Scientific-technical journal

Volume 3 | Issue 4 Article 2

10-7-2020

SOME QUESTIONS OF THE THEORY OF POLARIZED RADIATION TRANSFER IN AN ISOTROPIC MEDIUM WITH A FINITE OPTICAL THICKNESS

M M. Sobirov
Ferghana State University

J Yu Rozikov
Ferghana State University

Follow this and additional works at: https://uzjournals.edu.uz/ferpi

Recommended Citation

Sobirov, M M. and Rozikov, J Yu (2020) "SOME QUESTIONS OF THE THEORY OF POLARIZED RADIATION TRANSFER IN AN ISOTROPIC MEDIUM WITH A FINITE OPTICAL THICKNESS," *Scientific-technical journal*: Vol. 3 : Iss. 4 , Article 2.
Available at: https://uzjournals.edu.uz/ferpi/vol3/iss4/2

This Article is brought to you for free and open access by 2030 Uzbekistan Research Online. It has been accepted for inclusion in Scientific-technical journal by an authorized editor of 2030 Uzbekistan Research Online. For more information, please contact sh.erkinov@edu.uz.

FUNDAMENTAL SCIENCES

УДК 535.343

SOME QUESTIONS OF THE THEORY OF POLARIZED RADIATION TRANSFER IN AN ISOTROPIC MEDIUM WITH A FINITE OPTICAL THICKNESS

Sobirov M.M., Rozikov J.Yu.

Ferghana State University

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ПОЛЯРИЗОВАННОГО ИЗЛУЧЕНИЯ В ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ С КОНЕЧНОЙ ОПТИЧЕСКОЙ ТОЛЩИНОЙ

Собиров М.М., Розиков Ж.Ю.

Ферганский государственный университет

ЧЕКЛИ ОПТИК ҚАЛИНЛИКДАГИ ИЗОТРОПИК МУҲИТДА ҚУТБЛАНГАН НУРЛАНИШ КЎЧИРИЛИШИНИНГ АЙРИМ МАСАЛАЛАРИ

Собиров М.М., Розиков Ж.Ю.

Фарғона давлат университети

Abstract. *The theory of polarized radiation transport in isotropic media with finite optical thicknesses has been developed within the Chandrasecar model. Angular characteristics of polarization degree and intensity of diffusely reflected and transmitted radiation with the Rayleigh scattering law are calculated. Changes in the secondary radiation characteristics depending on the value of the optical thickness of the medium and the quantum output for a single scattering act are investigated.*

Keywords: Transfer equation, scattering. polarized radiation, optical thickness, S- and T-matrix parameters, diffuse reflection and transmission.

Аннотация: *развита теория переноса поляризованного излучения в изотропных средах с конечной оптической толщиной, в рамках модели Чандрасекара. Рассчитаны угловые характеристики степени поляризации и интенсивности диффузно отраженного и пропущенного излучений с рэлеевским законом рассеяния. Исследовано изменения характеристики вторичного излучения в зависимости от значения оптической толщины среды и квантового выхода для единичного акта рассеяния.*

Ключевые слова: уравнение переноса, рассеяние. поляризованное излучение, оптическая толщина, параметры Стокса, S- и T- матрицы, диффузное отражение и пропускание.

Аннотация: *мақолада изотроп, кенглиги чегераланган ясси паралелл мухитларда ёруғлик нурланиши тарқалишининг Чандрасекар назарияси ривожлантирилган. Рэлей қонуни асосида сочилаётган ёруғлик нурланишининг мухитдан диффуз қайтиши ва ундан ўтишида қутбланганлик даражасининг, мухитга тушаётган ва ундан чиқаётган нурланиш оқимининг бурчак характеристикалари хисобланган. Иккиламчи нурланиш характеристикаларини мухитнинг оптик қалинлиги ва бир марта сочилишнинг квант чиқишининг қийматига боғлиқлиги ўрганилган.*

Таянч сўзлар: нурланишнинг тарқалиш тенгламаси, сочилиш, қутбланган нурланиш, оптик қалинлик, Стокс параметрлари, S- и T- матрицалар, диффуз қайтиш ва ўтказилиш.

1. Вв*ед*ение. В классических работах Релея и Тиндаля было положено основа к изучению законов рассеяния светового излучения при распространении в

светорассеивающих средах. При помощи этих законов были установлены основные причины оптических явлений, наблюдающихся в слоях атмосферы Земли. В дальнейшем, разными учёными были разработаны уравнения, описывающие перенос излучения в светорассеивающих средах и определяющие пространственное распределение интенсивности излучения с учетом процессов многократного рассеяния, а также, параллельно были разработаны математические методы решения этих уравнений.

В работах Чандрасекара был разработан метод решения уравнения переноса для плоскопараллельных сред, основанный на принципы инвариантности Амбарцумяна [1]. Основное преимущество этой теории заключается в том, что помимо пространственного распределения интенсивности, она позволяет учитывать состояние поляризации излучения в виде параметров Стокса, а также угловое распределение интенсивности рассеянного излучения в каждом акте рассеяния. Построенная теория была успешно применена для анализа различных задач астрофизики и физики атмосферных явлений, когда плотность светорассеивающей среды мала.

В работах [2,3,5-8], теория переноса поляризованного излучения для полубесконечных сред, построенная Чандрасекаром, была обобщена для кубических и одноосных кристаллов в случаях, когда наблюдается сильное взаимодействие излучения со средой. В частности, в [2,3] при решении уравнения для $\mathbf{S}_R$-матрицы было предложено метод расчёта, основанный на факторизованный вид $\mathbf{S}$-матрицы и $\mathbf{P}(\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}')$-рэлеевской матрицы единичного акта рассеяния. Такой метод является обобщением метода Ленобле [4], где было показано, что член $\mathbf{S}$-матрицы, не зависящей от азимута $\mathbf{S}^{(0)}$ имеет факторизованный вид. При помощи построенной теории были изучены угловые и спектральные характеристики люминесценции экситонов и экситон-поляритонов, в случае возбуждении кристалла резонансным излучением с учётом влияние многократного зеркального отражения излучения от внутренней границы кристалла [2,3]. На основе развитой теории в работах [5,6] были исследованы эффект Ханле с учётом многократного рассеяния поляризованного излучения в продольном магнитном поле, кинетика затухания интенсивности и поляризации вторичного излучения, при резонансном импульсном возбуждении экситонов в кубических кристаллах. В [7,8] уравнение переноса поляризованного излучения было обобщено с учетом спектральной характеристики резонансного излучения в кристаллах при упругом и неупругом рассеянии экситонов и поляритонов на примесях и фононах. Были анализированы экспериментальные спектры отражения двукратного Мандельштам-Бриллюэновского и комбинационного рассеяния экситонных поляритонов на акустических и оптических фононах в кубических и одноосных кристаллах.

В монографии [1], Чандрасекаром также было исследовано перенос излучения в средах с конечной толщиной, когда излучение падает на слой мутной среды, часть излучения рассеивается назад, а часть излучения рассеивается вперёд и выходит наружу, проходя весь слой. Расчёт был проведён для консервативных сред, когда значение квантового выхода однократного рассеяния равно $\tilde{\omega}_0 = 1$. Здесь, $\tilde{\omega}_0 = \sigma / \alpha$, где $\alpha = \alpha_{погл} + \sigma$, α- коэффициент экстинкции, $\alpha_{погл}$- коэффициент истинного поглощения, σ- коэффициент рассеяния. В дальнейшем проблемы переноса поляризованного излучения в слоях атмосферы с конечной толщиной, рассматривались многими авторами (см. например, [9,10,11]).

В настоящей работе теория переноса поляризованного излучения в изотропных средах с конечной толщиной, развивается с использованием методики работ [2,3]. Выполнен расчёт интенсивности и поляризации диффузно отраженного и пропущенного излучений, при возбуждении среды с конечной толщиной естественным и поляризованным излучением.

Известно, что в случае сред с конечной толщиной для описания диффузного излучения с многократным рассеянием вводится две матрицы $\mathbf{S}(\tau_1,\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}_0)$ и $\mathbf{T}(\tau_1,\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}_0)$, которые зависят от толщины среды. Эти матрицы связывают интенсивности первичного падающего излучения, с интенсивностью вторичного, отраженного назад излучения и излучение прошедшего через толщу среды. Здесь, τ_1- оптическая толщина среды между двумя граничными слоями, определяется соотношением

$$\tau_1(\mathrm{s}_1,\mathrm{s}_2)=\int_{s_1}^{s_2}\tilde{\alpha}\rho ds\,, \tag{1}$$

где ρ- плотность среды, $\tilde{\alpha}$- коэффициент поглощения, рассчитанный на единицу массы, s_1,s_2- геометрические точки [1]. В случае изотропной среды, когда плотность среды и коэффициент экстинкции постоянная величина, безразмерную величину τ можно приставить в виде $\tau=\alpha z$, где z - геометрическое расстояние между двумя точками.

2. Уравнения для матрицы диффузного отражения и пропускания. Приведение их к каноническим видам. Интенсивность и поляризацию излучения, распространяющегося в направлении единичного вектора $\mathbf{\Omega}=\mathbf{\Omega}(\theta,\varphi)$ (где, θ- полярный угол, определяемый направлением векторов $\mathbf{n^0}$ и $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{n^0}$- нормаль к поверхности кристалла, φ- азимутальный угол), описываем матрицей Стокса:

$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix} I_l \\ I_r \\ U \\ V \end{bmatrix},\ I_l=d_{ll},\ I_r=d_{rr},\ \mathrm{U}=2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{d}_{lr},\ V=2\,\mathrm{Im}\,d_{lr}, \tag{2}$$

где I_l и I_r-интенсивности в l и r поляризациях, единичный орт $\mathbf{l}$ лежит в плоскости векторов $\mathbf{n^0}$ и $\mathbf{\Omega}$, а $\mathbf{r}$-перпендикулярен ей, $d_{ij}\approx(E_i,E_j^*)$. Здесь $i,j=l,r$, E_l и E_r $-$соответствующие компоненты электрического поля световой волны.

Пусть на среду с оптической толщиной τ_1 падает плоская световая волна с полным потоком πF и распространяется в направлении $\mathbf{\Omega}_0(\theta_0,\varphi_0)$, задаваемым углами θ_0 и φ_0. В этом случае уравнение для матрицы $\mathbf{I}(\tau,\mathbf{\Omega})$ рассеянного излучения на глубине τ, можно представить в виде [1]

$$\mu\frac{d\mathbf{I}(\tau,\mathbf{\Omega})}{\mathrm{d}\tau}=\mathbf{I}(\tau,\mathbf{\Omega})-\frac{\tilde{\omega}_0}{4\pi}\int_0^1 d\mu'\int_0^{2\pi} d\varphi'\mathbf{P}(\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}')\mathbf{I}(\tau,\mathbf{\Omega}')-\frac{\tilde{\omega}_0}{4}\exp(-\tau/\mu_0)\mathbf{P}(\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}_0)\mathbf{F}$$

(3)

где $\mathbf{P}(\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}')$- матрица однократного рэлеевского рассеяния с размером (4x4). Уравнение (3) описывает изменение интенсивности $\mathbf{I}(\tau,\mathbf{\Omega})$, в поле излучения, на слое τ. К изменению излучения на слое способствует два фактора; первое, ослабленное падающее первичное излучение $\pi\mathbf{F}\exp(-\tau/\mu_0)$ которое проникает до уровня τ; второе, поле диффузного излучения $\mathbf{I}(\tau,\mathbf{\Omega})$, возникающее вследствие многократного рассеяния. В итоге часть излучения находящиеся в среде отражается назад и выходит через слой $\tau=0$, а часть излучения выходит наружу через слой $\tau=\tau_1$ и образует прошедшего излучения.

Матрица $\mathbf{T}(\tau,\theta,\varphi,\theta_0,\varphi_0)$, связывающее падающее излучение и излучение прошедшего через всю среду, имеет такой же характер симметрии, как $\mathbf{S}(\tau,\theta,\varphi,\theta_0,\varphi_0)$ - матрица, для полубесконечной среды. Связь интенсивностей диффузно отражённого и прошедшего излучений с падающим излучением выражается как

$$\mathbf{I}_{отр}(\tau=0,\mathbf{\Omega})=(\tilde{\omega}/4\mu)\mathbf{S}(\tau_1,\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega_0})\mathbf{F}(\tau=0,\bar{\mathbf{\Omega}}_\mathbf{0}), \quad (4)$$

$$\mathbf{I}_{проп}(\tau=\tau_1,\bar{\mathbf{\Omega}})=(\tilde{\omega}/4\mu)\mathbf{T}(\tau_1,\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega_0})\mathbf{F}(\tau=0,\bar{\mathbf{\Omega}}_\mathbf{0}). \quad (5)$$

Уравнения для $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$ - матрицы, определяются из уравнения переноса с использованием принципа инвариантности Амбарцумяна, их можно представить, как и в [3], в следующем компактном виде

$$(1/\mu+1/\mu_0)\mathbf{S}(\tau_1,\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega_0})=\mathbf{G}^{S1}(\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega_0})+\frac{\tilde{\omega}}{4\pi}\int_0^1\frac{d\mu'}{\mu'}\int_0^{2\pi}d\varphi'\mathbf{S}(\tau_1,\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}')\mathbf{G}^{S1}(\bar{\mathbf{\Omega}}',\mathbf{\Omega_0})-$$

$$\{\exp(-\tau_1/\mu)\mathbf{G}^{S2}(\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega_0})+\frac{\tilde{\omega}}{4\pi}\int_0^1\frac{d\mu'}{\mu'}\int_0^{2\pi}d\varphi'\mathbf{T}(\tau_1,\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}')\mathbf{G}^{S2}(\mathbf{\Omega}',\mathbf{\Omega_0})\}. \quad (6)$$

$$(1/\mu-1/\mu_0)\mathbf{T}(\tau_1,\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega_0})=\mathbf{G}^{T1}(\bar{\mathbf{\Omega}},\mathbf{\Omega_0})+\frac{\tilde{\omega}}{4\pi}\int_0^1\frac{d\mu'}{\mu'}\int_0^{2\pi}d\varphi'\mathbf{S}(\tau_1,\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}')\mathbf{G}^{T1}(\mathbf{\Omega}',\mathbf{\Omega_0})-$$

$$\{\exp(-\tau_1/\mu)\mathbf{G}^{T2}(\bar{\mathbf{\Omega}},\mathbf{\Omega_0})+\frac{\tilde{\omega}}{4\pi}\int_0^1\frac{d\mu'}{\mu'}\int_0^{2\pi}d\varphi'\mathbf{T}(\tau_1,\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}')\mathbf{G}^{T2}(\bar{\mathbf{\Omega}}',\mathbf{\Omega_0})\}, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{G}^{S1}(\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}')=\mathbf{P}(\mathbf{\Omega},\bar{\mathbf{\Omega}}')+\frac{\tilde{\omega}}{4\pi}\int_0^1\frac{d\mu''}{\mu''}\int_0^{2\pi}d\varphi''\mathbf{P}(\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}'')\mathbf{S}(\tau_1,\mathbf{\Omega}'',\mathbf{\Omega}'), \quad (8)$$

$$\mathbf{G}^{S2}(\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}')=\exp(-\tau_1/\mu_0)\mathbf{P}(\mathbf{\Omega},\bar{\mathbf{\Omega}}')+\frac{\tilde{\omega}}{4\pi}\int_0^1\frac{d\mu''}{\mu''}\int_0^{2\pi}d\varphi''\mathbf{P}(\mathbf{\Omega},\bar{\mathbf{\Omega}}'')\mathbf{T}(\tau_1,\mathbf{\Omega}'',\mathbf{\Omega}'), \quad (9)$$

$$\mathbf{G}^{T1}(\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}')=\exp(-\tau_1/\mu_0)\mathbf{P}(\mathbf{\Omega},\bar{\mathbf{\Omega}}')+\frac{\tilde{\omega}}{4\pi}\int_0^1\frac{d\mu''}{\mu''}\int_0^{2\pi}d\varphi''\mathbf{P}(\mathbf{\Omega},\bar{\mathbf{\Omega}}'')\mathbf{T}(\tau_1,\mathbf{\Omega}'',\mathbf{\Omega}'), \quad (10)$$

$$\mathbf{G}^{T2}(\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}')=\mathbf{P}(\mathbf{\Omega},\bar{\mathbf{\Omega}}')+\frac{\tilde{\omega}}{4\pi}\int_0^1\frac{d\mu''}{\mu''}\int_0^{2\pi}d\varphi''\mathbf{P}(\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}'')\mathbf{S}(\tau_1,\mathbf{\Omega}'',\mathbf{\Omega}'), \quad (11)$$

$\bar{\mathbf{\Omega}}=\bar{\mathbf{\Omega}}(-\mu,\varphi)$.

Здесь воспользовались обозначениями работы [3]: в базисе (2) матрицу Релея однократного рассеяния $\mathbf{P}(\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega_0})$, можно представить в следующем факторизованном виде

$$\mathbf{P}(\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega}')=3/2\mathbf{U}\mathbf{\Theta}(\mathbf{\Omega})\mathbf{\Theta}^+(\mathbf{\Omega}')\mathbf{U}^{-1}, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&-i&i\end{bmatrix},\qquad \mathbf{\Theta}_{ij,k\eta}=e^*_{ik}\left(\vec{\Omega}\right)e_{j\eta}\left(\vec{\Omega}\right),\quad i,j=l,r;\ k,\eta=x,y,z$$

$\mathbf{\Theta}(\mathbf{\Omega})$ - матрица (4x9). Это обстоятельство позволяет матрицы рассеяния - $\mathbf{S}$ и пропускания - $\mathbf{T}$, также представить в факторизованном виде

$$(1/\mu+1/\mu_0)\mathbf{S}(\tau_1,\mu,\varphi,\mu_0,\varphi_0)=3/2\mathbf{U}\mathbf{\Theta}(\mathbf{\Omega})((\mathbf{X}(\mu)\mathbf{X}^+(\mu_0)-\mathbf{Y}(\mu)\mathbf{Y}^+(\mu_0))\mathbf{\Theta}^+(\mathbf{\Omega_0})\mathbf{U}^{-1}, \quad (13)$$

$$(1/\mu-1/\mu_0)\mathbf{T}(\tau_1,\mu,\varphi,\mu_0,\varphi_0)=3/2\mathbf{U}\mathbf{\Theta}(\mathbf{\Omega})(\mathbf{Y}(\mu)\mathbf{X}^+\mu_0)-\mathbf{X}(\mu)\mathbf{Y}^+(\mu_0))\mathbf{\Theta}^+(\mathbf{\Omega_0})\mathbf{U}^{-1}. \quad (14)$$

Если подставить (13),(14) в (6),(7), то получается систему нелинейных интегральных уравнений для $\mathbf{X}(\mu)$ и $\mathbf{Y}(\mu)$ матриц, с параметром τ_1,

$$\mathbf{X}(\mu)=\mathbf{1}+\mu\tilde{\omega}_0\int_0^1 d\mu'\frac{\mathbf{\Psi}(\mu')}{\mu+\mu'}[\mathbf{X}(\mu)\mathbf{X}^+(\mu')-\mathbf{Y}(\mu)\mathbf{Y}^+(\mu')], \quad (15)$$

$$\mathbf{X}^+(\mu)=\mathbf{1}+\mu\tilde{\omega}_0\int_0^1 d\mu'\frac{1}{\mu+\mu'}[\mathbf{X}(\mu)\mathbf{X}^+(\mu')-\mathbf{Y}(\mu)\mathbf{Y}^+(\mu')]\mathbf{\Psi}(\mu'),$$

(16)

$$\mathbf{Y}(\mu)=\mathbf{1}\cdot\exp(-\tau_1/\mu)+\mu\tilde{\omega}_0\int_0^1 d\mu'\frac{\mathbf{\Psi}(\mu')}{(\mu-\mu')}[\mathbf{Y}(\mu)\mathbf{X}^+(\mu')-\mathbf{X}(\mu)\mathbf{Y}^+(\mu')],$$

(17)

$$\mathbf{Y}^+(\mu)=\mathbf{1}\cdot\exp(-\tau_1/\mu)+\mu\tilde{\omega}_0\int_0^1 d\mu'\frac{1}{(\mu-\mu')}[\mathbf{Y}(\mu)\mathbf{X}^+(\mu')-\mathbf{X}(\mu)\mathbf{Y}^+(\mu')]\mathbf{\Psi}(\mu'), \quad (18)$$

где $\mathbf{1}$-единичная матрица (9x9). В полученных уравнениях матрицы $\mathbf{X}(\mu)$ и $\mathbf{Y}(\mu)$ размерности (9x9) определяются с помощью матрицы $\mathbf{\Psi}(\mu)$

$$\mathbf{\Psi}(\mu)=\frac{3}{8\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\mathbf{\Theta}^+(\Omega)\mathbf{\Theta}(\Omega). \quad (19)$$

Как было показано в [3], характеристическая матрица $\mathbf{\Psi}(\mu)$ вещественна и является чётной функцией μ, при помощи унитарного преобразования её можно представить в квазидиагональном виде. Это матрица содержит один блок с размерностью 2x2:

$$\mathbf{\Psi}^{(0)}(\mu)=\frac{3}{4}\mathbf{M}^+(\mu)\mathbf{M}(\mu), \quad \mathbf{M}(\mu)=\begin{bmatrix}\mu^2 & \sqrt{2}(1-\mu^2)\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \quad (20)$$

и четыре различные функции $\Psi_v^{(0)}(\mu)=3\mu^2/4$, $\Psi^{(1)}(\mu)=3(1-\mu^2)(1+2\mu^2)/8$, $\Psi_r^{(1)}(\mu)=3(1-\mu^2)/8$, $\Psi^{(2)}(\mu)=3(1+2\mu^2)^2/16$. Из этих функций, $\Psi_v^{(0)}(\mu)$ в диагонали матрицы $\mathbf{\Psi}(\mu)$ содержится один раз, а остальные три функции по два раза. $\mathbf{\Psi}^{(0)}(\mu)$ матрица с функцией $\Psi_v^{(0)}(\mu)$ вместе образуют матрицу с размером 4x4,

$$\begin{bmatrix}\mathbf{\Psi}^{(0)}(\mu) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \psi_v^{(0)}\end{bmatrix}. \quad (21)$$

Функции $\Psi^{(1)}(\mu)$ и $\Psi_r^{(1)}(\mu)$, также образуют матрицу 4x4 в виде

$$\begin{bmatrix}\Psi^{(1)}(\mu)\mathbf{E} & 0\\ 0 & \Psi_r^{(1)}\end{bmatrix}, \quad (22)$$

Здесь, $\mathbf{E}$ единичная матрица 3х3, а функция $\Psi^{(2)}(\mu)$ не связано с остальными характеристическими функциями [3]. В уравнениях (15)-(18) матрицы $\mathbf{X}(\mu),\mathbf{Y}(\mu)$, также имеют аналогичную блочную структуру, как матрица $\mathbf{\Psi}(\mu)$.

$\mathbf{S}$, $\mathbf{T}$ -матрицы можно выразить в виде трёх независимых слагаемых [1],

$$\mathbf{S}(\tau_1,\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega_0}) = \mathbf{Q}\{(3/4)\mathbf{S}^{(0)}(\tau_1,\mu,\mu_0) + [(1-\mu^2)(1-\mu_0^2)]^{1/2}\mathbf{S}^{(1)}(\tau_1,\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega_0})\mathbf{P}^{(1)}(\mu,\varphi,-\mu_0,\varphi_0) + $$
$$+S^{(2)}(\tau_1,\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega_0})\mathbf{P}^{(2)}(\mu,\varphi,-\mu_0,\varphi_0)\}, \tag{23}$$

$$\mathbf{T}(\tau_1,\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega_0}) = \mathbf{Q}\{(3/4)\mathbf{T}^{(0)}(\tau_1,\mu,\mu_0) + [(1-\mu^2)(1-\mu_0^2)]^{1/2}\mathbf{T}^{(1)}(\tau_1,\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega_0})\mathbf{P}^{(1)}(\mu,\varphi,-\mu_0,\varphi_0) + $$
$$+T^{(2)}(\tau_1,\mathbf{\Omega},\mathbf{\Omega_0})\mathbf{P}^{(2)}(\mu,\varphi,-\mu_0,\varphi_0)\}. \tag{24}$$

Здесь $\mathbf{S}^{(i)},\mathbf{T}^{(i)}$ определяются через $X(\mu),Y(\mu)$ функций, образующих $\mathbf{X}(\mu),\mathbf{Y}(\mu)$ матриц. При значении i=1, матрицы $\mathbf{S}^{(1)},\mathbf{T}^{(1)}$ представляются в виде (21),

$$\mathbf{S}^{(1)} = \begin{bmatrix} S^{(1)}\mathbf{E}\,0 & \\ 0 & S_{44}^{(1)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}^{(1)} = \begin{bmatrix} T^{(1)}\mathbf{E}\,0 & \\ 0 & T_{44}^{(1)} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{S}^{(1)} = \begin{bmatrix} S^{(1)}\mathbf{E} & 0 \\ 0 & S_{44}^{(1)} \end{bmatrix}, \mathbf{T}^{(1)} = \begin{bmatrix} T^{(1)}\mathbf{E} & 0 \\ 0 & T_{44}^{(1)} \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Значения функций $S^{(1)}$, $\mathrm{T}^{(1)}$ определяются с решением скалярных уравнений для $X^{(1)}(\mu)$, $Y^{(1)}(\mu)$ с характеристической функцией $\Psi^{(1)}(\mu)$, а компоненты $S_{44}^{(1)},\mathrm{T}_{44}^{(1)}$ представляются через $X_r^{(1)}(\mu)$, $Y_r^{(1)}(\mu)$ с характеристической функцией $\Psi_r^{(1)}(\mu)$. Они связаны между собой выражениями

$$(1/\mu_0 + 1/\mu)S^{(\mathrm{i})} = X^{(i)}(\mu)X^{+(i)}(\mu_0) - Y^{(i)}(\mu)Y^{+(i)}(\mu_0), \tag{26}$$

$$(1/\mu_0 - 1/\mu)T^{(\mathrm{i})} = Y^{(i)}(\mu)X^{+(i)}(\mu_0) - X^{(i)}(\mu)Y^{+(i)}(\mu_0). \tag{27}$$

При i=2, $S^{(2)},T^{(2)}$ определяются $X^{(2)}(\mu)$, $Y^{(2)}(\mu)$ функциями, с характеристической функцией $\Psi^{(2)}(\mu)$.

Решения для матрицы, не зависящихся от азимута $\mathbf{S}^{(0)}(\tau_1,\mu,\mu_0)$, $\mathbf{T}^{(0)}(\tau_1,\mu,\mu_0)$, представляется в виде

$$\mathbf{S}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_0^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}_{44}^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_0^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}_{44}^{(0)} \end{pmatrix}, \tag{28}$$

где $\mathbf{S}_0^{(0)},\mathbf{T}_0^{(0)}$ матрицы с размером 2х2. $S_{44}^{(0)},\mathrm{T}_{44}^{(0)}$ компоненты получаются несложным образом, как в (26) и (27),

$$(1/\mu_0 + 1/\mu)S_{44}^{(0)} = \frac{3}{2}\{-\mu\mu_0[\mathrm{X}_\nu(\mu)X_\nu^+(\mu_0) - Y_\nu(\mu)Y_\nu^+(\mu_0)]\}, \tag{29}$$

$$(1/\mu_0 - 1/\mu)T_{44}^{(0)} = \frac{3}{2}\{\mu\mu_0[\mathrm{Y}_\nu(\mu)X_\nu^+(\mu_0) - X_\nu(\mu)Y_\nu^+(\mu_0)]\}, \quad (30)$$

$X_\nu(\mu), Y_\nu(\mu)$ определяются характеристической функцией $\Psi_\nu(\mu) = (3/4)\mu^2$.

Аналитический вид $\mathbf{S}_0^{(0)}, \mathbf{T}_0^{(0)}$ матриц, не зависящихся от азимута, имеют более сложный вид, чем другие компоненты. В полубесконеяных средах для определение значение $\mathbf{S}_0^{(0)}$**,** по методике Чандрасекара достаточно две $H_l(\mu), H_r(\mu)$ - функций, а в случае учёта толщины среды четыре $X_l(\mu)$, $X_r(\mu)$, $Y_l(\mu)$, $Y_r(\mu)$- скалярных функций. А, по методике Ленобле, для полубесконечной среды $\mathbf{S}_0^{(0)}$-матрица определятся через $\mathbf{H_0^{(0)}}$ матрицей, с размером 2x2 в факторизованном виде [4]. В нашем случае, значения $\mathbf{S}_0^{(0)}, \mathbf{T}_0^{(0)}$-матрицы определяются восемью функциями входящие в компоненты матриц $\mathbf{X}^{(0)}(\mu), \mathbf{Y}^{(0)}(\mu)$, с размерностью 2x2,

$$(1/\mu_0 + 1/\mu)\mathbf{S}_0^{(0)} = \mathbf{L}(\mu)\mathbf{L}^+(-\mu_0) - \mathbf{N}(\mu)\mathbf{N}^+(\mu_0),$$
$$(1/\mu_0 - 1/\mu)\mathbf{T}_0^{(0)} = \mathbf{N}(\mu)\mathbf{L}^+(\mu_0) - \mathbf{L}(\mu)\mathbf{N}^+(\mu_0), \quad (31)$$

где,

$$\mathbf{L}(\mu) = \mathbf{M}(\mu)\mathbf{X}^{(0)}(\mu), \quad \mathbf{L}^+(\mu) = \mathbf{X}^{+(0)}(\mu)\mathbf{M}^+(\mu),$$
$$\mathbf{N}(\mu) = \mathbf{M}(\mu)\mathbf{Y}^{(0)}(\mu), \quad \mathbf{N}^+(\mu) = \mathbf{Y}^{+(0)}(\mu)\mathbf{M}^+(-\mu). \quad (32)$$

Матрицы $\mathbf{X}^{(0)}(\mu), \mathbf{Y}^{(0)}(\mu)$, определяются решением системы уравнений (15)-(18).

Заключение. Таким образом, решение задачу о диффузном отражении и пропускания поляризованного излучения, в случае рэлеевского рассеяния изотропной средой с конечной толщиной, удаётся решить в самом общем аналитическом виде и сводить к решению не сложных интегральных уравнений для функциии-матрицы $\mathbf{X}^{(i)}(\mu), \mathbf{Y}^{(i)}(\mu)$, причем первая из них не зависит, а вторая параметрически зависит от τ, как и от $\tilde{\omega}_0$. К численному решению этих уравнений будет посвящена отдельная работа.

Авторы благодарят профессора Н.Х. Юлдашева за полезные замечания и советы после чтения рукописи данной статьи.

Литература

[1]. Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии. М.: ИИЛ, 1953.431 с.
[2]. Е.Л.Ивченко, Г.Е.Пикус, Н.Х.Юлдашев. Перенос поляризованного излучения в кристаллах в экситонной области спектра. Влияние переизлучения.ЖЭТФ,1980, 79, 1573-1590.
[3]. Е.Л.Ивченко, Г.Е.Пикус, Н.Х.Юлдашев. Перенос поляризованного излучения в кристаллах в экситонной области спектра. Пояритонные эффекты. ЖЭТФ,1981, 80, 1228-1246.
[4]. J.Lenoble. Importance de la polarization dans le rayonnement diffuse par une atmosphere planetair. JQSRT, 10, 533, 1970.
[5]. М.М.Собиров, Н.Х.Юлдашев. Теория переноса поляризованного излучения в кубических кристаллах в продольном магнитном поле в области экситонного резонанса. ЖЭТФ, 1984, 87, 677-690.
[6]. Г.Е.Пикус, М.М.Собиров, Н.Х.Юлдашев. Кинетика поляризованного излучения при резонансном импульсном возбуждении экситонов в кристаллах. ЖЭТФ, 1985, 97, 635-641.
[7]. Е.Л.Ивченко, М.М.Собиров. Особенность в спектре двухфононного Мандельштамм-Бриллюэновского рассеяния назад ФТТ,1985, 27, 1096-1104.
[8]. Е.Л.Ивченко, М.М.Собиров. Теория двухфононного резонансного рассеяния света с участием акустического и оптического фононов. ФТТ,1986, 228, 2023-2031.
[9]. Под.ред.Ж.Ленобле. Перенос радиации в светорассеивающих и поглощающих атмосферах. Стандартные методы расчёта. Гидрометиздат. 2017.
[10]. Э.Мак-Картни. Оптика атмосферы, Мир, 1979.

[11]. Ю.М.Тимофеев, А.В.Васильев. Теоретические основы атмосферной оптики. Санкт-Петербург, Наука, 2003.