Scientific Bulletin of Namangan State University

Volume 1 | Issue 3 Article 3

7-10-2019

WEAKLY PERIODIC GIBBS MEASURES FOR THE FERROMAGNETIC IZING MODEL ON THE CAYLEY TREE OF ORDER TWO IN THE CASE INDEX OF NORMAL SUBGROUP IS TWO.

Музаффар Мухаммаджоновиш Рахматуллаев
Namangan state university

Зулхумор Атавалихон қизи Бурхонова
Namangan state university

WEAKLY PERIODIC GIBBS MEASURES FOR THE FERROMAGNETIC IZING MODEL ON THE CAYLEY TREE OF ORDER TWO IN THE CASE INDEX OF NORMAL SUBGROUP IS TWO.

НОРМАЛ БЎЛУВЧИ ИККИГА ТЕНГ БЎЛГАН ХОЛДА ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ КЭЛИ ДАРАХТИДАГИ ФЕРРОМАГНЕТИК ИЗИНГ МОДЕЛИ УЧУН КУЧСИЗ ДАВРИЙ ГИББС ЎЛЧОВЛАРИ

Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджонович,
Бурхонова Зулхумор Атавалихон қизи
Наманган давлат университети

Аннотация *Мақолада иккинчи тартибли Кэли дарахтида ферромагнетик Изинг модели учун нормал бўлувчи иккига тенг бўлган ҳолда барча кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари трансляцион-инвариант ёки даврий бўлиши кўрсатилган.*

Калит сўзлар: *Кэли дарахт, Изинг модел ,Гиббс ўлчови ,кучсиз даврий ўлчов.*

СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА, ДЛЯ ФЕРРОМАГНЕТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ПОРЯДКА ДВА В СЛУЧАЕ НОРМАЛЬНОГО ДЕЛИТЕЛЯ ИНДЕКСА 2.

Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджонович,
Бурхонова Зулхумор Атавалихон қизи
Наманганский государственный университет

Аннотация. *В данном статье изучены слабо периодические меры Гиббса, соответствующие нормальным делителям индекса 2. Для ферромагнетической модели Изинга на дереве Кэли порядка* $k=2$, *показано, что всякая слабо периодическая мера Гиббса являются либо трансляционно-инвариантная либо периодическая.*

Ключевые слова : *дерево Кэли, мера Гиббса, модел Изинга, слабо периодические меры.*

WEAKLY PERIODIC GIBBS MEASURES FOR THE FERROMAGNETIC IZING MODEL ON THE CAYLEY TREE OF ORDER TWO IN THE CASE INDEX OF NORMAL SUBGROUP IS TWO.

Рахматуллаев Музаффар Мухаммаджонович
Бурхонова Зулхумор Атавалихон қизи
Namangan state university

Abstract. *In this paper considered ferromagnetic Izing model on the Cayley tree of order two. We show that, all weakly periodic Gibbs measures are translation-invariant or periodic.*

Key words: *Cayley tree,Gibbs measure, Izing model.,weakly periodic measure.*

$T^k = (V, L)$, $k \geq 1$, k -тартибли Кэли дарахти бўлсин, яъни ҳар бир учидан $k+1$ та қирра чиқувчи чексиз дарахт бўлсин, бу ерда V - учлар тўплами, L - қирралар тўплами.

Маълумки [1], T^k - Кэли дарахти учлари тўплами ва ҳосил қилувчилари мос равишда $a_1, a_2, ..., a_{k+1}$ бўлган $k+1$ та иккинчи тартибли циклик группаларнинг озод кўпайтмаси бўлган G_k - озод группа элементлари ўртасида ўзаро бир қийматли мослик ўрнатиш мумкин.

$\Phi = \{-1, 1\}$ ва конфигурация бўлсин, яъни $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi : x \in V\}$,барча конфигурациялар фазосини $\Omega = \Phi^V$ билан белгилаймиз. Изинг моделининг гамильтонианини қуйидагича бўлади:

$$H(\sigma) = -J \sum_{<x,y>\in L} \sigma(x)\sigma(y), \quad (1)$$

бу ерда $J \in R$, $<x, y>$ - яқин қўшнилар.

Маълумки [1], Изинг моделининг ҳар бир Гиббс ўлчови учун қуйидаги шартни қаноатлантирувчи $h = \{h_x, x \in G_k\}$ қийматлар тўпламини мос қўйиш мумкин

$$h_x = \sum_{y\in S(x)} f(h_y, \theta), \quad (2)$$

бу ерда $S(x)$ - «тўғри авлодлар» тўплами, $x \in V$ ва $f(x,\theta) = arcth(\theta th x)$, $\theta = th(J\beta)$, $\beta = \frac{1}{T}$, $T > 0$ - температура.

Ихтиёрий $x \in G_k$ учун $x_\downarrow = \{y \in G_k :< x, y >\} \setminus S(x)$ белгилаш киритамиз.

$G_k / \hat{\overline{G}}_k = \{H_1, H_2, ..., H_r\}$ – фактор-группа бўлсин, бу ерда $\overline{G}_k$ – индекси $r \geq 1$ бўлган нормал бўлувчи.

Таъриф 1. Агар ихтиёрий $x \in G_k$, $y \in \overline{G}_k$ лар учун $h_{xy} = h_x$ бўлса, у ҳолда $h = \{h_x, x \in G_k\}$ қийматлар мажмуи $\overline{G}_k$ - даврий дейилади. G_k - даврий қийматлар мажмуи трансляцион-инвариант дейилади.

Таъриф 2. Агар ихтиёрий $x \in H_i$, $x_\downarrow \in H_j$ лар учун $h_x = h_{ij}$ бўлса, яъни h_x нинг қиймати x ва $x_\downarrow$ лар тегишли бўлган синфларга боғлиқ бўлса, у ҳолда $h = \{h_x, x \in G_k\}$ қийматлар мажмуи $\overline{G}_k$ - кучсиз даврий дейилади.

Таъриф 3. Агар μ ўлчов $\overline{G}_k$ - (кучсиз) даврий h қийматлар мажмуига мос келса, у ҳолда бу ўлчов $\overline{G}_k$ - (кучсиз) даврий деб аталади.

Изинг модели учун трансиляцион – инвариант ва даврий Гиббс ўлчовлари ҳақидаги фактларни [1] дан кўриш қийин эмас. Маьлумки [1] , ҳар қандай H-нормал бўлувчи учун H-даврий Гиббс ўлчови ёки трансляцион-инвариант ёки $G_k^{(2)}$ даврий бўлади.Шу сабабдан [2] да кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари тушунчаси киритилган.

Дарахт тартиби тўрдан катта бўлганда Кэли дарахтида Изинг модели учун баъзи шартлар остида индекси иккига тенг нормал бўлувчига нисбатан бештадан кам бўлмаган кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжудлиги тадқиқ қилинган (қаранг [1], [2]). Нормал бўлувчи индекси тўрт бўлган ҳолда параметрларнинг маълум шартлар асосида Изинг модели учун камида 7 та кучсиз даврий Гиббс ўлчови мавжудлиги кўрсатилган (қаранг [1], [3]). Кэли дарахтида ташқи майдонли Изинг модели учун маълум шартлар асосида иккитадан кам бўлмаган H_k – кучсиз даврий (даврий бўлмаган) Гиббс ўлчовлари мавжудлиги исботланган [4], (k_0)-даврий (трансляцион-инвариант) Гиббс ўлчовлари тушунчалари киритилган ва бундай Гиббс ўлчовлари мавжудлиги исботланган [5].

Ушбу мақоланинг асосий мақсади ферромагнетик Изинг модели учун нормаль бўлувчининг индекси иккига тенг бўлган ҳолда иккинчи тартибли Кэли дарахтида кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари мавжуд бўлмаслигини исботлашдир.

Маълумки $G_k^{(2)}=\{x\in G_k : |x| - \text{жуфт}\}$ индекси иккига тенг бўлган нормаль бўлувчи бўлар эди (қаранг [1]).

Теорема 1: Иккинчи тартибли Кэли дарахтида ферромагнит $(0<\theta<1)$ Изинг модели учун $H_{\{a_1\}}$-кучсиз даврий Гиббс ўлчови $G_k^{(2)}$-даврий ёки трансиляцион инвариант бўлади.

Исбот. $H_{\{a_1\}}=\{x\in G_k : \omega_x(a_1) - \text{жуфт}\}$ - бўлсин. Маьлумки $H_{\{a_1\}}$ – индекси 2 га тенг нормал бўлувчи бўлади (қаранг [1]). $G_k / H_{\{a_1\}}=\{H_0, H_1\}$ – фактор группа бўлсин. У ҳолда $H_{\{a_1\}}$-кучсиз даврий h_x лар қуйидагича бўлади.

$$h_x=\begin{cases} h_{00}, x\in H_0, x_{\downarrow}\in H_0, \\ h_{01}, x\in H_0, x_{\downarrow}\in H_1, \\ h_{10}, x\in H_1, x_{\downarrow}\in H_0, \\ h_{11}, x\in H_1, x_{\downarrow}\in H_1. \end{cases}$$

(2) га кўра $k=2$ да h_x лар қуйидаги системани оламиз.

$$\begin{cases} h_{00} = f(h_{10},\theta) + f(h_{00},\theta), \\ h_{01} = 2f(h_{00},\theta), \\ h_{10} = 2f(h_{11},\theta), \\ h_{11} = f(h_{11},\theta) + f(h_{01},\theta). \end{cases} \qquad (3)$$

бу ерда

$$f(h,\theta) = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\theta)e^{2h} + (1-\theta)}{(1-\theta)e^{2h} + (1+\theta)}, \qquad (4)$$

(4) дан қуйидагини оламиз

$$f(h,\theta) = \frac{1}{2}\ln\frac{\frac{(1+\theta)}{(1-\theta)}e^{2h} + 1}{e^{2h} + \frac{(1+\theta)}{(1-\theta)}}$$

$\theta = \tanh(J\beta)$, $\beta = \frac{1}{T}, T > 0$ -температура.

(4) формулада $\alpha = \frac{1+\theta}{1-\theta}$ белгилаш киритсак у ҳолда (4) дан

$$f(h,\theta) = \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha e^{2h} + 1}{e^{2h} + \alpha}. \quad (5)$$

оламиз. (5) ни (3) га қўйиб қуйидаги системани оламиз.

$$\begin{cases} h_{00} = \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha e^{2h_{10}} + 1}{e^{2h_{10}} + \alpha} + \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha e^{2h_{00}} + 1}{e^{2h_{00}} + \alpha}, \\ h_{01} = \ln\frac{\alpha e^{2h_{00}} + 1}{e^{2h_{00}} + \alpha}, \\ h_{10} = \ln\frac{\alpha e^{2h_{11}} + 1}{e^{2h_{11}} + \alpha}, \\ h_{11} = \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha e^{2h_{11}} + 1}{e^{2h_{11}} + \alpha} + \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha e^{2h_{01}} + 1}{e^{2h_{01}} + \alpha}. \end{cases} \qquad (6)$$

Соддалик учун $h_{00} = h_1, h_{01} = h_2, h_{10} = h_3, h_{11} = h_4$ деб олсак ва $z_i = e^{2h_i}$ алмаштириш бажарсак , у ҳолда (6) система қуйидагича бўлади.

$$\begin{cases} z_1 = \left(\dfrac{\alpha z_1 + 1}{z_1 + \alpha}\right) \cdot \left(\dfrac{\alpha z_3 + 1}{z_3 + \alpha}\right), \\ z_2 = \left(\dfrac{\alpha z_1 + 1}{z_1 + \alpha}\right)^2, \\ z_3 = \left(\dfrac{\alpha z_4 + 1}{z_4 + \alpha}\right)^2, \\ z_4 = \left(\dfrac{\alpha z_4 + 1}{z_4 + \alpha}\right) \cdot \left(\dfrac{\alpha z_2 + 1}{z_2 + \alpha}\right). \end{cases} \tag{7}$$

Агар (7) системани фақат $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$ кўринишда ечими бўлиши мумкин эканлигини кўрсатсак Теорема 1 исботланади. Тескарисидан фараз қилайлик яьни системани $z_1 = z_2 = z_3 = z_4$ дан фарқли ечимга эга бўлсин. У ҳолда қуйидаги ҳоллардан бири бўлиши мумкин:

1) $z_1 = z_2, z_3 \neq z_4$ 7) $z_1 > z_2 > z_3 > z_4$ 13) $z_2 > z_1 > z_3 > z_4$
2) $z_1 = z_3, z_2 \neq z_4$ 8) $z_1 > z_3 > z_2 > z_4$ 14) $z_2 > z_3 > z_1 > z_4$
3) $z_1 = z_4, z_3 \neq z_2$ 9) $z_1 > z_3 > z_4 > z_2$ 15) $z_2 > z_3 > z_4 > z_1$
4) $z_2 = z_3, z_1 \neq z_4$ 10) $z_1 > z_2 > z_4 > z_3$ 16) $z_2 > z_1 > z_4 > z_3$
5) $z_2 = z_4, z_1 \neq z_3$ 11) $z_1 > z_4 > z_3 > z_2$ 17) $z_2 > z_4 > z_1 > z_3$
6) $z_3 = z_4, z_1 \neq z_2$ 12) $z_1 > z_4 > z_2 > z_3$ 18) $z_2 > z_4 > z_3 > z_1$

19) $z_3 > z_2 > z_4 > z_1$ 25) $z_4 > z_1 > z_2 > z_3$
20) $z_3 > z_1 > z_2 > z_4$ 26) $z_4 > z_2 > z_1 > z_3$
21) $z_3 > z_1 > z_4 > z_2$ 27) $z_4 > z_2 > z_3 > z_1$
22) $z_3 > z_2 > z_1 > z_4$ 28) $z_4 > z_1 > z_3 > z_2$
23) $z_3 > z_4 > z_1 > z_2$ 29) $z_4 > z_3 > z_2 > z_1$
24) $z_3 > z_4 > z_2 > z_1$ 30) $z_4 > z_3 > z_1 > z_2$

Бу ҳолларни алоҳида кўриб чиқамиз

1) Фараз қилайлик (7) ни ечими $z_1 = z_2,\ z_3 \neq z_4$ кўринишида бўлсин, у ҳолда (7) системани 1- ва 2- тенгламасидан қуйидагигига эга бўламиз.

$$\frac{\left(\frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\alpha z_3+1}{z_3+\alpha}\right)}{\left(\frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}\right)^2}=1 \Rightarrow \frac{\alpha z_3+1}{z_3+\alpha}=\frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}. \quad (8)$$

(7) системани 3- ва 4- тенгламасидан қуйидагига эга бўламиз.

$$\frac{z_4}{z_3}=\frac{\left(\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\alpha z_2+1}{z_2+\alpha}\right)}{\left(\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}\right)^2}=\frac{\frac{\alpha z_2+1}{z_2+\alpha}}{\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}}. \quad (9)$$

$z_1=z_2$ бўлганлиги учун (9) да z_2 ни z_1 билан алмаштирамиз.

Натижада:

$$\frac{z_4}{z_3}=\frac{\frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}}{\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}}.$$

(8) га кўра $\frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}$ ни $\frac{\alpha z_3+1}{z_3+\alpha}$ билан алмаштирамиз.

Натижада:

$$\frac{z_4}{z_3}=\frac{\frac{\alpha z_3+1}{z_3+\alpha}}{\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}} \Rightarrow z_3\cdot\frac{\alpha z_3+1}{z_3+\alpha}=z_4\cdot\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha},$$

$$(z_4+\alpha)(\alpha z_3^2+z_3)=(\alpha+z_3)(\alpha z_4^2+z_4),$$

$$\alpha z_4 z_3^2+z_3 z_4+\alpha^2 z_3^2+\alpha z_3=\alpha^2 z_4^2+\alpha z_4+\alpha z_3 z_4^2+z_3 z_4,$$

$$\alpha z_3 z_4(z_3-z_4)+\alpha^2(z_3-z_4)(z_3+z_4)+\alpha(z_3-z_4)=0,$$

$$(z_3-z_4)(\alpha z_3 z_4+\alpha^2(z_3+z_4)+\alpha)=0 .$$

Биз ферромагнит Изинг моделини кўраётшганимиз учун $0<\theta<1$ бўлади, бундан эса $\alpha>1$ эканини оламиз. $\alpha>1, z_3>0, z_4>0$ бўлганидан тенглик 0 га тенг бўлиши учун $z_3-z_4=0 \Rightarrow z_3=z_4$ эканини оламиз. Бу эса фаразимизга зид. Демак (7) нинг ечими 1) кўринишида бўлиши мумкин эмас экан .

2) Фараз қилайлик (7) ни ечими, $z_1=z_3$, $z_2\neq z_4$ кўринишида бўлсин,у ҳолда (7) системани 1- ва 3- тенгламасидан қуйидагига эга бўламиз.У ҳолда

$$\frac{\left(\frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\alpha z_3+1}{z_3+\alpha}\right)}{\left(\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}\right)^2}=1. \quad (10)$$

$z_1=z_3$ бўлгани учун (10) да z_1 ни z_3 билан алмаштирамиз.
Натижада:

$$\frac{\left(\frac{\alpha z_3+1}{z_3+\alpha}\right)^2}{\left(\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}\right)^2}=1.$$

га эга бўламиз . $\alpha>1, z_3>0, z_4>0$ бўлгани учун

$$\frac{\alpha z_3+1}{z_3+\alpha}=\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}\Rightarrow$$

$$\alpha z_3 z_4+\alpha^2 z_3+z_4+\alpha=\alpha z_3 z_4+z_3+\alpha^2 z_4+\alpha,$$

$$\alpha^2(z_3-z_4)-(z_3-z_4)=0,$$

$$(z_3-z_4)\cdot(\alpha^2-1)=0,$$

$\alpha^2-1\neq 0$ бўлгани учун $z_3-z_4=0\Rightarrow z_3=z_4$ ни оламиз.
(8) системани 2- ва 4- тенгламасидан қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{z_4}{z_2}=\frac{\left(\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\alpha z_2+1}{z_2+\alpha}\right)}{\left(\frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}\right)^2}. \quad (11)$$

$z_1=z_3=z_4$ бўлгани учун (11) да z_1 ни z_4 билан алмаштирамиз.
Натижада:

$$z_4\cdot\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}=z_2\cdot\frac{\alpha z_2+1}{z_2+\alpha},$$

$$(z_2+\alpha)(\alpha z_4^2+z_4)=(z_4+\alpha)(\alpha z_2^2+z_2),$$

$$\alpha z_2 z_4^2+z_2 z_4+\alpha^2 z_4^2+\alpha z_4=\alpha z_4 z_2^2+z_2 z_4+\alpha^2 z_2^2+\alpha z_2,$$

$$\alpha z_2 z_4(z_4-z_2)+\alpha^2(z_4-z_2)(z_4+z_2)+\alpha(z_4-z_2)=0,$$

$$(z_4-z_2)(\alpha z_2 z_4+\alpha^2(z_4+z_2)+\alpha)=0.$$

$\alpha>1, z_2>0, z_4>0$ бўлганидан тенглик 0 га тенг бўлиши учун $z_4-z_2=0 \Rightarrow z_4=z_2$ ни оламиз. Бу эса фаразимизга зид.

3) Фараз қилайлик (8) ни ечими, $z_1=z_4$, $z_2 \neq z_3$ кўринишида бўлсин ,у ҳолда (8) системани 2- ва 3- тенгламасидан қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{z_2}{z_3}=\frac{\left(\frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}\right)^2}{\left(\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}\right)^2}=\frac{\left(\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}\right)^2}{\left(\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}\right)^2}=1 \Rightarrow z_3=z_2.$$

Бу эса фаразимизга зид.

4) Фараз қилайлик (8) ни ечими, $z_2=z_3$, $z_1 \neq z_4$ кўринишида бўлсин, у ҳолда (8) системани 2- ва 3- тенгламасидан қуйидагига эга бўламиз.

$$\frac{z_2}{z_3}=\frac{\left(\frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}\right)^2}{\left(\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}\right)^2}=1 \Rightarrow \frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}=\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}.$$

Бундан эса

$$(\alpha z_1+1)\cdot(z_4+\alpha)=(\alpha z_4+1)\cdot(z_1+\alpha),$$
$$\alpha z_1 z_4+\alpha^2 z_1+z_4+\alpha=\alpha z_1 z_4+\alpha^2 z_4+z_1+\alpha,$$
$$\alpha^2(z_1-z_4)-(z_1-z_4)=0,$$
$$(\alpha^2-1)(z_1-z_4)=0.$$

$\alpha^2-1\neq 0$ эканидан $z_1=z_4$ ни оламиз. Бу эса фаразимизга зид.

5) Фараз қилайлик (8) ни ечими, $z_2=z_4$, $z_1 \neq z_3$ кўринишида бўлсин, у ҳолда (8) системани 2- ва 4- тенгламасидан қуйидагига эга бўламиз.

$$\frac{z_2}{z_4}=\frac{\left(\frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}\right)^2}{\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}\cdot\frac{\alpha z_2+1}{z_2+\alpha}}.$$

$z_2=z_4$ бўлганлиги учун z_2 ни z_4 билан ва аксинча алмаштирамиз. Натижада:

$$\frac{\left(\frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}\right)^2}{\left(\frac{\alpha z_2+1}{z_2+\alpha}\right)^2}=1 \Rightarrow \frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}=\frac{\alpha z_2+1}{z_2+\alpha}=\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}. \quad (12)$$

(8) системани 1- ва 3- тенгламасидан қуйидагига эга бўламиз.

$$\frac{z_1}{z_3}=\frac{\frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}\cdot\frac{\alpha z_3+1}{z_3+\alpha}}{\left(\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}\right)^2}.$$

(12) га кўра $\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}$ ни $\frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}$ билан алмаштирамиз. Натижада:

$$\frac{z_1}{z_3}=\frac{\left(\frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\alpha z_3+1}{z_3+\alpha}\right)}{\left(\frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}\right)^2}\Rightarrow z_1\cdot\frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}=z_3\cdot\frac{\alpha z_3+1}{z_3+\alpha}\Rightarrow$$

$$z_1\cdot(\alpha z_1+1)\cdot(z_3+\alpha)=z_3\cdot(\alpha z_3+1)\cdot(z_1+\alpha),$$

$$\alpha z_1^2 z_3+z_1z_3+\alpha^2 z_1^2+\alpha z_1=\alpha z_3^2 z_1+z_1z_3+\alpha^2 z_3^2+\alpha z_3,$$

$$\alpha z_1z_3(z_1-z_3)+\alpha^2(z_1-z_3)(z_1+z_3)+\alpha(z_1-z_3)=0,$$

$$(\alpha z_1z_3+\alpha^2(z_1+z_3)+\alpha)(z_1-z_3)=0.$$

$\alpha>1, z_1>0, z_3>0$ бўлгани учун $z_1-z_3=0\Rightarrow z_1=z_3$. Бу эса фаразимизга зид.

6) Фараз қилайлик (8) ни ечими, $z_4=z_3$, $z_1\neq z_2$ кўринишида бўлсин, у ҳолда (8) системани 3- ва 4- тенгламасидан қуйидагига эга бўламиз.

$$\frac{z_3}{z_4}=\frac{\left(\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}\right)^2}{\left(\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\alpha z_2+1}{z_2+\alpha}\right)}=1\Rightarrow\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}=\frac{\alpha z_2+1}{z_2+\alpha}.$$

Бундан эса

$$(\alpha z_4+1)\cdot(z_2+\alpha)=(\alpha z_2+1)\cdot(z_2+\alpha),$$

$$\alpha z_2z_4+\alpha^2 z_4+z_2+\alpha=\alpha z_2z_4+z_4+\alpha^2 z_2+\alpha,$$

$$\alpha^2(z_4-z_2)-(z_4-z_2)=0,$$

$$(z_4 - z_2)\cdot(\alpha^2 - 1) = 0.$$

$\alpha^2 - 1 \neq 0$ эканидан $z_4 - z_2 = 0 \Rightarrow z_4 = z_2 \Rightarrow z_3 = z_4 = z_2$ ни оламиз. $z_3 = z_4 = z_2$ ни (13) деб белгилаймиз. (8) системани 1- ва 2- тенгламасидан қуйидагига эга бўламиз.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\left(\frac{\alpha z_1 + 1}{z_1 + \alpha}\right)\cdot\left(\frac{\alpha z_3 + 1}{z_3 + \alpha}\right)}{\left(\frac{\alpha z_1 + 1}{z_1 + \alpha}\right)^2} = \frac{\frac{\alpha z_3 + 1}{z_3 + \alpha}}{\frac{\alpha z_1 + 1}{z_1 + \alpha}}.$$

(13) га кўра z_3 ни z_2 билан алмаштирамиз,

Натижада:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{\alpha z_2 + 1}{z_2 + \alpha}}{\frac{\alpha z_1 + 1}{z_1 + \alpha}} \Rightarrow z_1 \cdot \frac{\alpha z_1 + 1}{z_1 + \alpha} = z_2 \cdot \frac{\alpha z_2 + 1}{z_2 + \alpha},$$

$$z_1 \cdot (\alpha z_1 + 1)\cdot(z_2 + \alpha) = z_2 \cdot (\alpha z_2 + 1)\cdot(z_1 + \alpha),$$

$$\alpha z_1^2 z_2 + z_1 z_2 + \alpha^2 z_1^2 + \alpha z_1 = \alpha z_2^2 z_1 + z_1 z_2 + \alpha^2 z_2^2 + \alpha z_2,$$

$$\alpha z_1 z_2 (z_1 - z_2) + \alpha^2 (z_1 - z_2)(z_1 + z_2) + \alpha(z_1 - z_2) = 0,$$

$$(\alpha z_1 z_2 + \alpha^2 (z_1 + z_2) + \alpha)(z_1 - z_2) = 0.$$

$\alpha > 1, z_1 > 0, z_2 > 0$ бўлгани учун $z_1 = z_2$. Бу эса фаразимизга зид.

7) $z_1 > z_2 > z_3 > z_4$ бўлсин.

Фаразимизга кўра $\frac{z_3}{z_4} > 1$ бўлади. (8) системани 3- ва 4- тенгламасидан қуйидагига эга бўламиз.

$$\left(\frac{\alpha z_4 + 1}{z_4 + \alpha}\right)^2 > \left(\frac{\alpha z_4 + 1}{z_4 + \alpha}\right)\cdot\left(\frac{\alpha z_2 + 1}{z_2 + \alpha}\right).$$

Биз ферромагнит Изинг моделини кўраётшганимиз учун $0 < \theta < 1$ бўлади, бундан эса $\alpha > 1$ эканини оламиз. $\alpha > 1, z_4 > 0$ бўлгани учун эса қуйидагига келамиз:

$$\frac{\alpha z_4 + 1}{z_4 + \alpha} > \frac{\alpha z_2 + 1}{z_2 + \alpha} \Rightarrow$$

$$(\alpha z_4 + 1)\cdot(z_2 + \alpha) > (\alpha z_2 + 1)\cdot(z_4 + \alpha),$$

$$\alpha z_2 z_4+\alpha^2 z_4+z_2+\alpha>\alpha z_2 z_4+\alpha^2 z_2+z_4+\alpha,$$
$$\alpha^2(z_4-z_2)-(z_4-z_2)>0,$$
$$(\alpha^2-1)(z_4-z_2)>0.$$

$\alpha>1$ бўлгани учун $\alpha^2-1>0$. Шунинг учун $z_4-z_2>0 \Rightarrow z_4>z_2$ бу эса фаразимизга зид.

8) $z_1>z_3>z_2>z_4$ бўлсин.

Фаразимизга кўра $\frac{z_3}{z_2}>1$ бўлади.

(8) системани 3- ва 2- тенгламасидан қуйидагига эга бўламиз:

$$\left(\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}\right)^2>\left(\frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}\right)^2.$$

$\alpha>1, z_4>0, z_1>0$ бўлгани учун

$$\frac{\alpha z_4+1}{z_4+\alpha}>\frac{\alpha z_1+1}{z_1+\alpha}\Rightarrow$$
$$(\alpha z_4+1)\cdot(z_1+\alpha)>(\alpha z_1+1)\cdot(z_4+\alpha),$$
$$\alpha z_1 z_4+\alpha^2 z_4+z_1+\alpha>\alpha z_1 z_4+\alpha^2 z_1+z_4+\alpha,$$
$$\alpha^2(z_4-z_1)-(z_4-z_1)>0,$$
$$(z_4-z_1)\cdot(\alpha^2-1)>0.$$

$\alpha>1$ бўлгани учун $\alpha^2-1>0$. Шунинг учун $z_4-z_1>0 \Rightarrow z_4>z_1$. Бу эса фаразимизга зид.

Ҳудди шу усулда 16 ва 23 ҳоллардан бошқа ҳолларни исботлаш мумкин.

16) $z_2>z_1>z_4>z_3$ бўлсин.

(7) системадан қуйидаги тенгсизликни оламиз.

$$\left(\frac{\alpha\cdot z_4+1}{z_4+\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\alpha\cdot z_2+1}{z_2+\alpha}\right)-\left(\frac{\alpha\cdot z_1+1}{z_1+\alpha}\right)\cdot\left(\frac{\alpha\cdot z_3+1}{z_3+\alpha}\right)<0.$$

Юқоридаги тенгсизлик қуйидаги тенгсизликка эквивалент бўлишини аниқлаш қийин эмас :

$$(\alpha^2-1)\cdot(\alpha^2 z_4 z_2-\alpha^2 z_1 z_3+\alpha z_2+\alpha z_4+z_4 z_2-\alpha z_3-\alpha z_1-z_1 z_3+\alpha z_4 z_2 z_1+\alpha z_4 z_2 z_3-$$
$$-\alpha z_4 z_1 z_3-\alpha z_1 z_2 z_3)<0.$$

$\alpha>1$ бўлганлиги учун $\alpha^2-1>0$.

$$\alpha^2 z_4 z_2-\alpha^2 z_1 z_3+\alpha z_2+\alpha z_4+z_4 z_2-\alpha z_3-\alpha z_1-z_1 z_3+$$

$$+\alpha z_4 z_2 z_1 + \alpha z_4 z_2 z_3 - \alpha z_4 z_1 z_3 - \alpha z_1 z_2 z_3 < 0.$$

бўлиши керак.

$$(z_4 z_2 - z_1 z_3)\cdot(\alpha^2 + 1) + (z_4 - z_3)\cdot(\alpha z_1 z_2 + \alpha) + (\alpha + \alpha z_3 z_4)\cdot(z_2 - z_1) < 0 .$$

бўлади.

$z_4 z_2 - z_1 z_3 > 0$ бўлади, чунки шартга кўра $z_4 > z_3 > 0$ ва $z_2 > z_1 > 0$.

$z_4 > z_3$ тенгсизликни $z_2 > 0$ га кўпайтирамиз. $z_4 z_2 > z_3 z_2$ ҳосил бўлади. Фаразимизга кўра

$z_2 > z_1$,бундан $z_4 z_2 > z_3 z_2 > z_3 z_1$.

$z_4 - z_3 > 0$. Чунки фаразимизга кўра $z_4 > z_3$. $z_2 - z_1 > 0$.Чунки фаразимизга кўра $z_2 > z_1$.

Бундан келиб чиқадики мусбат сонларнинг йигиндиси манфий сонга тенг бўлмайди.

Демак тенгсизлик ўринли бўлиши учун $z_4 > z_1$ шарт бажарилиши керак.

Бу еса фаразимизга зид. 23 ҳолни ҳам худди шу каби исботланади.

Теорема исботланди.

Теорема 1 каби қуйидаги Теоремани исботлаш қийин эмас.

Теорема 2: Иккинчи тартибли Кэли дарахтида ферромагнит ($0 < \theta < 1$) Изинг модели учун $H_{\{a_1,a_2\}}$-кучсиз даврий Гиббс ўлчови $G_k^{(2)}$-даврий ёки трансиляцион инвариант бўлади.

Эслатма: Эслатиб ўтамизки агар $H_{\{a_1,a_2,a_3\}}$ нормаль бўлувчини кўрсак, у ҳолда $H_{\{a_1,a_2,a_3\}}$ - учсиз даврий қийматлар тўплами h лар $G_k^{(2)}$ - даврий бўлиб қолади, шунинг учун $H_{\{a_1,a_2,a_3\}}$ - кучсиз даврий Гиббс ўлчовлари учун хам худди Теорема 1 ва 2 каби теоремани айтиш мумкин.

Теорема 1, Теорема 2 ва Эслатмани хисобга олиб умумий холда қуйидаги теоремага келамиз:

Теорема 2. H **–** G_k группанинг индекси иккига тенг бўлган ихтиёрий нормаль бўлувчиси бўлсин. Иккинчи тартибли Кэли дарахтида ферромагнит ($0 < \theta < 1$) Изинг модели учун H **-** кучсиз даврий Гиббс ўлчови ёки $G_k^{(2)}$ - даврий ёки трансляцион-инвариант бўлади.

References

1. U.A.Rozikov Gibbs measures on Cayley trees. World scientific 2013
2. U.A.Rozikov, M.M.Rahmatullaev, TMF 2008
3. U.A.Rozikov, M.M.Rahmatullaev, TMF 2009

4. M.M.Rahmatullaev, TMF 2013
5. M.M.Rahmatullaev, JPCS 2017