[Scientific-technical journal](https://uzjournals.edu.uz/ferpi)

Volume 24 | Issue 4 | Article 7

9-3-2020

ON A PROPERTY OF FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIATION OPERATORS IN THE KERNEL OF WHICH THE MEYER FUNCTION

M. Y. Qosimova
Ferghana Polytechnic Institute, author@ferpi.uz

N. X. Yusupova
Ferghana Polytechnic Institute, author@ferpi.uz

SHORT MESSAGES

ON A PROPERTY OF FRACTIONAL INTEGRO-DIFFERENTIATION OPERATORS IN THE KERNEL OF WHICH THE MEYER FUNCTION

Qosimova M.Y., Yusupova N.X.

Ferghana Polytechnic Institute

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ОПЕРАТОРОВ ДРОБНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ, В ЯДРЕ КОТОРЫХ УЧАСТВУЕТ ФУНКЦИЯ МЕЙЕРА

Касимова М.Я., Юсупова Н.Х.

Ферганский политехнический институт

МЕЙЕР ФУНКЦИЯСИ ҚАТНАШГАН ЯДРОДА КАСРЛИ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЛАНГАН ОПЕРАТОРНИНГ БИР ХОССАСИ ҲАҚИДА

Касимова М.Я., Юсупова Н.Х.

Фарғона политехника институти

Abstract. *In this paper, compositions of operators are introduced and studied, in the kernel of which the Meyer function.*
Key words: kernel, integral, operator, Meyer function, Mellin transform.

Аннотация: *усшу мақолада ядрода Мейер функцияси қатнашган операторлар композицияси ва киритилган ва ўрганилган.*
Таянч сўзлар: ядро, интеграл, оператор, Мейер функцияси, Меллин алмаштирисҳлар.

Аннотация: *В данной работе введена и изучена композиции операторов, в ядре которых участвует функция Мейера.*
Ключевые слова: ядро, интеграл, оператор, функция Мейера, преобразование Меллина.

Пусть $a_i,\ b_j \in R, \quad (i=\overline{1,6};\quad j=\overline{1,5}), \quad \varphi(x)\in C(0,1)\cap L_1(0,1)$

Справедлива следующая.

Лемма. Если

$$-1 \prec \sum_{j=1}^{5} b_j - \sum_{i=1}^{6} a_i \prec 0,$$

то имеет место тождество

$$B_1\left[B_2\left[\varphi(x)\right]\right] \equiv \varphi(x), \tag{1}$$

Где

$$B_1\left[\varphi(x)\right] = \frac{d}{dx} x^{-a_6} \int_0^x G_{66}^{60}\left(\frac{t}{x}\middle| \begin{matrix} b_1-a_6, b_2-a_6,\ b_3-a_6, b_4-a_6, b_5-a_6\ 1-a_6 \\ a_1-a_6,\ a_2-a_6, a_3-a_6, a_4-a_6, a_5-a_6, 0 \end{matrix}\right)\varphi(t)dt, \tag{2}$$

$$B_1\left[\varphi(x)\right] = \frac{d}{dx} x^{-a_6} \int_0^x G_{66}^{60}\left(\frac{t}{x}\middle| \begin{matrix} b_1-a_6, b_2-a_6,\ b_3-a_6, b_4-a_6, b_5-a_6\ 1-a_6 \\ a_1-a_6,\ a_2-a_6, a_3-a_6, a_4-a_6, a_5-a_6, 0 \end{matrix}\right)\varphi(t)dt, \tag{3}$$

$G_{pq}^{mn}(...)$ – функция Мейера [1]

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$B[\varphi(x)] = \frac{d}{dx} x^{-a_6} \int_0^x t^{a_6-1} G_{66}^{60}\left(\frac{t}{x}\Big|_{a_1-a_6,\ a_2-a_6,\ a_3-a_6,\ a_4-a_6,\ a_5-a_6,\ 0}^{b_1-a_6,\ b_2-a_6,\ b_3-a_6,\ b_4-a_6,\ b_5-a_6\ 1-a_6}.\right)dt \times \int_0^x G_{66}^{60}\left(\frac{z}{t}\Big|_{b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,0}^{a_1,a_2,\ a_3,a_4,\ a_5\ a_6}\right)\varphi(z)dz \quad (4)$$

Отсюда, меняя порядок интегрирования, имеем

$$B[\varphi(x)] = \frac{d}{dx} x^{-a_6} \int_0^x \varphi(z)dz \cdot \int_z^x t^{a_6-1} G_{66}^{60}\left(\frac{t}{x}\Big|_{a_1-a_6,\ a_2-a_6,\ a_3-a_6,\ a_4-a_6,\ a_5-a_6,\ 0}^{b_1-a_6,\ b_2-a_6,\ b_3-a_6,\ b_4-a_6,\ b_5-a_6\ 1-a_6}\right) \times$$

$$\times G_{66}^{60}\left(\varphi\left(\frac{z}{t}\Big|_{\cdot b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,0}^{a_1,a_2,\ a_3,a_4,\ a_5\ a_6}\right)dt, \quad (5)$$

Полагая во внутреннем интеграле $t = xv$ и воспользовавшись формулой [2]

$$G_{pq}^{mn}\left(x\Big|_{b_1,b_2,\ldots b_q}^{a_1,a_2,\ldots,a_p}\right) = G_{pq}^{nm}\left(\frac{1}{x}\Big|_{1-a_1,1-a_2,\ldots,1-a_p}^{1-b_1,1-b_2,\ldots,1-b_q}\right), \quad (6)$$

получим

$$B[\varphi(x)] = \frac{d}{dx}\int_0^x K(\sigma)\varphi(z)dz, \quad (7)$$

где

$$K(\sigma) = \int_0^\infty v^{a_6-1} f_1(\sigma v) f_2(v)dv, \quad \sigma = \frac{x}{z} \quad (8)$$

$$f_1(v) = \begin{cases} 0, & 0 \le v \prec 1 \\ G_{66}^{06}\left(v\Big|_{1-a_1,1-a_2,1-a_3,1-a_4,1-a_5,1-a_6}^{1-b_1,1-b_2,1-b_3,1-b_4,1-b_5,1}\right), & v \ge 1 \end{cases} \quad (9)$$

$$f_2(v) = \begin{cases} 0, & v \succ 1 \\ G_{66}^{06}\left(v\Big|_{1-a_1,1-a_2,1-a_3,1-a_4,1-a_5,1-a_6}^{1-b_1,1-b_2,1-b_3,1-b_4,1-b_5,1}\right), & 0 \le v \prec 1 \end{cases} \quad (10)$$

Для вычисления выражение (6) воспользуемся преобразованием Меллина [1].
На основании формулы [1]

$$x^{\delta_1}\int_0^\infty \xi^{\delta_2} g_1(x\xi) g_2(\xi)d\xi \to g_1^*(S+\delta_1) g_2^*(1-\delta_1+\delta_2-S), \quad (11)$$

из (8) имеем

$$K^*(S) \to f_1^*(S) f_2^*(a_6 - S), \quad (12)$$

Далее, используя формулы [2]

$$G_{pq}^{mn}\left(z\Big|_{b_1,b_2,\ldots,b_q}^{a_1,a_2,\ldots,a_p}\right) \to \Gamma\left[\begin{matrix} S+b_1,\ S+b_2,\ldots,S+b_m,1-a_1-S,1-a_2-S,\ldots,1-a_n-S \\ S+a_{n+1},S+a_{n+2},\ldots,S+a_p,1-b_{m+1}-S,1-b_{m+2}-S,\ldots,1-b_q-S \end{matrix}\right], \quad (13)$$

$$p' = q' \ge 1,\ m+n = p,\ \sum_{j=1}^n (a_j - b_j) \succ 0$$

из (9) и (10) находим

$$f_1^*(S) = \Gamma\left[\begin{matrix} b_1-S, b_2-S, b_3-S, b_4-S, b_5-S, -S \\ a_1-S, a_2-S, a_3-S, a_4-S, a_5-S, a_6-S \end{matrix}\right], \quad (14)$$

$$\operatorname{Re} S \prec \min\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, 0\}$$

$$f_2^* = \Gamma\left[\begin{matrix} s+a_1-a_6, s+a_2-a_6, s+a_3-a_6, s+a_4-a_6, s+a_5-a_6, S \\ s+b_1-a_6, s+b_2-a_6, s+b_3-a_6, s+b_4-a_6, s+b_5-a_6, s+1-a_6 \end{matrix}\right] \quad (15)$$

Подставляя (14), (15) в (12), имеем

SHORT MESSAGES

$$K^{*}(S)=\Gamma\begin{bmatrix}-S\\1-S\end{bmatrix},\ S\prec 0, \tag{16}$$

Принимая во внимание (16) и формуле [2]

$$(z-1)_{+}^{c-1}+\Gamma(c)\Gamma\begin{bmatrix}1-C-S\\1-S\end{bmatrix},\ \operatorname{Re}C\succ 0,\ \ \operatorname{Re}S\prec 1-\operatorname{Re}C, \tag{17}$$

Из (7) получим

$$B\left[\varphi(x)\right]=\frac{d}{dx}D_{0x}^{-1}\varphi(x)=D_{0x}^{0}\varphi(x)$$

Отсюда следует справедливость тождество (3)

References

[1]. Prudnikov A.P., Brichkov Yu.A., Marichev O.I. Integrali i ryadi. Dopolnitelnie glavi. M.: Nauka 1986, 800 s.

[2]. Marichev O.I. «Metod vichisleniya integralov ot spetsialnix funktsiy» Minsk.: Nauka i texnika. 1978, 312s.

[3]. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.N. Integrali i proizvodnie drobnogo poryadka i nekotorie ix prilojeniya. Minsk. Nauka i texnika. 1987.688 s.

Литература

[1]. Прудников А.П., Бричков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. М.: Наука 1986, 800 с.

[2]. Маричев О.И. «Метод вычисления интегралов от специальных функций» Минск.: Наука и техника. 1978, 312с.

[3]. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.Н. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск. Наука и техника. 1987.688 с.