Scientific-technical journal

Volume 3 | Issue 3 Article 2

8-7-2020

FLUTTER OF A VISCOELASTIC ROD PIVOTALLY SUPPORTED AT THE ENDS

R A. Abdikarimov
Tashkent Financial Institute

U Y. Akbarov
Kokand State Pedagogical Institute

Sh Y. Pulatov
Kokand branch of Tashkent State Technical University

M M. Mansurov
Kokand branch of Tashkent State Technical University

FUNDAMENTAL SCIENCES

FLUTTER OF A VISCOELASTIC ROD PIVOTALLY SUPPORTED AT THE ENDS

Abdikarimov R.A., Akbarov U.Y., Pulatov Sh.Y., Mansurov M.M.

[1]Tashkent Financial Institute, [2]Kokand State Pedagogical Institute,
[3]Kokand branch of Tashkent State Technical University

ФЛАТТЕР ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ ШАРНИРНО-ОПЕРТОГО ПО КОНЦАМ

Абдикаримов Р.А., Акбаров У.Й. , Пулатов Ш.Й., Мансуров М.М.

[1] Ташкентский финансовый институт, [2] Кокандский государственный педагогический институт,
[3] Кокандский филиал Ташкентского государственного технического университета

ЧЕТЛАРИ ШАРНИРЛИ МАХКАМЛАНГАН ҚОВУШҚОҚ-ЭЛАСТИК СТЕРЖЕННИ ФЛАТТЕР ҲОЛАТИ

Абдикаримов Р.А., Акбаров У.Й. , Пулатов Ш.Й., Мансуров М.М.

[1]Тошкент молия институти, [2]Қўқон давлат педагогика институти,
[3]Тошкент давлат техника университети, Қўқон филиали

Abstract. *This article discusses the flutter problem of a physically nonlinear viscoelastic rod in a gas stream, taking into account nonlinear dependencies. A statement and a method for solving the flutter problem of a viscoelastic rod are given taking into account the physical and aerodynamic nonlinearities.*

Keywords: viscoelasticity, rod, flutter, physical nonlinearity, aerodynamic nonlinearity, Bubnov-Galerkin method, relaxation core, numerical method, nonlinear integro-differential equation.

Аннотация. *В данной статье рассматривается задача о флаттере физически нелинейного вязкоупругого стержня в потоке газа с учетом нелинейных зависимостей. Приведена постановка и метод решения задачи флаттера вязкоупругого стержня с учетом физической и аэродинамической нелинейностей.*

Ключевые слова: *вязкоупругость*, стержень, флаттер, физическая нелинейность, аэродинамическая нелинейность, метод Бубнова-Галёркина, ядро релаксации, численный метод, нелинейное интегро-дифференциальное уравнение.

Аннотация. *Ушбу мақолада чизиқсиз боғликларни ҳисобга олган ҳолда газ оқимидаги физик чизиқсиз қовушқоқ эластик стерженнинг флаттер ҳолати ҳақидаги масала кўрилмоқда. Масаланинг қўйилиши, физик ва аэродинамик чизиқсиз қовушқоқ эластик стерженнинг флаттер ҳолати учун масалани ечиш усули келтирилган.*

Таянч сўзлар: қовушқоқ-эластик, флаттер, физик чизиқсизлик, аэродинамик чизиқсизлик, Бубнов-Галёркин усули, релаксация ядроси, сонли усул, чизиқсиз интеграл-дифференциал тенглама.

Введение. Новые материалы, обладающие нелинейной диаграммой деформирования, например, композиты, сплавы и некоторые виды металлов широко применяются в различных областях современной техники: строительстве, авиастроении, машиностроении т.д. Поэтому исследования конструкций на колебания и динамическую устойчивость с учетом физической нелинейности материала являются актуальными.

Работы, посвященные проблемам флаттера элементов тонкостенных конструкций в упругой постановке достаточно много. Анализировать их объем статьи не позволяет, в связи с этим остановимся лишь на двух работах, где рассматриваются колебательные процессы с учетом физической нелинейности.

В [1] предлагается методика расчета на колебания и динамическую устойчивость стержней, имеющих нелинейную диаграмму деформирования материала. В качестве примера выполнен расчет стержня, который шарнирно закреплен по концам и подвергается действию динамической нагрузки. По результатам расчета построены графики зависимости стрелы прогиба стержня от параметра времени.

В [2] излагается методы решения линейных и нелинейных квазистатических и динамических задач теории вязкоупругости. Показана эффективность метода степенного ряда для решения линейных и нелинейных слабо-сингулярных интегральных уравнений наследственной теории вязкоупругости. На основе метода Бубнова-Галеркина в сочетании с методом степенного ряда разработан и реализован на ЭВМ единый вычислительный алгоритм для исследования широкого класса краевых задач статики и динамики теории вязкоупругости балок, пластин и оболочек в геометрически и физически нелинейной постановке.

Несмотря на наличие многочисленных работ, посвященных физически нелинейных колебаний и устойчивости стержней, до настоящего времени мало исследовано флаттер вязкоупругого стержня, учитывающие одновременно и физическую и аэродинамическую нелинейностей. И это положение показывает актуальность данного исследования.

Математическая модель. Известно, что момент наступления флаттера элементов летательных аппаратов (ЛА), предсказываемый линейной теорией, не всегда является катастрофическим, как это имеет место [3-5], например, при флаттере обшивки крыльев.

Исследование явления флаттера элементов ЛА в нелинейной постановке приводит к весьма сложным уравнениям, эффективное решение которых возможно лишь с помощью приближенных методов и современных высокопроизводительных компьютеров.

В работе изучается нелинейный флаттер обшивки крыльев шарнирно опертых по концам. Одномерная стержневая модель с учетом переменности ширины и толщины позволяет более правильно учесть реальные формы крыла самолета.

Рассмотрим задачу о флаттере вязкоупругого стержня с учетом физической нелинейности [2]

$$\sigma = (1 - R^*)(m_1\varepsilon + m_2\varepsilon^3), \quad \varepsilon = u_x, \ u = -zw_x \tag{1}$$

здесь

$$R^* f(t) = \int_0^t R(t-\tau) f(\tau) d\tau$$

или

$$\sigma = (1 - R^*)(-m_1 z w_{xx} - m_2 z^3 w_{xx}^3) \tag{2}$$

где m_1 и m_2 упругие постоянные, определяющие в процессе испытаний материала на растяжение или кручение, причем $m_2<0$ для материала мягких, а $m_2>0$ жестких характеристик, $R(t)$ – ядро наследственности имеющее слабо-сингулярные особенности типа Абеля, E – модуль упругости.

Следует учитывать также влияние аэродинамических нелинейностей. Учет этих нелинейностей важен при больших числах Маха М. Так как колебания конструкций летательного аппарата в полете вызывают изменения аэродинамического давления на колеблющейся поверхности, что в свою очередь сказывается на характере самих колебаний. Если летательный аппарат подвергается действию сверхзвукового потока, обозначим скорость невозмущенного потока через U, то числа Маха $M = U / c_0 > 2$ (где через c_0 обозначен скорость звука на бесконечности), для определения нормального давления на поверхности принимается так называемая «поршневая» теория [6,7,8].

По одномерной теории газа давление газа на поршень [6]

$$p = p_\infty \left(1 + \frac{\chi - 1}{2}\frac{U}{c_\infty}\right)^{\frac{2\chi}{\chi-1}} \tag{3}$$

где p_∞ и c_∞ – давление и скорость звука невозмущенном патоке.

Рассмотрим линеаризованное течение газа вдоль поверхности, по которой распространяются упругие волны. В этом случае [3]

$$U = V\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \tag{4}$$

где χ – отношение теплоемкости газа при неизменном давлении к теплоемкости при постоянном объеме (коэффициент политропа), w – перемещение системы по нормали к первоначальной ее поверхности. Применим для уравнения (3) формулу бинома Ньютона и во втором приближении получим [6]:

$$q = k\left[V\frac{\partial w}{\partial x} + \chi_1 V^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial w}{\partial t}\right] \tag{5}$$

где $q = p - p_\infty, \quad k = \frac{\chi p_\infty}{c_\infty}, \quad \chi_1 = \frac{\chi + 1}{4c_\infty}$

Рассмотрим задачу о флаттере в нелинейной вязкоупругой постановке учитывая физические и аэродинамические нелинейности. С этой целью построим математическую модель для исследования флаттера стержня в потоке газа с учетом этих нелинейностей.

В данном случае, принимая гипотезу плоских сечений для изгибающего момента используем следующую формулу [9]:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} b(x)\sigma_x z dz \tag{6}$$

(2) поставим в (5) и получаем [2]:

$$M_x = (1 - R^*)\left[m_1 J_2 w_{xx} + m_2 J_4 w_{xx}^3\right] \tag{7}$$

где равные для балок шириной $b(x)$ и высотой $h(x)$

$$J_2 = \frac{b(x)h^3(x)}{12}, \quad J_4 = \frac{b(x)h^5(x)}{80}.$$

Подставляя (7) в уравнение равновесия, т.е. [9]

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} = m(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q(x,t) \tag{8}$$

и перейдя к безразмерным координатам и опуская штрихи имеем

$$(1 - R^*)\frac{\partial}{\partial x^2}\left[d(x)w_{xx} + Q_1 d_2(x)w_{xx}^3\right] + F(x)w_{tt} + Pw_x + Q_2 P^2 w_x^2 + \gamma w_t = 0 \tag{9}$$

где

$$W = h_0\overline{W},\ x = a\bar{x},\ t = t_1\bar{t},\ m = m_0 F(x),\ h(x) = h_0\overline{h(x)},\ b(x) = b_0\overline{b(x)},$$

$$J_2 = J_2^0 d(x), \quad J_4 = J_4^0 d_2(x), \quad d(x) = b(x)h^3(x), \quad d_2(x) = b(x)h^5(x),$$

$$J_2^0 = \frac{b_0 h_0^3}{12}, \quad Q_1 = \frac{m_2 J_4^{(0)}}{m_1 J_2^{(0)} h_0^2}\left(\frac{h_0}{a}\right)^4, \quad Q_2 = \frac{m_1 b_0(\partial\ell + 1)}{48kc_0}\left(\frac{h_0}{a}\right)^4,$$

$$P = \frac{kVa^3}{m_1 J_2^{(0)}}, \quad t_1 = \sqrt{(m_0 a^4)/(m_1 J_2^{(0)})}, \quad \gamma = \frac{kza^4}{m_1 J_2^{(0)} t_1}, F(x) = b(x)h(x)$$

h_0 – величина высоты стержня в концах, b_0 – величина ширины стержня в концах, m_0 – величина массы соответствующий единичному переменного сечения стержня.

Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (ИДУ) в частных производных (9), вместе с граничными [10]

$$w=0,\quad w_{xx}=0 \text{ при } x=0;\ 1 \tag{10}$$

и начальными

$$w\big|_{t=0}=f_0(x),\quad w_t\big|_{t=0}=f_1(x) \tag{11}$$

условиями представляют математическую модель задачи о флаттере вязкоупругого стержня с учетом физической и аэродинамической нелинейности. Требуется найти критические скорости $P_{кр}$, приводящие к нарастающему амплитуде колебаний.

Метод решения. Точное решение поставленной задачи из-за нелинейности представляет значительные математические трудности. Поэтому приближенное решение построим методом Бубнова-Галеркина. Представим решение ИДУ (9) в виде

$$w=\sum_{k=1}^{N}u_k(t)\varphi_k(x) \tag{12}$$

где $\varphi_k(x)$ - известные, базисные функции удовлетворяющие заданным граничным условиям, $u_k(t)$ - неизвестные функции от времени, подлежащие определению. N – число членов ряда в разложении.

Для нахождения неизвестных функций $u_k(t)$ подставляем (12) в (9)

$$(1-R^*)\left\{\sum_{k=1}^{N}u_k(t)\left[d(x)\varphi_k''(x)\right]''+Q_1\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}u_k(t)u_j(t)u_q(t)\left[d_2(x)\varphi_k''(x)\varphi_j''(x)\varphi_q''(x)\right]''\right\}+$$
$$+F(x)\sum_{k=1}^{N}\ddot{u}_k(t)\varphi_k(x)+P\sum_{k=1}^{N}u_k(t)\varphi_k'(x)+Q_2P^2\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}u_k(t)u_j(t)\varphi_k'(x)\varphi_j'(x)+$$
$$+\gamma\sum_{k=1}^{N}\dot{u}_k(t)\varphi_k(x)=0$$

умножая на $\varphi_i(x)$ и проинтегрируем по x и получим следующие нелинейные системы обыкновенных ИДУ

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{N}\Big\{a_{ki}\ddot{u}_k(t)+\gamma b_{ki}\dot{u}_k(t)+\omega_{ki}(1-R^*)u_k(t)+Pd_{ki}u_k(t)+Q_2P^2\sum_{j=1}^{N}m_{kji}u_k(t)u_j(t)+\\+Q_1(1-R^*)\sum_{j=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}n_{kjqi}u_k(t)u_j(t)u_q(t)\Big\}=0\end{gathered} \tag{13}$$

где
$$a_{ki}=\int_0^1F(x)\varphi_k(x)\varphi_i(x)dx,\qquad b_{ki}=\int_0^1\varphi_k(x)\varphi_i(x)dx,$$
$$\omega_{ki}=\int_0^1\left[d(x)\varphi_k''(x)\right]''\varphi_i(x)dx,\qquad d_{ki}=\int_0^1\varphi_k'(x)\varphi_i(x)dx,\ \ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{N}}$$
$$m_{kji}=\int_0^1\varphi_k'(x)\varphi_j'(x)\varphi_i(x)dx,\quad n_{kjqi}=\int_0^1\left[d_2(x)\varphi_k''(x)\varphi_j''(x)\varphi_q''(x)\right]''\varphi_i(x)dx$$

Интегрирование нелинейной системы (13) при ядре Колтунова–Ржаницына $R(t)=A\cdot e^{-\beta t}t^{\alpha-1}$, $A>0$, $\beta>0$, $0<\alpha<1$ в широких пределах изменения физико-механических параметров вязкоупругого стержня, выполнялось численным методом, основанном на квадратурных формул [11, 12]. Согласно этого метода, численные значения искомых функций $u_k(t_l)=u_{k,l}$ находятся из решения следующей рекуррентной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{N}\Big[a_{ki}+\gamma\frac{\Delta t}{2}b_{ki}\Big]u_{k,l}=\sum_{k=1}^{N}\Big[(a_{ki}+\gamma t_l b_{ki})u_{k,0}+t_l a_{ki}\dot{u}_{k,o}\Big]-\sum_{i_1=1}^{l-1}\Bigg\{\sum_{k=1}^{N}\Big[\gamma A_{i_1} b_{ki}u_{k,i_1}+A_{i_1}(t_l-t_{i_1})\cdot$$

$$\cdot\Bigg(\omega_{ki}\Bigg(u_{k,i_1}-\frac{A}{2}\sum_{i_2=1}^{i_1}B_{i_2}e^{-\beta t_{i2}}u_{k,i_1-i_2+1}\Bigg)+Pd_{ki}u_{k,i_1}\Bigg)\Bigg]+A_{i_1}(t_l-t_{i_1})\Bigg[\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\Big(Q_2P^2 m_{kji}u_{k,i_1}u_{j,i_1}+$$

$$+Q_1\sum_{q=1}^{N}\Bigg(n_{kjqi}u_{k,i_1}u_{j,i_1}u_{q,i_1}-\frac{A}{2}\sum_{i_2=1}^{i_1}B_{i_2}e^{-\beta t_{i2}}u_{k,i_1-i_2+1}u_{j,i_1-i_2+1}u_{q,i_1-i_2+1}\Bigg)\Bigg)\Bigg]\Bigg\},\ i=\overline{1,N} \qquad (14)$$

где

$$t_i=i\Delta t,\ B_1=\frac{\Delta t^{\alpha}}{2},\ B_{i_2}=\frac{\Delta t^{\alpha}\left[(i_2+1)^{\alpha}-(i_2-1)^{\alpha}\right]}{2},\ i_2=\overline{2,i_1-1}$$

$$B_{i_1}=\frac{\Delta t^{\alpha}\left[i_1^{\alpha}-(i_1-1)^{\alpha}\right]}{2},\ A_1=\frac{\Delta t}{2},\ A_i=\Delta t,\ i_1=\overline{2,i-1},\ i=1,2.....$$

Вычисление проводилось с учетом и без учета аэродинамической нелинейности при различных реологических параметров и форм стержня в плане. Расчет произведен как в идеально упругой так и наследственно-деформируемой стержня.

В качестве базисных функций $\varphi_k(x)$, шарнирно-опертого по концам стержня, принимаются балочные функции

$$\varphi_k(x)=\sin\lambda_k x;\quad \lambda_k=k\pi$$

а для начальных условий

$$u_k(0)=\int_0^1\alpha_0(x)\varphi_k(x)dx,\quad \dot{u}_k(0)=0 \qquad \text{где } \alpha_0(x)=\left\{[x(1-x)]^4+\varphi_1(x)\right\}/100$$

Анализ и заключение. Анализ результатов физически нелинейных задач, приведенных на таблице показывает, что критическая скорость определяется по линейной теории как в идеально-упругих так и в вязкоупругих постановках, оказывается лишь верхней границей критических скоростей для реальных конструкций.

Обозначения в таблице означают: $P_{\text{к. линей.}}$ – линейный вариант; $P_{\text{кр. физ. нелин.}}$ – учет физически нелинейности; $P_{\text{к. физ. и аэро.нелин.}}$ – учет и физически и аэродинамической нелинейности.

Анализ результатов вычислений показывает, что расчет по линейной теории дает пониженные результаты для критической скорости по сравнению с физической и физически-аэродинамической нелинейной теориям. Как видно из таблицы, значение критической скорости в упругом состоянии по линейной теории ($P_{\text{кр.линей.}}$=646,57) отличается от значения критической скорости при учете физической нелинейности на 18,3% ($P_{\text{кр.физ.нелин.}}$=528,10). Аналогичный результат для критической скорости по линейной вязкоупругой теории ($P_{\text{кр.линей}}$.=297,34) и по физически нелинейной теории при A=0.05 незначительны и различие между значениями составляют 0,6% ($P_{\text{кр.физ.нелин}}$.=295,53). Из таблицы видно, что при одновременном учете и физической и аэродинемической нелинейностей при изменении параметра вязкости в пределах 0,01<A<0,1 критическая скорость уменшается. Также изучены влияния параметров α и γ (см.таблица). Эффекты, вызванные учетом наследственных свойств материала стержня на критическую скорость, как в линейной, так и в нелинейной постановках оказались существенными, например, незначительное уменьшение параметра сингулярности α приводит к существенному повышению или незначительное увеличение параметра вязкости A приводит к существенному уменьшению критической скорости флаттера (иногда почти в два раза). Следовательно, учет вязкоупругости имеет существенное значение, так как вариация параметров вязких свойств материала показывают уровень интенсивности диссипативных процессов в этих конструкциях.

Поперечное сечение балки изменяется по закону $b(x) = c - \alpha_1 x;\ h(x) = 1 - \alpha_2 x;$ где $c=5$.

Таблица

Значения критической скорости при различных значениях физико-механических свойств материла

N	A	α	β	α_1	α_2	γ	θ_1	*h/a*	$P_{к.\ лин}$	$P_{к.\ физ.\ нелин}$	$P_{к\ физ.\ аэро.\ нелин.}$
1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12	13
2 3 4	0.0	0.25	0.05	4.0	0.2	0	1	0	646,57 717,59 743,27	528,10 539,51 503,42	---
2 3 4	0.05	0.25	0.05	4.0	0.2	0	1	0	297,34 282,56 311,47	295,53 280,37 310,79	---
2	0.01 0.03 0,05 0.07 0.1	0.25	0.05	4.0	0.2	0	1	1/50	---	---	376,76 364,11 336,68 315,77 291,71
2	0.05	0.15 0.5	0.05	4.0	0.2	0	1	1/50	---	---	305,01 373,99
2	0.05	0.25	0.05	4.0	0.2	1 2	1	1/50	---	---	475,21 485,87
2	0.0	0.25	0.05	4.0	0.2	0	1	1/40 1/50 1/60 1/80 1/100	---	---	384,71 474,68 506,55 519,88 525,50
2	0.05	0.25	0.05	4.0	0.2	0	1	1/40 1/60 1/80 1/100	---	---	327,01 335,45 346,09 346,56

References:

[1]. Ivanov S.P., Ivanov O.G., Ivanova A.S. Kolebaniya i ustoychivost sterjney iz fizicheski nelineynix materialov //Stroitelnaya mexanika injenernix konstruktsiy i soorujeniy, 2011, 3, str. 3-6.
[2]. Badalov F.B. Metod stepennix ryadov v nelineynoy teorii vyazkouprugosti. Tashkent, «FAN» 1980. 221s.
[3]. Bolotin V.V. Nekonservativnie zadachi teorii uprugoy ustoychivosti. Fizmatgiz M. 1991. 339s.
[4]. Bolotin V.V. O kriticheskix skorostyax v nelineynoy teorii aerouprugosti. Nauchnыe dokladi visshaya shkola «Mashinostroenie i priborostroenie». 1958. №3.
[5]. Bolotin V.V. Nelineyniy flatter plastin i obolochek. Injenernыy sbornik. T.28. 1960.
[6]. Volmir A.S. Ustoychivost deformiruemix sistem. Izd. «Nauka». Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literaturi. Moskva, 1967
[7]. Ilyushin A.A. Zakon ploskix secheniy v aerodinamike bolshix sverxzvukovix skorostyax. PMM. 1956 . T.20 № 6 s 733-755.
[8]. Algazin S.D., Kiyko I.A. Flatter plastin i obolochek. M.: Nauka, 2006.
[9]. Volmir A.S. Nelineynaya dinamika plastin i obolochek. Izd. «Nauka». Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literaturi. Moskva, 1972
[10]. Babakov I.M. Teoriya kolebaniy. Izd. «Nauka». Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatri. Moskva, 1968.

[11]. Badalov F. B. Metodы resheniya integralnix i integro – differentsialnix uravneniy nasledstvennoy teorii vyazkouprugosti. Tashkent, «Mexnat», 1987. 269s.
[12]. Abdikarimov R.A., Eshmatov X., Bobanazarov SH.P. Kolebaniya i ustoychivost vyazkouprugoy trubi s protekayuey cherez nee jidkostyu pri razlichnix granichnix usloviyax //Uzbekskiy jurnal "Problemi mexaniki". – Tashkent, 1995. – № 1. – S. 20-24.

Список литературы

[1]. Иванов С.П., Иванов О.Г., Иванова А.С. Колебания и устойчивость стержней из физически нелинейных материалов //Строительная механика инженерных конструкций и сооружений, 2011, 3, стр. 3-6.
[2]. Бадалов Ф.Б. Метод степенных рядов в нелинейной теории вязкоупругости. Ташкент, «ФАН» 1980. 221с.
[3]. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз М. 1991. 339с.
[4]. Болотин В.В. О критических скоростях в нелинейной теории аэроупругости. Научные доклады высшая школа «Машиностроение и приборостроение». 1958. №3.
[5]. Болотин В.В. Нелинейный флаттер пластин и оболочек. Инженерный сборник. Т.28. 1960.
[6]. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. Изд. «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. Москва, 1967
[7]. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростях. ПММ. 1956 . Т.20 № 6 с 733-755.
[8]. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006.
[9]. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. Изд. «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. Москва, 1972
[10]. Бабаков И.М. Теория колебаний. Изд. «Наука». Главная редакция физико-математической литератры. Москва, 1968.
[11]. Бадалов Ф. Б. Методы решения интегральных и интегро – дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент, «Мехнат», 1987. 269с.
[12]. Абдикаримов Р.А., Эшматов Х., Бобаназаров Ш.П. Колебания и устойчивость вязкоупругой трубы с протекающей через нее жидкостью при различных граничных условиях //Узбекский журнал "Проблемы механики". – Ташкент, 1995. – № 1. – С. 20-24.