Scientific-technical journal

Volume 3 | Issue 2 Article 1

5-7-2020

QUALITATIVE PROPERTIES OF THE NONLINEAR SYSTEM OF THE EQUATIONS OF REACTION-DIFFUSION BASED ON THE AUTOMODELINE ANALYSIS OF SOLUTIONS

D K. Muhamediyeva
QUALITATIVE PROPERTIES OF THE NONLINEAR SYSTEM OF THE EQUATIONS OF REACTION-DIFFUSION BASED ON THE AUTOMODELINE ANALYSIS OF SOLUTIONS

FUNDAMENTAL SCIENCES

УДК: 577.3.01; 577.38

QUALITATIVE PROPERTIES OF THE NONLINEAR SYSTEM OF THE EQUATIONS OF REACTION-DIFFUSION BASED ON THE AUTOMODELINE ANALYSIS OF SOLUTIONS

Muhamediyeva D.K.

Scientific-innovative center of information and communication technologies at the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khorazmiy

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ НА ОСНОВЕ АВТОМОДЕЛЬНОГО АНАЛИЗА РЕШЕНИЙ

Мухамедиева Д.К.

Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных техногологи при Ташкентском университете информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий

ЕЧИМЛАРНИНГ АВТОМОДЕЛ ТАҲЛИЛИ АСОСИДА РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ НОЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИНИНГ СИФАТ ХОССАЛАРИ

Мухамедиева Д.К.

Мухаммада ал-Хоразмий номидаги Тошкент Ахборот технологиялари Университети ҳузуридаги Ахборот-коммуникация технологиялари илмий-инновацион маркази

Abstract. *Based on the self-similar analysis of solutions, the properties of solutions of the nonlinear system of reaction-diffusion equations for one problem of a biological population of the Kolmogorov-Fisher type are investigated. Suitable initial approximations are proposed for a rapidly converging iterative process.*
Keywords: cross-diffusion, biological population, parabolic system of quasilinear equations, convective transfer, numerical solution, iterative process, self-similar solutions.

Аннотация. *На основе автомодельного анализа решений исследованы свойства решений нелинейной системы уравнений реакции-диффузии одной задачи биологической популяции типа Колмогорова-Фишера. Предложены подходящие начальные приближения для быстро сводимого итерационного процесса.*
Ключевые слова: кросс-диффузия, биологическая популяция, параболическая система квазилинейных уравнений, конвективный перенос, численное решение, итерационный процесс, автомодельные решения.

Аннотация. *Ечимларнинг автомодел тахлили асосида Колмогоров-Фишер туридаги биологик популяция реакция-диффузия ночизиқли тенгламалар тизимининг сифат хоссалари тадқиқ қилинган. Тез яқинлашувчи итерацион жараён учун мос бошланғич яқинлашишлар таклиф этилган.*
Таянч сўзлар: кросс-диффузия, биологик популяция, квазичизиқли тенгламалар тизими, конвектив кўчиш, сонли ечим, итерацион жараён, автомодел ечим.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в области Q={(t,x): 0< t < ∞, x∈R^2} параболическую систему двух квазилинейных уравнений реакции-диффузии задачи биологической популяции типа которое описывает процесс биологической популяции в нелинейной двухкомпонентной среде, коэффициент диффузии которого равен $D_1 u_1^{\sigma_1}$ и $D_2 u_2^{\sigma_2}$, $\sigma_1, \sigma_2, \beta_1, \beta_2$ - положительные вещественные числа, $u_1 = u_1(t,x) \ge 0$, $u_2 = u_2(t,x) \ge 0$ - искомые решения.

Колмогорова-Фишера $\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_1 u_1^{\sigma_1} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \right) + k_1(t) u_1 \cdot \left(1 - u_2^{\beta_1}\right), \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_2 u_2^{\sigma_2} \dfrac{\partial u_2}{\partial x} \right) - k_2(t) u_2 \cdot \left(1 - u_1^{\beta_2}\right), \end{cases}$ (1)

$$u_1\big|_{t=0} = u_{10}(x), \quad u_2\big|_{t=0} = u_{20}(x), \tag{2}$$

Задача Коши и краевые задачи для системы (1) в одномерном и многомерном случаях исследованы многими авторами [1-7].

Целью данной работы является исследование качественных свойств решения задачи (1), (2) на основе автомодельного анализа и его численные решения с применением методов современных компьютерных технологий, исследование способов линеаризации к сходимости итерационного процесса с дальнейшей визуализацией. Найдены оценки решений и возникающий при этом свободной границы, что дает возможность выбрать подходящие начальные приближения [3] для каждого значения числовых параметров.

Займемся построением автомодельной системы уравнений для (1)-(2) – более простого для исследований системы уравнений.

2. Построение автомодельных уравнений системы

Автомодельную систему уравнений построим методом нелинейного расщепления [3].

Замена в (1)

$$u_1(t,x) = e^{k_1 t} v_1(t,x),$$
$$u_2(t,x) = e^{k_2 t} v_2(t,x)$$

приведёт (1) к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_1 v_1^{\sigma_1} \dfrac{\partial v_1}{\partial x} \right) - k_1 e^{((\beta_1 k_2 + k_1) - (\sigma_1 + 1) k_1) t} v_1 v_2^{\beta_1} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_2 v_2^{\sigma_2} \dfrac{\partial v_2}{\partial x} \right) - k_2 e^{((\beta_2 k_1 + k_2) - (\sigma_2 + 1) k_2) t} v_1^{\beta_2} v_2 \end{cases} \tag{3}$$

$$v_1\big|_{t=0} = v_{10}(x), \quad v_2\big|_{t=0} = v_{20}(x),$$

Выбирая $\sigma_1 k_1 = \sigma_2 k_2$, получим следующую систему уравнений,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_1 v_1^{\sigma_1} \dfrac{\partial v_1}{\partial x} \right) - a_1 \tau^{b_1} v_1 v_2^{\beta_1}, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_2 v_2^{\sigma_2} \dfrac{\partial v_2}{\partial x} \right) - a_2 \tau^{b_2} v_1^{\beta_2} v_2, \end{cases} \tag{4}$$

где $a_1 = \left(\delta_1 k_1\right)^{b_1}$, $a_2 = \left(\delta_2 k_2\right)^{b_2}$,

$b_1 = [(\beta_1 k_2 + k_1) - (\sigma_1 + 1) k_1] / \sigma_1 k_1$, $\quad b_2 = [(\beta_2 k_1 + k_2) - (\sigma_2 + 1) k_2] / \sigma_2 k_2$.

Если $b_i = 0$, $i = 1,2$, т.е. $\beta_1 k_2 + k_1 = (\sigma_1 + 1) k_1$ и $\beta_2 k_1 + k_2 = (\sigma_2 + 1) k_2$, то система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_1 v_1^{\sigma_1} \dfrac{\partial v_1}{\partial x} \right) - a_1 v_1 v_2^{\beta_1}, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_2 v_2^{\sigma_2} \dfrac{\partial v_2}{\partial x} \right) - a_2 v_1^{\beta_2} v_2. \end{cases}$$

Ниже мы опишем один из способов получение автомодельной системы для системы уравнений (4). Он состоит в следующим. Найдём сначала решение обыкновенной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{v}_1}{d\tau} = -a_1 \bar{v}_1 \bar{v}_2^{\beta_1} \\ \dfrac{d\bar{v}_2}{d\tau} = -a_2 v_1^{\beta_2} v_2 \end{cases}$$

вида

$$\bar{v}_1(\tau) = c_1(\tau + T_0)^{-\gamma_1}, \quad \bar{v}_2(\tau) = c_2(\tau + T_0)^{-\gamma_2}, \; T_0 > 0,$$

где $c_1 = 1, \quad \gamma_1 = \dfrac{1}{\beta_1}, c_2 = 1, \quad \gamma_2 = \dfrac{1}{\beta_2}$.

А затем решение системы (3)-(4) ищется в виде

$$v_1(t,x) = \bar{v}_1(t) w_1(\tau, x), \; v_2(t,x) = \bar{v}_2(t) w_2(\tau, x),$$

где $\tau = \tau(t)$ выбирается так

$$\tau_1(\tau) = \int_0^\tau \bar{v}_1^{\sigma_1}(t)dt = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\gamma_1\sigma_1}(T+\tau)^{1-\gamma_1\sigma_1}, & если\ 1-\gamma_1\sigma_1 \neq 0, \\ \ln(T+\tau), & если\ 1-\gamma_1\sigma_1 = 0. \end{cases}$$

Тогда для $w_i(\tau, x), \quad i = 1,2$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_1 w_1^{\sigma_1} \dfrac{\partial w_1}{\partial x}\right) + \psi_1 (w_1 w_2^{\beta_1} - w_1) \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_2 w_2^{\sigma_2} \dfrac{\partial w_2}{\partial x}\right) + \psi_2 (w_2 w_1^{\beta_2} - w_2) \end{cases}, \tag{5}$$

где

$$\psi_i = \begin{cases} \dfrac{\gamma_i}{(1-\gamma_1\sigma_1)\tau}, & если\ 1-\gamma_1\sigma_1 > 0, \\ \gamma_i c_1^{-\sigma_1}, & если\ 1-\gamma_1\sigma_1 = 0. \end{cases}$$

При $\tau \to \infty, \; \psi_i \to 0$ и $\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial \tau} \to \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_1 w_1^{\sigma_1} \dfrac{\partial w_1}{\partial x}\right), \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial \tau} \to \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_2 w_2^{\sigma_2} \dfrac{\partial w_2}{\partial x}\right). \end{cases}$

Пусть $\gamma_1\sigma_1 > 0$, $\gamma_1\sigma_1 = \gamma_2\sigma_2$, $\sigma_2(b_2+1) + \beta_2(b_1+1) = \sigma_1(b_1+1) + \beta_1(b_2+1)$ $c_i > 0$. Волновые решения уравнения (5) имеет вид

$$w_i(\tau(t), x) = y_i(\xi), \quad \xi = \pm c\tau_1(t) + x, \qquad i = 1, 2$$

и учитывая, что уравнение для $w_i(\tau, x)$ без младших членов всегда автомодельно, получим систему

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}\left(y_1^{\sigma_1} \dfrac{dy_1}{d\xi}\right) + c\dfrac{dy_1}{d\xi} + \psi_1(y_1\, y_2^{\beta_1} - y_1) = 0, \\ \dfrac{d}{d\xi}\left(y_2^{\sigma_2} \dfrac{dy_2}{d\xi}\right) + c\dfrac{dy_2}{d\xi} + \psi_2(y_2\, y_1^{\beta_2} - y_2) = 0. \end{cases}$$

Отсюда мы имеем $y_1 \to (c\sigma_1)_+^{\frac{1}{\sigma_1}}$ при $\xi \to \frac{a_1}{c\sigma_1}$ и $y_2 \to (c\sigma_2)_+^{\frac{1}{\sigma_2}}$ при $\xi \to \frac{a_2}{c\sigma_2}$ скорость волнового решения, если скорость движения среды ограниченная при $t > 0$. Здесь использовано обозначение $(a)_+ = \max(0, a)$

3. Система квазилинейных уравнений реакции-диффузии с двойной нелинейной кросс-диффузией.

Рассмотрим в области $Q = \{(t, x):\ 0 < t, x \in R\}$ параболическую систему двух квазилинейных уравнений реакции-диффузии с двойной нелинейной кросс-диффузией

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_1 u_2^{m_1-1} \left|\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|^{p-2} \dfrac{\partial u_2}{\partial x} \right) + l(t)\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + k_1(t) u_1 \left(1 - u_2^{\beta_1}\right) \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_2 u_1^{m_2-1} \left|\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|^{p-2} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \right) + l(t)\dfrac{\partial u_2}{\partial x} + k_2(t) u_2 \left(1 - u_1^{\beta_2}\right) \end{cases} \tag{3}$$

$$u_1\big|_{t=0} = u_{10}(x),\ \ u_2\big|_{t=0} = u_{20}(x),$$

которое описывает процесс биологической популяции типа Колмогорова-Фишера в нелинейной двухкомпонентной среде, коэффициенты диффузии которых равны $D_1 u_2^{m_1-1}\left|\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|^{p-2}$, $D_2 u_1^{m_2-1}\left|\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|^{p-2}$ и конвективным переносом со скоростью $l(t)$, где $m_1, m_2, p, \beta_1, \beta_2$ - положительные вещественные числа, $u_1 = u_1(t,x) \ge 0$, $u_2 = u_2(t,x) \ge 0$ - искомые решения.

Ниже исследуем качественные свойства рассматриваемой задачи путем построением автомодельной системы уравнений для (3) .

Автомодельную систему уравнений построим методом нелинейного расщепления [1].

Замена в (3)

$$u_1(t,x) = e^{-\int_0^t k_1(\zeta)d\zeta} v_1(\tau(t), \eta),\quad \eta = x - \int_0^t l(\zeta)d\zeta,$$

$$u_2(t,x) = e^{-\int_0^t k_2(\zeta)d\zeta} v_2(\tau(t), \eta),\quad \eta = x - \int_0^t l(\zeta)d\zeta,$$

приведёт (3) к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(D_1 v_2^{m_1-1} \left|\dfrac{\partial v_2}{\partial \eta}\right|^{p-2} \dfrac{\partial v_2}{\partial \eta} \right) - k_1(t) e^{[(\beta_1 - m_1 - p + 3)k_2]t} v_1 v_2^{\beta_1}, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(D_2 v_1^{m_2-1} \left|\dfrac{\partial v_1}{\partial \eta}\right|^{p-2} \dfrac{\partial v_1}{\partial \eta} \right) - k_2(t) e^{[(\beta_2 - m_2 - p + 3)k_1]t} v_1^{\beta_2} v_2, \end{cases} \tag{4}$$

$$v_1\big|_{t=0} = v_{10}(\eta),\ \ v_2\big|_{t=0} = v_{20}(\eta).$$

Выбирая $\tau(t) = \dfrac{e^{[(m_1+p-3)k_2]t}}{(m_1+p-3)k_2} = \dfrac{e^{[(m_2+p-3)k_1]t}}{(m_2+p-3)k_1}$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(D_1 v_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial v_2}{\partial \eta}\right|^{p-2} \dfrac{\partial v_2}{\partial \eta}\right) - a_1(t)\tau^{b_1} v_1 v_2^{\beta_1} \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(D_2 v_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial v_1}{\partial \eta}\right|^{p-2} \dfrac{\partial v_1}{\partial \eta}\right) - a_2(t)\tau^{b_2} v_1^{\beta_2} v_2 \end{cases} \tag{5}$$

где $a_1 = k_1\left((m_1+p-3)k_2\right)^{b_1}$, $\quad b_1 = \dfrac{(\beta_1 - m_1 - p + 3)}{(m_1+p-3)}$,

$$a_2 = k_2\left((m_2+p-3)k_1\right)^{b_2}, \quad b_2 = \frac{(\beta_2 - m_2 - p + 3)}{(m_2+p-3)}.$$

Если $b_i = 0$, и $a_i(t) = const$, $i = 1,2$, то система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(D_1 v_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial v_2}{\partial \eta}\right|^{p-2} \dfrac{\partial v_2}{\partial \eta}\right) - a_1 v_1 v_2^{\beta_1}, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(D_2 v_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial v_1}{\partial \eta}\right|^{p-2} \dfrac{\partial v_1}{\partial \eta}\right) - a_2 v_1^{\beta_2} v_2. \end{cases}$$

С целью получения автомодельной системы для системы уравнений (5) найдём сначала решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar v_1}{d\tau} = -a_1 \bar v_1 \bar v_2^{\beta_1}, \\ \dfrac{d\bar v_2}{d\tau} = -a_2 \bar v_1^{\beta_2} \bar v_2, \end{cases}$$

вида

$$\bar v_1(\tau) = c_1(\tau + T_0)^{-\gamma_1}, \quad \bar v_2(\tau) = c_2(\tau + T_0)^{-\gamma_2}, \quad T_0 > 0,$$

где

$$c_1 = 1, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\beta_2}, \quad c_2 = 1, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\beta_1}.$$

А затем решение системы (5) ищется в виде

$$\begin{aligned} v_1(t,\eta) &= \bar v_1(t) w_1(\tau,\eta), \\ v_2(t,\eta) &= \bar v_2(t) w_2(\tau,\eta), \end{aligned} \tag{6}$$

а $\tau = \tau(t)$ выбирается так

$$\tau_1(\tau) = \int_0^\tau \bar v_2^{(p-2)}(t)\bar v_2^{(m_1-1)}(t)dt = \begin{cases} \dfrac{1}{1-[\gamma_2(m_1+p-3)]}(T+\tau)^{1-[\gamma_1(m_1+p-3)]}, & если\ 1-[\gamma_2(m_1+p-3)] \ne 0, \\ \ln(T+\tau), & если\ 1-[\gamma_2(m_1+p-3)] = 0, \\ (T+\tau), & если\ m_1+p=3, \end{cases}$$

если $\gamma_2(m_1+p-3) = \gamma_1(m_2+p-3)$.

Тогда для $w_i(\tau, x)$, $i = 1,2$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(D_1 w_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial w_2}{\partial \eta}\right|^{p-2}\dfrac{\partial w_2}{\partial \eta}\right) + \psi_1 (w_1 w_2^{\beta_1} - w_1) \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(D_2 w_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial w_1}{\partial \eta}\right|^{p-2}\dfrac{\partial w_1}{\partial \eta}\right) + \psi_2 (w_2 w_1^{\beta_2} - w_2) \end{cases}, \tag{7}$$

где

$$\psi_1 = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-[\gamma_2(m_1+p-3)])\tau}, & если\ 1-[\gamma_2(m_1+p-3)>0, \\ \gamma_1 c_1^{-(\gamma_2(m_1+p-3))}, & если\ 1-[\gamma_2(m_1+p-3)=0. \end{cases} \tag{8}$$

$$\psi_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-[\gamma_1(m_2+p-3)])\tau}, & если\ 1-[\gamma_1(m_2+p-3)>0, \\ \gamma_1 c_1^{-(\gamma_1(m_2+p-3))}, & если\ 1-[\gamma_1(m_2+p-3)=0. \end{cases}$$

Представление системы (2) в виде (7) позволяет предполагать что, при $\tau \to \infty$ и $\psi_i \to 0$ решение последней системы асимптотически на фронте может стремится к решению системы

$$\tau \to \infty,\ \psi_i \to 0 \text{ и } \begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(D_1 w_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial w_2}{\partial \eta}\right|^{p-2}\dfrac{\partial w_2}{\partial \eta}\right), \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(D_2 w_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial w_1}{\partial \eta}\right|^{p-2}\dfrac{\partial w_1}{\partial \eta}\right). \end{cases} \tag{9}$$

Это обстоятельство используется для нахождение начального прибдижения для построение итерационного процесса Если $1-[\gamma_1(m_2+p-3)\neq 0$, волновое решение система (7) имеет вид

$$w_i(\tau(t),\eta) = f_i(\xi),\ \xi = c\tau \pm \eta,\ i = 1,2,$$

где c – скорость волны, а функции $w_i(\tau(t),\eta) = f_i(\xi)$ находится из системы автомодельных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}\left(f_2^{m_1-1}\left|\dfrac{df_2}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_2}{d\xi}\right) + c\dfrac{df_1}{d\xi} + \mu_1 (f_1 - f_1\ f_2^{\beta_1}) = 0, \\ \dfrac{d}{d\xi}\left(f_1^{m_2-1}\left|\dfrac{df_1}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_1}{d\xi}\right) + c\dfrac{df_2}{d\xi} + \mu_2 (f_2 - f_2\ f_1^{\beta_2}) = 0, \end{cases} \tag{10}$$

$$\mu_i = \frac{1}{1-[\gamma_{3-i}(m_i+p-3)]},$$

которая имеет локализованное решение

$$\bar{f}_1 = A(a-\xi)_+^{n_1},\ \bar{f}_2 = B(a-\xi)_+^{n_2},$$

$$n_1 = \frac{(p-1)(1-(m_1+p))}{1-(2-(m_1+p))(2-(m_2+p))},$$

$$n_2 = \frac{(p-1)(1-(m_2+p))}{1-(2-(m_1+p))(2-(m_2+p))},$$

$$n = 1 - (2 - (m_1 + p))(2 - (m_2 + p)).$$

Коэффициенты А и В находятся из системы алгебраических уравнений

$$(n_2)^{p-1} A^{-1} B^{m_1+p-2} = c,$$

$$(\mathrm{n}_1)^{p-1} A^{m_2+p-2} B^{-1} = c,$$

Тогда с учетом выражения

$$u_1(t,x) = e^{-\int_0^t k_1(\zeta)d\zeta} v_1(\tau(t),\eta),$$

$$u_2(t,x) = e^{-\int_0^t k_2(\zeta)d\zeta} v_2(\tau(t),\eta)$$

имеем

$$u_1(t,x) = Ae^{-\int_0^t k_1(\zeta)d\zeta} (c\tau(t) - \xi)_+^{n_1},$$

$$u_2(t,x) = Be^{-\int_0^t k_2(\zeta)d\zeta} (c\tau(t) - \xi)_+^{n_2},\ c > 0.$$

$$u_2(t,x) = Be^{-\int_0^t k_2(\zeta)d\zeta} (c\tau(t) - \xi)_+^{n_2},\ c > 0.$$

В силу того, что

$$[b\tau(t) - \int_0^t l(\eta)d\eta - x] = 0,$$

если

$$x \ge [b\tau(t) - \int_0^t l(\eta)d\eta - x] < 0,\ \forall t > 0,$$

то

$$u_1(t,x) \equiv 0,\ u_2(t,x) \equiv 0,\ x \ge [b\tau(t) - \int_0^t l(\eta)d\eta - x] < 0,\ \forall t > 0.$$

Поэтому условием локализации решений системы (3) есть условия

$$\int_0^e l(y)dy < 0, \quad \tau(t) < \infty \text{ для } \forall t > 0. \tag{11}$$

Условие (11) есть условие появления нового эффекта – локализации волновых решений (11). Если же условие (11) невыполнено, то имеет место явление конечной скорости распространения возмущения, т.е.

$u_i(t,x) \equiv 0$ при $|x| \ge b(t)$, $\tau(t) = \int_0^t e^{-(m_1+p-3)\int_0^\zeta k_1(y)dy} d\zeta$, причем фронт уходит сколь угодно далеко, при возрастании времени, так как $\tau(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

4. Медленная диффузия

Случай $n_1 > 0, n_2 > 0,\ n > 0$ (медленная диффузия). Применяя метод [1] для решения уравнения (11) получим следующие функции

$$\bar{\theta}_1(\xi) = (a - \xi)_+^{n_1},\ \bar{\theta}_2(\xi) = (a - \xi\ )_+^{n_2},$$

где $a > 0$, $(y)_+ = \max(y,\ 0)$, $\xi < a$. Известно [1, 2], что для глобального существования решения задачи (3) функция $f(\xi)$ должна удовлетворят следующее неравенству:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\xi}\left(f_2^{m_1-1}\left|\dfrac{df_2}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_2}{d\xi}\right) + c\dfrac{df_1}{d\xi} + \mu_1\left(f_1 - f_1\ f_2^{\beta_1}\right) \le 0, \\ \dfrac{d}{d\xi}\left(f_1^{m_2-1}\left|\dfrac{df_1}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_1}{d\xi}\right) + c\dfrac{df_2}{d\xi} + \mu_2\left(f_2 - f_2\ f_1^{\beta_2}\right) \le 0. \end{cases}$$

а

Возьмем функции $\bar{\theta}_1(\xi),\ \bar{\theta}_2(\xi)$, и покажем, что они будут асимптотикой финитных решений системы (10).

Теорема 1. Финитное решение системы (10) при $\xi \to a_-$ имеет асимптотику $f_i(\xi) \sim \vartheta_i(\xi)$.

Доказательство. Будем искать решение уравнения (10) в следующем виде

$$f_i = \bar{\vartheta}_i(\xi)\, y_i(\eta),\ \mathrm{i} = 1,2\,, \tag{12}$$

где $\eta = -\ln(a-\xi)$, причем $\eta \to +\infty$ при $\xi \to a_-$, что позволяет исследовать асимптотическую устойчивость решения задачи (10) при $\eta \to +\infty$. Подставляя (12) в (10) для $y_i(\eta)$ получим следующее уравнение

$$\begin{gathered} \frac{d}{d\eta}\left(y_{3-i}^{m_i-1}\left|\frac{dy_{3-i}}{d\eta} - n_{3-i}y_{3-i}\right|^{p-2}\left(\frac{dy_{3-i}}{d\eta} - n_{3-i}y_{3-i}\right)\right) + \\ \left(\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}} - n_i\right)\left(y_{3-i}^{m_i-1}\left|\frac{dy_{3-i}}{d\eta} - n_{3-i}y_{3-i}\right|^{p-2}\left(\frac{dy_i}{d\eta} - n_{3-i}y_{3-i}\right)\right) + \\ +c\left(\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right) - \mu_i\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}}\, y_i(\eta)\left(1 + e^{-n_{3-i}\beta_i\eta}\, y_{3-i}{}^{\beta_i}\right) = 0 \end{gathered} \tag{13}$$

,

где η определенная выше функция.

Отметим, что изучение решения последнего уравнения является равносильно изучению тех решений уравнения (10), каждое из которых в некотором промежутке $[\eta_0, +\infty)$ удовлетворяет неравенству:

$$y_i(\eta) > 0\,,\ \frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i \ne 0\,.$$

Покажем, прежде всего, что решения $y_i(\eta)$ уравнения (13) имеют конечный предел y_{0i} при $\eta \to +\infty$. Введем обозначения

$$\omega_i(\eta) = y_{3-i}^{m_i-1}\left|\frac{dy_{3-i}}{d\eta} - n_{3-i}y_{3-i}\right|^{p-2}\left(\frac{dy_{3-i}}{d\eta} - n_{3-i}y_{3-i}\right).$$

Тогда уравнение (13) имеет вид:

$$\omega_i' = -\left(\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}} - n_i\right)\omega_i - c\left(\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i\right) - \mu_i\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}}\, y_i(\eta)\left(1 + e^{-n_i\beta_i\eta}\, y_{3-i}{}^{\beta_i}\right).$$

Для анализа последнего выражения введем новую вспомготельную функцию

$$\phi(\tau,\eta)=-\left(\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}}-n_i\right)\tau-c\left(\frac{dy_i}{d\eta}-n_iy_i\right)-\mu_i\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}}y_i(\eta)(1+e^{-n_i\beta_i\eta}y_{3-i}{}^{\beta_i}),$$

где τ - вещественное число. Отсюда нетрудно видеть, что при каждом значении τ функция $\phi(\tau,\eta)$ сохраняет знак на некотором промежутке $[\eta_1,+\infty)\subset[\eta_0,+\infty)$ и при всех $\eta\in[\eta_1,+\infty)$ выполняется одно из неравенств

$$\omega_i'(\eta)>0,\ \omega_i'(\eta)<0.$$

И поэтому для функции $\omega_i(\eta)$ существует предел при $\eta\in[\eta_1,+\infty)$. Из выражения для $\omega_i(\eta)$ следует, что

$$\lim_{\eta\to+\infty}\omega_i'(\eta)==\lim_{\eta\to+\infty}\left\{-\left(\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}}-n_i\right)\omega_i-c\left(\frac{dy_i}{d\eta}-n_iy_i\right)-\mu_i\frac{e^{-\eta}}{a-e^{-\eta}}y_i(\eta)(1+e^{-n_i\beta_i\eta}y_{3-i}{}^{\beta_{3-i}})\right\}=0$$

Отсюда, учитывая, что

$$\xi\to a\ \lim_{\eta\to+\infty}e^{-\eta}\to0,\ \lim_{\eta\to+\infty}a-e^{-\eta}\to a,\ \ \omega_i'=0$$

получим следующие алгебраические уравнения:

1)
$$\beta_i>1,\ i=1,2$$
$$(n_2)^{p-1}y_2^{m_1+p-3}=c,$$
$$(n_1)^{p-1}y_1^{m_2+p-3}=c.$$

Вычисление последнего уравнения дает $y_i=1$ и в силу (12) $f(\xi)\sim\vartheta(\xi)$.

2) $\beta_i=1/n_i,\ i=1,2$, y_i должно быть решением системы

$$(n_2)^{p-1}y_2^{m_1+p-3}+y_1{}^{n_1}y_2^{n_1(\beta_1-1)}=c,$$
$$(n_1)^{p-1}y_1^{m_2+p-3}+y_1{}^{n_2(\beta_2-1)}y_2^{n_2}=c.$$

Вычисление уравнения дает $y_i=1$ и в силу (10) $f(\xi)\sim\vartheta(\xi)$.

Теорема 1 доказана.

4. Быстрая диффузия

Случай $n_1>0,n_2>0,\ n<0$ (быстрая диффузия). Для (10) имеем

$$\chi_1(\xi)=(a+\xi\ )^{n_1},\ \chi_2(\xi)=(a+\xi\ )^{n_2},$$

где $a>0$.

Теорема 2. При $\xi\to+\infty$ исчезающие на бесконечности решение задачи (8) имеет асимптотику $f_i(\xi)\sim\chi_i(\xi),\quad i=1,2$.

Заключение. Исследование качественных свойств системы позволило, выполнить численный эксперимент в зависимости от значений, входящих в систему числовых параметров. Для этой цели как начальное приближение использовались построенные асимптотические решения. При численном решение задачи для линеаризации системы использовались линеаризации по методам Ньютона и Пикара. Для решения задачи биологической популяции предложен метод нелинейного расщепления.

Литература

[1].Мари Дж. Нелинейные диффузионные уравнения в биологии. М., Мир,1983, 397 стр.
[2].Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме. Бюллетень МГУ, сер. Математика и механика, т. 1, 1-25
[3].Арипов М. Метод эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач Ташкент, Фан, 1988, 137 с.
[4].Белотелов Н.В., Лобанов А.И.Популяционные модели с нелинейной диффузией. // Математическое моделирование. –М.; 1997, №12, стр. 43-56.
[5].В. Вольтерра. Математическая теория борьбы за существование -М.: Наука, 1976, 288 с.
[6].Гаузе Г.Ф. О процессах уничтожения одного вида другим в популяциях инфузорий // Зоологический журнал,1934, т.13, №1.
[7].Aripov M., Muhammadiev J. Asymptotic behaviour of automodel solutions for one system of quasilinear equations of parabolic type. Buletin Stiintific-Universitatea din Pitesti, Seria Matematica si Informatica. N 3. 1999. pg. 19-40
[8].Muxamediyeva D.K. Properties of self similar solutions of reaction-diffusion systems of quasilinear equations // International Journal of Mechanical and production engineering research and development (IJMPERD) ISSN(P): 2249-6890; ISSN(E): 2249-8001 Vol. 8, Issue 2, USA. 2018, 555-565 pp. Impact Factor (JCC): 6.8765.
[9].Muhamediyeva D.K. Solving of the Task of Kolmogorov-Fisher Type Biological Population in the Regime with Aggravation // International Journal of Applied Engineering Research ISSN 0973-4562 Volume 13, Number 6 (2018) pp. 4291-4298.
[10]. Мухамедиева Д.К. Численное решение системы уравнений реакции-диффузии с двойной нелинейностью // ФарПИ илмий-техника журнали. –Фарғона.2018. №3, 127-131 бетлар.

Web сайтлар

[1]. *dilnoz134@rambler.ru*