{t}{x}\middle|\begin{matrix} b_1-a_6, b_2-a_6,\ b_3-a_6, b_4-a_6,\ b_5-a_6\ 1-a_6 \\ a_1-a_6,\ \ a_2-a_6, a_3-a_6, a_4-a_6, a_5-a_6, 0 \end{matrix}\right)\varphi(t)dt, \tag{3}$$

$G_{pq}^{mn}(...)-$функция Мейера [1]

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$B[\varphi(x)] = \frac{d}{dx} x^{-a_6} \int_0^x t^{a_6-1} G_{66}^{60}\left(\frac{t}{x}\left|{}^{b_1-a_6, b_2-a_6, b_3-a_6, b_4-a_6, b_5-a_6\, 1-a_6}_{a_1-a_6, a_2-a_6, a_3-a_6, a_4-a_6, a_5-a_6, 0}\right..\right)dt \times \int_0^x G_{66}^{60}\left(\frac{z}{t}\left|{}^{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\, a_6}_{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, 0}\right.\right)\varphi(z)dz \quad (4)$$

Отсюда, меняя порядок интегрирования, имеем

$$B[\varphi(x)] = \frac{d}{dx} x^{-a_6} \int_0^x \varphi(z)dz \cdot \int_z^x t^{a_6-1} G_{66}^{60}\left(\frac{t}{x}\left|{}^{b_1-a_6, b_2-a_6, b_3-a_6, b_4-a_6, b_5-a_6\, 1-a_6}_{a_1-a_6, a_2-a_6, a_3-a_6, a_4-a_6, a_5-a_6, 0}\right.\right) \times$$

$$\times G_{66}^{60}\left(\varphi\left(\frac{z}{t}\left|{}^{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\, a_6}_{\cdot b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, 0}\right.\right)dt, \quad (5)$$

Полагая во внутреннем интеграле $t = xv$ и воспользовавшись формулой [2]

$$G_{pq}^{mn}\left(x\left|{}^{a_1, a_2, \ldots, a_p}_{b_1, b_2, \ldots b_q}\right.\right) = G_{pq}^{nm}\left(\frac{1}{x}\left|{}^{1-b_1, 1-b_2, \ldots, 1-b_q}_{1-a_1, 1-a_2, \ldots, 1-a_p}\right.\right), \quad (6)$$

получим

$$B[\varphi(x)] = \frac{d}{dx} \int_0^x K(\sigma)\varphi(z)dz, \quad (7)$$

где

$$K(\sigma) = \int_0^\infty v^{a_6-1} f_1(\sigma v) f_2(v)dv, \quad \sigma = \frac{x}{z} \quad (8)$$

$$f_1(v) = \begin{cases} 0, & 0 \le v \prec 1 \\ G_{66}^{06}\left(v\left|{}^{1-b_1, 1-b_2, 1-b_3, 1-b_4, 1-b_5, 1}_{1-a_1, 1-a_2, 1-a_3, 1-a_4, 1-a_5, 1-a_6}\right.\right), & v \ge 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$f_2(v) = \begin{cases} 0, & v \succ 1 \\ G_{66}^{06}\left(v\left|{}^{1-b_1, 1-b_2, 1-b_3, 1-b_4, 1-b_5, 1}_{1-a_1, 1-a_2, 1-a_3, 1-a_4, 1-a_5, 1-a_6}\right.\right), & 0 \le v \prec 1 \end{cases} \quad (10)$$

Для вычисления выражение (6) воспользуемся преобразованием Меллина [1].

На основании формулы [1]

$$x^{\delta_1} \int_0^\infty \xi^{\delta_2} g_1(x\xi) g_2(\xi) d\xi \to g_1^*(S+\delta_1) g_2^*(1-\delta_1+\delta_2-S), \quad (11)$$

из (8) имеем

$$K^*(S) \to f_1^*(S) f_2^*(a_6 - S), \quad (12)$$

Далее, используя формулы [2]

$$G_{pq}^{mn}\left(z\left|{}^{a_1, a_2, \ldots, a_p}_{b_1, b_2, \ldots, b_q}\right.\right) \to \Gamma\left[{}^{S+b_1, S+b_2, \ldots, S+b_m, 1-a_1-S, 1-a_2-S, \ldots, 1-a_n-S}_{S+a_{n+1}, S+a_{n+2}, \ldots, S+a_p, 1-b_{m+1}-S, 1-b_{m+2}-S, \ldots, 1-b_q-S}\right], \quad (13)$$

$$p' = q' \ge 1, \; m+n = p, \; \sum_{j=1}^n (a_j - b_j) \succ 0$$

из (9) и (10) находим

$$f_1^*(S) = \Gamma\begin{bmatrix} b_1-S, b_2-S, b_3-S, b_4-S, b_5-S, -S \\ a_1-S, a_2-S, a_3-S, a_4-S, a_5-S, a_6-S \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\operatorname{Re} S \prec \min\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, 0\}$$

$$f_2^* = \Gamma\begin{bmatrix} s+a_1-a_6, s+a_2-a_6, s+a_3-a_6, s+a_4-a_6, s+a_5-a_6, S \\ s+b_1-a_6, s+b_2-a_6, s+b_3-a_6, s+b_4-a_6, s+b_5-a_6, s+1-a_6 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Подставляя (14), (15) в (12), имеем

$$K^*(S) = \Gamma\begin{bmatrix} -S \\ 1-S \end{bmatrix}, \; S \prec 0, \tag{16}$$

Принимая во внимание (16) и формуле [2]

$$(z-1)_+^{c-1} + \Gamma(c)\Gamma\begin{bmatrix} 1-C-S \\ 1-S \end{bmatrix}, \; \operatorname{Re} C \succ 0, \;\; \operatorname{Re} S \prec 1 - \operatorname{Re} C, \tag{17}$$

Из (7) получим

$$B\left[\varphi(x)\right] = \frac{d}{dx} D_{0x}^{-1}\varphi(x) = D_{0x}^{0}\varphi(x)$$

Отсюда следует справедливость тождество (3)

Литература

[1]. Прудников А.П., Бричков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука 1986, 800 с.

[2]. Маричев О.И. «Метод вычисления интегралов от специальных функций» Минск.: Наука и техника. 1978, 312с.

[3]. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.Н. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука и техника. 1987.688 с.