Bulletin of Gulistan State University

Volume 2020 | Issue 3 Article 19

9-30-2020

DISCRETE MODEL OF HEAT EXCHANGE BETWEEN THE TUBE AND THE HEAT CARRIER PASSING THROUGH IT

Jurabek Saydullaevich Mamatov
Gulistan State University, jurabek25@mail.ru

Sardorbek Baxtiyor ugli Dustnazarov
Gulistan State University

УДК 51.7

DISCRETE MODEL OF HEAT EXCHANGE BETWEEN THE TUBE AND THE HEAT CARRIER PASSING THROUGH IT

QUVUR VA UNDAN O‘TAYOTGAN ISSIQLIK TASHUVCHI O‘RTASIDAGI ISSIQLIK ALMASHINUVINING DISKRET MODELI

ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛООБМЕНА МЕЖДУ ТРУБОЙ И ПРОХОДЯЩЕЙ ПО НЕЙ ТЕПЛОНОСИТЕЛЬ

Маматов Журабек Сайдуллаевич, Дустназаров Сардорбек Бахтиёр угли.
Гулистанский государственный университет, 120100, г. Гулистан, 4-й микрорайон.
E-mail: jurabek25@mail.ru

Abstract. Convective heat transfer processes in heat exchangers, which are widely used in industry, are characterized by partial differential equations. Ensuring the adequacy of mathematical models leads to the complication of particular differential equations for products and boundary value problems for them. Acad. A. Azamov and candidate of mathematical sciences M.A. Bekimov proposed a perfect mathematical model of the heat transfer process in rotary regenerative air heaters (RRAH) at thermal power plants in the form of discrete dynamic systems, which made it possible to control the operation mode of RRAH, calculate smoke and air temperature. A mathematical model of the heat transfer process occurring between hot gas flowing through an insulated tube was created using the method of creating a mathematical model of the convective heat transfer process in the form of discrete dynamical systems. An algebra of a special matrix is constructed, which is included in the created mathematical model, and new properties are studied. The article proposes two discrete models of the heat exchange process between a tube and a heat- exchange fluid (gas or liquid) passing through it. In the first model, the tube temperature is stationary. For that, the output is an explicit formula for the temperature of the effluent. In the second, the tube model is thermally insulated. In this case, a system of decomposed equations is compiled and a formula for the solution is obtained.

Keywords: mathematical model, heat exchange process, coolant flow, discrete system, Jordan form, matrix algebra.

Annotatsiya. Sanoatda, ishlab chiqarishda keng qo‘llaniladigan issiqlik almashish apparatlarida sodir bo‘ladigan konvektiv issiqlik almashish jarayonlari xususiy hosilali differensial tenglamlar bilan ifodalanadi. Matematik modellarning adekvatliligini ta’minlash xususiy hosilali differensial tenglamalar va ular uchun chegaraviy masalalarning murakkablashishiga olib keladi. Akad. A.Azamov va PhD M.A. Bekimov tomonidan issiqlik elektro stantsiyalaridagi aylanuvchi regenerativ havo qizdirgichdagi (ARHQ) issiqlik almashish jarayonining diskret dinamik sistemalar ko‘rinishidagi mukammal matematik modeli taklif etildi va bu model ARHQning ish rejimini boshqarishga, uskunadan chiqayotgan tutun va havoning haroratini hisoblash imkonini berdi. Konvektiv issiqlik almashish jarayoning diskret dinamik sistemalar ko‘rinishidagi matematik modelini yaratish metodikasidan foydalanib izolatsiyalangan quvurdan oqib o‘tuvchi issiq gaz o‘rtasida sodir bo‘ladigan issiqlik almashish jarayonining matematik modeli yaratildi. Yaratilgan matematik modelda ishtirok etuvchi maxsus matritsaning algebrasi qurildi va yangi xossalari o‘rganildi. Ushbu maqolada trubka va patok (gaz yoki suyuqlik) o‘rtasida issiqlik almashinish jarayonining diskret modeli taklif qilinadi. Birinchi modelda truba harorati doimiy bo‘ladi. Uning undan chiqayotgan patokning harorati uchun aniq formula keltirilgan. Ikkinchi modelda truba izolyatsiyasi qilingan. Bu holda ham aniq matematik model qurilgan va uning yechimi uchun formula olingan.

Kalit so‘zlar: matematik model, issiqlik almashinish jarayoni, issiqlik tashuvchi oqim, diskret sistema, Jordan formasi, matritsa algebrasi.

Введение

В классическом подходе к изучению процесса теплообмена между потоком теплоносителя (газ и жидкость) и трубой модель приводится системы уравнений терма-газодинамики, которая решается при определенных начальных и краевых условий, а также условий на границах разделения [1]. В большинство случаев использование таким способом задачи не интегрируются в общим виде. Поэтому используется электронные вычислительные машины. Разумеются, что это способ переходиться квантовским системы уравнений с частным производным как по времени, так и пространственных нерешённых систем разностных уравнений. В простых случаях получение системы имеет вид рекуррентной формулы [2], в других случаях полученная система алгебраических уравнений.

Материал и методы

Рассмотрим процесс теплообмена между термоизолированной трубой цилиндрической формой с длиной L, небольшей толщины d, внешнего диаметра $2r$ и протекающему по ней потоком теплоносителя (газа или жидкости). Пусть с одного конца трубы входит поток теплоносителя с температурой T и с постоянной скоростью v. Будем предполагать, что величины h, m, v и L связаны соотношением $L = v \cdot h \cdot m$, где $m -$число деления трубы.

Среднюю температуру k-ой части трубы A_k на промежутки времени $[(n-1)h, nh]$ обозначим $y_k(n)$, а порцию температуры теплоносителья находящейся в A_k через $x_k(n)$. Будем предполагать, что теплообмен между $k-$ой часть трубы и соответствующая порция теплоноситель происходит в соответствующем линейным законом Ньютона [3]:

$$x_1(n+1) = T,$$

$$x_k(n+1) = x_{k-1}(n) + \alpha h[x_{k-1}(n) - y_{k-1}(n)], \qquad k = \overline{1,m}.$$

$$y_k(n+1) = y_k(n) + \beta h[y_k(n) - x_k(n)],$$

Таким образом, мы пренебрегаем теплообменом между соседними частями трубы и соседними порциями теплоносителя.

Тем самым получаем дискредитированную модель изучаемого процесса в виде системы линейных разностных уравнений [4]:

$$z_{n+1} = Az_n + f_n,$$

где

$$z = (x_2, x_3, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_m)^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{11} = (1-\alpha h)L, \quad A_{12} = [\alpha h I \ \ 0], \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 0^T \\ \beta h \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = (1-\beta h)I_{m-1}, \quad f_n = \begin{bmatrix} g_n \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g_n = ((1-\alpha h)V_n, \ 0, \ \dots \ , \ 0)^T,$$

Здесь, $0-$нулевой вектор-столбец размерности $m-1$, $I-$ единичная матрица порядок $m-1$, $L = (l_{ij})-$ нижний косой ряд порядка $m-1$, т. е. на языке символа Кронекера

$l_{ij} = \delta_{i+1,j}$. Если задавать начальное условие, $z_0(0) = z_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$, то решение задач Коши для системы (1) находится формулой

$$z_n = A^n z_0 + \sum_{k=0}^{n-1} A^{n-k} f_k . \qquad (1)$$

Эта формула достаточна для расчета распределения температуры в модели если известен метод вычисления степеней матрицы A. Учитывая, что матрица A имеет размер $(2m-1)*(2m-1)$, здесь m может быть достаточна большой, а также разреженность матрицы, задача приводиться вычисления ее степеней. Остальная часть статьи посвящается этой задаче.

Полученые резултаты и их анализ

Приведение к жордановой форме. Одним из способ вычисления A^n приведению A к жордановой форме. Легко найти, что матрица A имеет собственные числа 0 кратности $m-1$ и $1-\beta$ кратности m. Опарывается собственному число 0 соответствует более одной клеток.

Теорема 1. Жорданова форма матрицы A имеет вид

$$J_A = \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & (1-\beta)I \end{bmatrix}.$$

Доказательство. Будем искать невырожденную матрицу P размера $(2m-1)\times(2m-1)$, удовлетворяющего условию

$$PA = J_A P . \qquad (2)$$

Пусть

$$P = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & U \end{bmatrix},$$

где $X, Y, Z, U-$ блоки матрицы размера $(m-1)\times(m-1),\ (m-1)\times m,\ \ m\times(m-1),\ m\times m$ соответственно. Такое представление матрицы P позволяет осуществить декомпозицию уравнения (2), а именно свести его к двум системам более низких порядков. В самом деле, приравняю блоки первой строки, получаем самостоятельную систему

$$(1-\alpha)XL + \beta Y \begin{bmatrix} 0^T \\ I \end{bmatrix} = LX, \qquad (3a)$$

$$\alpha X\left[I, 0\right] + (1-\beta)Y = LY \qquad (3b)$$

и приравняв блоки второй строки систему

$$\begin{cases} (1-\alpha)ZL + \beta U \begin{bmatrix} 0^T \\ I \end{bmatrix} = LZ + (1-\beta)Z & (4a) \\ \alpha Z\left[I,\ 0\right] = LU & (4b) \end{cases}$$

Займемся решением системы $(3a)$, $(3b)$ относительно неизвестных матриц X и Y. У нас есть $X[I;0]=[X\ ;0]$. Оказывается, что матрицу $Y \in M_{m-1,m}$ можно искать таким образом, что ее последний столбец и первая строка нулевые, так что $Y = \left[Y', 0\right] = \begin{bmatrix} 0^T \\ \bar{Y} \end{bmatrix}$. Тогда (3b) можно написать в виде

$$X = \frac{1}{\alpha} LY - \frac{1-\beta}{\alpha} Y. \tag{4}$$

Теперь подставляя (4) в (3a) мы получаем равенство

$$\begin{aligned} \beta Y_{(m-1)(m)} \begin{bmatrix} 0^T \\ I_{(m-1)(m-1)} \end{bmatrix} &= \frac{1}{\alpha} L^2 Y_{(m-1)(m-1)} - \frac{1-\beta}{\alpha} LY_{(m-1)(m-1)} - \\ &- \frac{1-\alpha}{\alpha} LY_{(m-1)(m-1)} L + \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha} Y_{(m-1)(m-1)} L. \end{aligned} \tag{5}$$

Отсюда (5) можно переписать в виде

$$\beta Y_{(m-1)(m)} \begin{bmatrix} 0^T \\ I \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha} L^2 Y - \frac{1-\beta}{\alpha} LY - \frac{1-\alpha}{\alpha} L^2 Q + \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\alpha} LQ \tag{6}$$

где

$$Q = \begin{pmatrix} y_{22} & y_{23} & y_{24} & \cdots & y_{2(m-1)} & 0 \\ y_{32} & y_{33} & y_{34} & \cdots & y_{3(m-1)} & 0 \\ y_{42} & y_{43} & y_{44} & \cdots & y_{4(m-1)} & 0 \\ y_{(m-1)2} & y_{(m-1)3} & y_{(m-1)4} & \cdots & y_{(m-1)(m-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из условий $y_{1i} = 0 \;\; (i \geq 2)$ и $y_{jm} = 0$ вытекает, что $LQ = Y_{(m-1)(m)} \begin{bmatrix} 0^T \\ I \end{bmatrix}$. Тогда уравнение (6) имеет решение вида

$$Y = (y^c, Fy^c, F^2 y^c, ..., F^{m-2} y^c, 0) \tag{7}$$

Легко проверить, что имеет место равенство $\bar{Y}'L = LQ$, где y^c_{m-1} – произвольный постоянный вектор-столбец и $\Delta = 1 - \alpha - \beta$,

$$F = (\Delta I + (1-\alpha)L)^{-1}((1-\beta)E - L)L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{1-\beta}{\Delta} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -\frac{2\Delta + \alpha\beta}{\Delta^2} & \frac{1-\beta}{\Delta} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{(-1)^{m-2}(1-\alpha)^{m-3}(2\Delta + \alpha\beta)}{\Delta^{m-2}} & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{(-1)^{m-1}(1-\alpha)^{m-2}(2\Delta + \alpha\beta)}{\Delta^{m-1}} & \ldots & \ldots & \ldots & \frac{1-\beta}{\Delta} & 0 \end{pmatrix}.$$

Для вычисления k – ой степени матрицы F надо найти решение нижеприведённой системы уравнений:

$$\begin{cases} a_1 x_{m-k-1} = b_{k,1} \\ a_2 x_{m-k-1} + a_1 x_{m-k} = b_{k,2} \\ a_3 x_{m-k-1} + a_2 x_{m-k} + a_1 x_{m-k+1} = b_{k,3} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k-1} x_{m-k-1} + a_{k-2} x_{m-k} + a_{k-3} x_{m-k+1} + \dots + a_2 x_{m-4} + a_1 x_{m-3} = b_{k,k-1} \\ a_k x_{m-k-1} + a_{k-1} x_{m-k} + a_{k-2} x_{m-k+1} + \dots + a_3 x_{m-4} + a_2 x_{m-3} + a_1 x_{m-2} = 0 \end{cases}$$

Аналогично, получим уравнения для Z и U:

$$\begin{cases} (1-\alpha) ZL + \beta U \begin{bmatrix} 0^T \\ I \end{bmatrix} = LZ + (1-\beta) Z \\ \alpha Z \left[I,\ 0 \right] = LU \end{cases} \tag{8}$$

Из второго уравнения системы (8) имеем

$$Z_{(m)(m-1)} = \frac{1}{\alpha} L_{(m)(m)} U_{(m)(m-1)} \tag{9}$$

Подставив (9) в первое уравнение системы (8), получим

$$U_{(m)(m)} \begin{bmatrix} 0^T \\ \beta I_{(m-1)(m-1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha} L^2_{(m)(m)} U_{(m)(m-1)} + \frac{1-\beta}{\alpha} L_{(m)(m)} U_{(m)(m-1)} - \frac{1-\alpha}{\alpha} L_{(m)(m)} U_{(m)(m-1)} L_{(m-1)(m-1)} \tag{10}$$

После замены в (10) вида $U_{(m)(m-1)} L_{(m-1)(m-1)} = L_{(m)(m)} K_{(m)(m-1)} + P_{(m)(m-1)}$, уравнение (10) примет вид:

$$\beta U_{(m)(m-1)} = \frac{1}{\alpha} L^2_{(m)(m)} U_{(m)(m-1)} + \frac{1-\beta}{\alpha} L_{(m)(m)} U_{(m)(m-1)} - \frac{1-\alpha}{\alpha} L^2_{(m)(m)} K_{(m)(m-1)}\,. \tag{11}$$

где

$$K = \begin{pmatrix} u_{22} & u_{23} & u_{24} & \dots & u_{2(m-1)} & 0 \\ u_{32} & u_{33} & u_{34} & \dots & u_{3(m-1)} & 0 \\ u_{42} & u_{43} & u_{44} & \dots & u_{4(m-1)} & 0 \\ u_{m2} & u_{m3} & u_{m4} & \dots & u_{m(m-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда имеем общее решение вида

$$U_{(m)(m)} = (u^1_m, S u^1_m, S^2 u^1_m, \dots, S^{m-2} u^1_m, S^{m-1} u^1_m) \tag{12}$$

где

$$S=(\alpha\beta E-(1-\alpha)J)^{-1}(J+(1-\beta)E)J=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dfrac{1-\beta}{\alpha\beta} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{\beta}\left[\dfrac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha}\right] & \dfrac{1-\beta}{\alpha\beta} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dfrac{(1-\alpha)^{m-3}}{\beta^{m-2}}\left[\dfrac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta}+1\right] & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dfrac{(1-\alpha)^{m-2}}{\beta^{m-1}}\left[\dfrac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta}+1\right] & \dots & \dots & \dots & \dfrac{1-\beta}{\alpha\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

Литературы:

1. Prakash, Amit; Kumar, Manoj Numerical method for time-fractional gas dynamic equations. Proc. Nat. Acad. Sci. India Sect. A 89 (2019), no. 3, 559–570.
2. Koldoba, A. V.; Ustyugova, G. V. A difference scheme with a symmetry analyzer for equations in gas dynamics. (Russian) *Mat. Model.* 31 (2019), no. 7, 45–57.
3. Galanina, A. M.; Favorskiĭ, A. P. Numerical solution gas dynamic equations in Lagrangian variables. (Russian) *Mat. Model.* 24 (2012), no. 12, 119–123.
4. Moiseev, N. Ya.; Silant′eva, I. Yu. Difference schemes of increased accuracy for solving equations of gas dynamics by the Godunov method with anti-diffusion. (Russian) *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* 49 (2009), no. 5, 857–873; *translation in Comput. Math. Math. Phys.* 49 (2009), no. 5, 827–841

References:

1. Prakash, Amit; Kumar, Manoj Numerical method for time-fractional gas dynamic equations. Proc. Nat. Acad. Sci. India Sect. A 89 (2019), no. 3, 559–570.
2. Koldoba, A. V.; Ustyugova, G. V. A difference scheme with a symmetry analyzer for equations in gas dynamics. (Russian) *Mat. Model.* 31 (2019), no. 7, 45–57.
3. Galanina, A. M.; Favorskiĭ, A. P. Numerical solution gas dynamic equations in Lagrangian variables. (Russian) *Mat. Model.* 24 (2012), no. 12, 119–123.
4. Moiseev, N. Ya.; Silant′eva, I. Yu. Difference schemes of increased accuracy for solving equations of gas dynamics by the Godunov method with anti-diffusion. (Russian) *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* 49 (2009), no. 5, 857–873; *translation in Comput. Math. Math. Phys.* 49 (2009), no. 5, 827–841

Авторы:

Маматов Журабек Сайдуллаевич – старший преподаватель кафедры математики, Гулистанский государственный университет.
Дустназаров Сардорбек Бахтиёр угли - докторант кафедры математики, Гулистанский государственный университет.