Scientific-technical journal

Volume 3 | Issue 2 Article 3

5-7-2020

A SUFFICIENT CONDITION FOR THE APPLICATION OF THE COMPRESSIVE MAPPING THEOREM IN BANACH SPACES TO FIND SOLUTIONS TO NONLINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS

D E. Akbarov
Kokand State Pedagogical Institute

U Y. Akbarov
Kokand State Pedagogical Institute

X Sh Turakulov
Kokand State Pedagogical Institute

UNDAMENTAL SCIENCES

УДК 517.9 : 519.3

A SUFFICIENT CONDITION FOR THE APPLICATION OF THE COMPRESSIVE MAPPING THEOREM IN BANACH SPACES TO FIND SOLUTIONS TO NONLINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS

Akbarov D.E., Akbarov U.Y., Turakulov X.Sh.

Kokand State Pedagogical Institute

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ СЖИМАЮЩЕГО ОТОБРАЖЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Акбаров Д.Е., Акбаров У.Й., Турақулов Х.Ш.

Кокандский государственный педагогический институт

СИҚИБ АКСЛАНТИРИШ ТЕОРЕМАСИНИ БАНАХ ФАЗОЛАРИДА ЧИЗИҚЛИ БЎЛМАГАН ФУНКЦИОНАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ЕЧИМЛАРИНИ ТОПИШГА ҚЎЛЛАШНИНГ ЕТАРЛИЛИК ШАРТИ

Акбаров Д.Е., Акбаров У.Й., Турақулов Х.Ш.

Қўқон давлат педагогика институти

Abstract. *The theorem on the sufficient condition for the applicability of the principle of contraction mappings in space* $L_p[a,b]$, $p>1$, *with reduction to a nonlinear integral equation, using the Green's function, to find the solution of the initial-boundary conditions of quasi-linear ordinary differential equations. The way is given in the proof of the theorem using the initial condition is determined by the* $u(a)=u_0, u_1(x)$, *then with the same procedure of finding a sequence of functions* $u_3(x)$, $u_4(x)$, ... , $u_m(x)$, ... *enables the approach to solving the problem with the desired accuracy. The above theorem and other as a byproduct, the results can be applied to research and find practical solutions of problems.*

Key words*:* quasilinear, differential equation, boundary and initial conditions, green's function, nonlinear integral equation, functional space, compressive mapping principle, sufficient condition.

Аннотация. *В статье доказана теорема о достаточном условии применимости принципа сжимающего отображения в пространстве* $L_p[a,b]$, $p>1$, *с приведением к нелинейному интегральному уравнению, пользуясь функцией Грина, для нахождения решение задачи начальным и /или граничным условиями квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Способом приведённым в доказательстве теоремы пользуясь начальным условием* $u(a)=u_0$ *определяется* $u_1(x)$, *далее с таким же порядком нахождения последовательность функций* $u_3(x)$, $u_4(x)$, ... , $u_m(x)$, ... *даёт возможность приближение к решению задачи с желаемой точности. Доказанная теорема и другие по путные результаты могут применяться для исследования и нахождения решений практических задач.*

Ключевые слова: квазилинейное, дифференциалное уравнение, граничное и начальное условия, функция Грина, нелинейное интегральное уравнение, функциональное пространство, принцип сжимающего отображения, достаточное условие.

Аннотация. *Мақолада квазичизиқли оддий дифференциал тенгламаларнинг ечимларини топиш масаласини чегаравий ва/ёки бошланғич шартлар билан боғлиқ ҳолда* *аниқланадиган Грин функцияси орқали чизиқсиз интеграл тенгламага келтириб, ечимини топишга $L_p[a,b]$, $p>1$ функциялар фазосида сиқиб акслантириш теоремасини қўллашнинг етарлилик шарти ҳақидаги теорема исботланди. Теорема исботидаги каби $u(a)=u_0$ бошланғич шартдан фойдаланиб $u_1(x)$, сўнгра $u_1(x)$ функция орқали $u_2(x)$ ва шу тартибда кетм-кет $u_3(x)$, $u_4(x)$, ... , $u_m(x)$, ... функцияларни топиш тенглама ечимига иҳтиёрий аниқлик билан яқинлашиш имкониятини беради. Теоремани кўплаб амалий масалалар ечимларини таҳлил қилишга ва топишга тадбиқ этиш мумкин.*

Таянч сўзлар: квазичизиқли, дифференциал тенглама, чегаравий ва бошланғич шартлар, Грин функцияси, чизиқсиз интеграл тенглама, функциялар фазоси, сиқиб акслантириш таъмоили, етарлилик шарти.

Кириш. Кўплаб амалий масалалар билан боғлиқ жараёнлар физика, химия, биология, геология каби табиий фанлар қоида ва қонуниятларига асосланган ҳолда дифференциал, интеграл, интегро-дифференциал функционал тенгламалар ҳамда тенгсизликлар билан ифодаланадиган математик моделларга эга[1-3]. Бундай функционал тенглама ҳамда тенгсизликларда таҳлил қилинаётган жараённи кечиши шарт-шароитлари билан аниқланадиган номаълум функция чизиқли ёки чизиқсиз боғлиқликда ифодаланади [4-8]. Чизиқли функционал масалалар узоқ даврлардан буён ўрганилиб, ҳозирда уларнинг таҳлил қилиш ва ечимларини топишнинг назарий ҳамда амалий асослари деярли тўла яратилган дейиш мумкин. Номаълум функция ва/ёки унинг ҳосиласи чизиқсиз қатнашган тенглама ва тенгсизликлар кўп ҳолатларда тадқиқ қилинаётган жараён ҳамда объектларнинг моделларини адекват ифодалаш имкониятини беради [2-8].

Масаланинг қўйилиши.Чизиқсизлик ифодаларининг турлича бўлиши ҳар бир чизиқсиз масаланинг таҳлилига, унинг ечимини топиш усулларини қўлланилишига, олинган натижаларнинг амалий талқинларига алоҳида ёндошувни талаб этади.

Қуйида банах фазоларида чизиқли бўлмаган функционал тенгламалар ечимларини топишга сиқиб акслантириш теоремасини қўллашнинг етарлилик шартини топиш билан боғлиқ масалалар ечими тадқиқ қилинади.

Масаланинг ечилиши. Эслатиб ўтиш ўринлики, норма аниқланган X фазода берилган ҳар қандай $\{x_1, x_2, \dots, x_n, ...\} = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ фундаментал, яъни $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|x_n - x_m\|_X = 0$ шартни қаноатлантирувчи кетма-кетлик бирор $x_0 \in X$ элементга яқинлашса бундай нормал фазо тўла нормал фазо ёки банах фазоси деб аталади[9].

Кейинги фикр-мулоҳазаларда фойдаланиладиган қуйидаги $n-$тартибли чизиқли оддий дифференциал тенгламанинг ечими ҳақида тўхталинади:

$$Lu = a_0(x)\frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1}(x)\frac{du}{dx} + a_n(x)u(x) = f(x), \tag{1}$$

бу ерда коэффициентлар $a_i(x), i=1,...n;$ ва тенгликнинг ўнг томонини ифодаловчи функция $f(x)$ $R-$ҳақиқий сонлар ўқига тегишли $x \in D \subset R$ бўлган соҳада узлуксиздир. Ушбу тенглама

$$Lu = a_0(x)\frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1}(x)\frac{du}{dx} + a_n(x)u(x) = 0 \tag{2}$$

берилган (1) тенгламага мос келувчи биржинсли тенглама дейилади.

Кўп ҳолларда (1) тенгламанинг хусусий ечими Грин функцияси $G(x,\xi)$ орқали

$$u(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) d\xi, \tag{5}$$

умумий ечими эса

$$u(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi + A_1u_1(x)+A_2u_2(x)+...+A_nu_n(x), \qquad (6)$$

ифодаланади, бу ерда $u_1(x),u_2(x),...,u_n(x)$ функциялар (2) тенгламанинг чизиқли боғлиқ бўлмаган ечимлари, $A_k,(k=1,2,...,n;)$ ўзгармас коэффициентлар бошланғич ёки чегаравий шартлардан топилади.

Грин функциясини (2) тенгламанинг чизиқли боғлиқ бўлмаган $u_1(x),u_2(x),...,u_n(x)$ ечимлари орқали ифодаланиши мумкин

$$G(x,\xi)=\frac{1}{f(\xi)}[c_1^{'}(x)u_1(x)+c_2^{'}(x)u_2(x)+...+c_n^{'}(x)u_n(x)]U(x-\xi),$$

бу ерда $c_k^{'}(x), \quad (k=1,2,...,n;)$ (4) тенгламалар системасининг ечими, функция $U(x-\xi)$ ушбу

$$U(x-\xi)=\begin{cases}0, \text{ агар } x<\xi \text{ бўлса};\\ 1, \text{ агар } x>\xi \text{ бўлса}.\end{cases}$$

шартни қаноатлантиради.

Агар бошланғич ёки чегаравий шартларга кўра (6) ифодадаги $A_k,(k=1,2,...,n;)$ коэффициентлар нолга тенг бўлса, у ҳолда (1) тенгламанинг умумий ечими ҳам (5) кўринишда ифодаланади [1,10]. Мана шу қилинган хулосадан квазичизиқли дифференциал тенгламалар ечими билан боғлиқ масалалар таҳлилида фойдаланилади. Юқори тартибли ҳосиласига ёки ҳосилаларига нисбатан чизиқли бўлган дифференциал тенгламалар квазичизиқли дейилади [1].

Ушбу тенглик муносабатлари:

1) Ҳақиқий сонлар ўқининг $x\in[a,b]=\Omega\subset R$ соҳасида аниқланган номаълум $u(x)$ функцияга нисбатан чизиқсиз, унинг $n-$тартибгача ҳосилаларига нисбатан чизиқли бўлган оддий дифференциал тенгламанинг умумий кўриниши ифодаси

$$L_{n,0}u=a_0(x)\frac{d^nu}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}(x)\frac{du}{dx}=f_1(x,u(x)); \qquad (7)$$

2) Номаълум функция ва унинг $m-$тартибгача бўлган ҳосилаларига нисбатан чизиқсиз $(n-m-1)$ дан n гача бўлган ҳосилаларига нисбатан чизиқли $n-$тартибли оддий дифференциал тенгламанинг умумий кўриниши

$$L_{n,m}u=a_0(x)\frac{d^nu}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}(x)\frac{d^{n-m-1}u}{dx^{n-m-1}}=f_2\left(x,u(x),u^{(1)}(x),u^{(2)},...,u^{(m)}(x)\right); \qquad (8)$$

амалий аҳамияти муҳим бўлган квазичизиқли дифференциал тенгламаларга мисоллар ҳисобланади.

Бу келтирилган тенгламаларнинг чизиқли қисмларини нолга тенглаб олинган биржинсли тенгламалари бошланғич ва чегаравий шартларни қаноатлантирувчи нолдан фарқли ечимларга эга бўлмаса, у ҳолда улар ечимларини топишни мос Грин функцияларидан фойдаланиб чизиқли бўлмаган интеграл ва интегро-дифференциал тенгламалар ечимларини топишга келтириш мумкин [10,11]:

1) Юқорида келтирилган (7) тенгламадан

$$u(x)=\int_a^b G_{n,0}(x,\xi)f_1(\xi,u(\xi))d\xi; \qquad (9)$$

2) Кейинги (8) тенгламадан

$$u(x)=\int_a^b G_{n,m}(x,\xi)f_2\left(\xi,u(\xi),u^{(1)}(\xi),u^{(2)}(\xi),...,u^{(m)}(\xi)\right)d\xi; \qquad (10)$$

каби тегишли интегро-дифференциал тенгламаларга ўтиш мумкин.
Қуйида (7) тенгламага мос келувчи биржинсли

$$L_{n,0}u = a_0(x)\frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + ... + a_{n-1}(x)\frac{du}{dx} = 0$$

тенглама чегаравий шартларни қаноатлантирувчи нолдан фарқли ечимларга эга бўлмаганда масаланинг қўйилишидан келиб чиққан ҳолда мос Грин функциясидан фойдаланиб ҳосил қилинган (9) тенгламани ечимини топишга сиқиб акслантириш теоремасини қўллашнинг етарлилик шартини аниқлаш масаласи ечилади.

Ушбу

$$u(x) = Au(x) \tag{11}$$

тенгликни қаноатлантирувчи $[a,b] = D \subset R$ соҳада аниқланган номаълум $u(x) \in X$ функцияни топиш талаб этилсин, бу ерда $X -$ функциялар фазоси масаланинг қўйилиши билан боғлиқ $u(x)$ функциянинг хоссаларидан келиб чиққан ҳолда аниқланади.

Сиқиб акслантириш тамоилига кўра $X -$нормалланган тўла фазони ўзини ўзига акслантириш $A: X \to X$ бўлиб, $\forall u_1, u_2 \in X$ функциялар учун $0 < \alpha < 1$ шартни қаноатлантирувчи қуйидаги муносабат

$$\|Au_1(x) - Au_2(x)\|_X < \alpha \|u_1(x) - u_2(x)\|_X$$

ўринли бўлса (11) тенглама ягона $u_0(x) = Au_0(x)$ ечимга эга бўлади Бу ечим $A: X \to X$ акслантиришнинг қўзғалмас нуқтаси деб ҳам аталади [9].

Ҳосил қилинган (9) тенглама аслида (7) тенглама ва тегишли бошланғич ҳамда чегаравий шартлардан келиб чиққанлиги учун бу интеграл тенгламадаги номаълум функция тегишли бўлган $X -$функциялар фазоси (7) тенгламага боғлиқ шартлар билан аниқланади. Шундай қилиб, (7) тенгламадаги номаълум функция $u(x) \in C^{(n-1)}[a,b] \subset C[a,b] \subset L_p[a,b]$ бўлиб, ушбу $\|L_p[a,b]\| \le \|\cdot\|_{C[a,b]} \le \|\cdot\|_{C^{(n-1)}[a,b]}$ муносабат ўринли.

Ҳосил қилинган (9) тенгламада

$$B(\cdot) = \int_a^b G_{n,0}(x,\xi)(\cdot)d\xi \quad \text{ва } F_1(\cdot) = f_1(\xi,\cdot) \tag{12}$$

белгилашларни қилиб уни операторли кўринишда ифодалаш мумкин

$$u = BF_1 u, \tag{13}$$

бу ерда $B -$чизиқли интеграл оператор, $F_1 -$чизиқсиз. У ҳолда бу операторлар суперпозициясини $A -$оператор билан белгилаб,

$$u = BF_1 u = Au \text{ ёки } \quad u = Au \tag{14}$$

тенгликлар олинади. Агар $u(x) \in L_p[a,b]$ бўлиб, чизиқсиз оператор $F_1 : L_p[a,b] \to L_q[a,b]$ ҳамда чизиқли оператор $B : L_q[a,b] \to L_p[a,b]$ бўлса, улар суперпозициясидан иборат бўлган оператор $A : L_p[a,b] \to L_p[a,b]$ бўлади. Энди $A -$операторнинг сиқиб акслантириш хусусиятига эга бўлиш шарти топилади.

Теорема. Ушбу шартларни $p > 1$ *ва* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ қаноатлантирувчи p ва $q -$ҳақиқий сонлар, $\xi \in [a,b] = D \subset R$ ҳамда барча $\zeta \in R$ учун $f_1(\xi;\zeta) -$функция ўзгарувчи ζ бўйича текис узлуксиз бўлиб:

a) агар

$$|\ f_1(\xi,\zeta)\ | \le g(\xi) + C|\zeta|^{p-1}, \tag{15}$$

бу ерда $g(\xi)\in L_q[a,b]$, $C=const.$, шарт бажарилса акслантириш $f_1(\xi,u(\xi))\in L_q[a,b]$ бўлиб, оператор $F_1(\cdot): L_p[a,b]\to L_q[a,b]$ узлуксиз ва чегараланган бўлади;

б) агар *а*) қисм шарти билан биргаликда

$$|\ f_1(\xi,\zeta_1)-f_1(\xi,\zeta_2)\ |\le\alpha|\zeta_1-\zeta_2|^{p-1},\quad 0<\alpha<1 \tag{16}$$

тенгсизлик ҳам $\forall\zeta_1,\zeta_2\in R$ учун бажарилса $f_1(\xi,u(\xi))\in L_q[a,b]$ функция билан аниқланувчи оператор $F_1(\cdot): L_p[a,b]\to L_q[a,b]$ сиқиб акслантирувчи бўлади;

в) агар *а*) ва *б*) қисмлар шартлари билан биргаликда $\|B\|_{L_p[a,b]}\cdot\alpha=\beta<1$ бажарилса (9) тенгламанинг ягона $u(x)\in L_p[a,b]$ ечими мавжуд бўлади;

г) агар *а*), *б*) ва *в*) қисмлар шартлари бажарилиб, (9) тенглама ечими $u(x)\in L_p[a,b]$ n –тартибгача ҳосилаларига эга бўлса, яъни $u(x)\in L_p[a,b]\cap C^{(n)}[a,b]$ бўлиб, (1) тенгламанинг ечимларига қўйилган бошланғич/чегаравий шартларни ҳам қаноатлантирса, у ҳолда бу ечим (1) ёки (7) тенглама билан боғлиқ бошланғич/чегаравий масаланинг ҳам ечими бўлади.

Олинган натижанинг таҳлили ва хулоса. Шундай қилиб квазичизиқли тенгламалар чизиқли қисмларини нолга тенглаб олинган биржинсли тенгламалари бошланғич ва чегаравий шартларни қаноатлантирувчи нолдан фарли ечимларга эга бўлмаса, у ҳолда улар ечимларини топишни мос Грин функцияларидан фойдаланиб чизиқли бўлмаган интеграл ва интегро-дифференциал тенгламалар ечимларини топишга келтириш мумкинлиги ҳақида тўхталинди. Бошланғич ёки чегаравий шартлар билан берилган квазичизиқли оддий дифференциал тенгламага мос Грин функцияси орқали аниқланган чизиқсиз интеграл тенгламага номаълум функция $u(x)\in L_p[a,b]$ бўлиб, чизиқсиз оператор $F_1: L_p[a,b]\to L_q[a,b]$ ҳамда чизиқли интеграл оператор $B: L_q[a,b]\to L_p[a,b]$ бўлса, улар суперпозициясидан иборат бўлган $A: L_p[a,b]\to L_p[a,b]$ операторга сиқиб акслантириш таъмоилини тадбиқининг етарлилик шартини ифодаловчи теорема исбот этилди. Теорема исботидаги каби $u(a)=u_0$ бошланғич шартдан фойдаланиб $u_1(x)$, сўнгра $u_1(x)$ функция орқали $u_2(x)$ ва шу тартибда кетм-кет $u_3(x)$, $u_4(x)$, ... , $u_m(x)$, ... функцияларни ҳисоблаш тенглама ечимига иҳтиёрий аниқлик билан яқинлашиш имконияти мавжудлигини ифодалайди. Бу эса теоремани кўплаб амалий масалалар ечимларига тадбиқ этиш имкониятини яратади. Теорема шартларини кўриб ўтилган (10), (11) каби интеграл ҳамда интегро-дифференциал тенгламаларга нисбатан ҳам мос ҳолда шакллантириш мумкин.

References:

[1]. Tixinov A.N., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki.–M.: «Nauka». 1966.

[2]. Marchuk G.I. Matematicheskie modeli v immunologii. .–M.: «Nauka». Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literaturы, 1980.

[3]. Etkins P. Fizicheskaya ximiya. Perevod s angliyskogo na russkiy yazык. –M.: «Mir». 1980. 1–2 toma.

[4]. Gaevskiy X., Greger K., Zaxarias K. Nelineynie operatornыe uravneniya i operatornie differentsialnie uravneniya. –M.: Mir, 1978. - s.336.

[5]. Vaynberg M.M. Variatsionniy metod i metod monotonnix operatorov.M.: Nauka,1972.416 c.

[6]. Akbarov D.E., Melnik V.S., Yasinskiy V.V. Metodi upravleniya smeshannimi (sosredotochenno-raspredelennimi) sistemami. Operatorniy podxod.K.: Viriy, 1998.223 s.

[7]. Akbarov D.E. Pro odnu optimizatsiynu zadachu v lebegovix prostorax // Naukovi visti NTUU «KPI». -1998, № 2. -s. 84-87.

[8]. Kufner A., Fuchik S. Nelineynыe differentsialnie uravneniya. –M.: Nauka, 1988. - 304 s.

[9]. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementi teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza. –M.: «Nauka», 1981.542 s.

[10]. Krasnoselskiy M.A. Topologicheskie metodi v teorii nelineynix integralnix uravneniy. - M.: Gos. izd. texn.-teor. lit., 1956. - 392 s

[11]. Butkovskiy A.G. Xarakteristiki sistem s oaspredelennimi parametrami (spravochnoe posobie). –M.: «Nauka». Glavnaya redaktsiya fiz.-mat. literaturi. 1979. –224 str.

Web сайтлар

[1]. *bardosh9295@mail.ru*