

6-10-2019

SOLUTION OF THE GOURSAT PROBLEM USING A TRANSFORMATION OPERATOR FOR A THIRD-ORDER PSEUDOPARABOLIC EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENTS

G I. Alimjonova

Ferghana Polytechnic Institute, authors@ferpi.uz

Follow this and additional works at: <https://uzjournals.edu.uz/ferpi>

Recommended Citation

Alimjonova, G I. (2019) "SOLUTION OF THE GOURSAT PROBLEM USING A TRANSFORMATION OPERATOR FOR A THIRD-ORDER PSEUDOPARABOLIC EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENTS," *Scientific-technical journal*: Vol. 23 : Iss. 2 , Article 17.

Available at: <https://uzjournals.edu.uz/ferpi/vol23/iss2/17>

This Article is brought to you for free and open access by 2030 Uzbekistan Research Online. It has been accepted for inclusion in *Scientific-technical journal* by an authorized editor of 2030 Uzbekistan Research Online. For more information, please contact sh.erkinov@edu.uz.

SHORT MESSAGES

SOLUTION OF THE GOURSAT PROBLEM USING A TRANSFORMATION OPERATOR FOR A THIRD-ORDER PSEUDOPARABOLIC EQUATION WITH SINGULAR COEFFICIENTS

G.I. Alimjonova

Fergana Polytechnic Institute

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ГУРСА С ПОМОЩЬЮ ОПЕРАТОРА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ

Г.И. Алимжонова

Ферганский политехнический институт

СИНГУЛЯР КОЭФФИЦИЕНТЛИ УЧИНЧИ ТАРТИБЛИ ПСЕВДОПАРАБОЛИК ТЕНГЛАМА УЧУН ГУРСА МАСАЛАСИНИ АЛМАШТИРИШ ОПЕРАТОРИ ЁРДАМИДА ЕЧИШ

Г.И. Алимжонова

Фарғона политехника институти

Abstract. This paper discusses classical problems for degenerate and differential equations with singular coefficients. The solution to the Goursat problem for third-order pseudoparabolic equations with singular coefficients is shown using the transformation operator.

Key words: differential equation, classic task, singular coefficient, Goursat's task, conversion operator.

Аннотация. В настоящей работе обсуждаются классические задачи для вырожденных и дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами. Показано решение задачи Гурса для псевдопараболических уравнений третьего порядка с сингулярными коэффициентами с помощью оператора преобразования.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, классическая задача, сингулярный коэффициент, задача Гурса, оператор преобразования.

Аннотация. Ушбу мақолада бузиладиган ва сингуляр коэффициентли дифференциал тенгаламалар учун классик масалаларни қўйилишида кичик ҳадлардаги коэффициентлар кўриб чиқилган. Сингуляр коэффициентли учинчи тартибли псевдопараболик тенгаламалар учун Гурса масаласи алмаштириш оператори ёрдамида ечиб кўрсатилаган.

Таянч сўзлар: дифференциал тенглама, классик масала, сингуляр коэффициент, Гурса масаласи, алмаштириш оператори.

Маълумки бузиладиган ва сингуляр коэффициентли дифференциал тенгаламалар учун баъзи классик масалалар ноқоррект бўлиб қолмоқда. Масаланинг қўйилишига кичик ҳадлардаги коэффициентлар муҳим таъсир этмоқда. Бундай масалалар сингуляр коэффициентли юқори тартибли ноқоррект тенгаламалар учун деярли ўрганилмаган.

Ушбу иш қуйидаги тенглама учун Гурса масаласини аналогининг классик ечимини топишга бағишланган

$$L_b^a(u) \equiv \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a}{x} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + bu = f(x, y) \quad (1)$$

бу ерда $f(x, y)$ берилган функция, $a, b \in \mathbb{R}$, жумладан $0 < a < 1$.

SHORT MESSAGES

G_α масаласи. $\Omega = \{(x, y): 0 < x < l, 0 < y < h\}$ сохада (1) тенгламинг куйидаги шартларни қаноатлантирувчи $u(x, y) \in C(\bar{\Omega})$ ечими топилсин:

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{2}$$

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq h, \tag{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha u_x(x, y) = \varphi_2(y), \quad 0 \leq y \leq h, \tag{4}$$

бу ерда $\psi(x), \varphi_1(y), \varphi_2(y)$ – берилган силлиқ функциялар, $\varphi_1(0) = \psi(0), \varphi_2(0) = 0$ келишув шартлари бажарилиши талаб этилади.

Бундай масала олдин ўрганилмаган. Умумий кўринишдаги чизикли юқори тартибли ҳосиласи u_{xy} бўлган силлиқ коэффициентли тенгламлар учун масалалар А.П.Солдатов, М.Х.Шхануков, В.И.Жегалов, А.Н.Миронов, Е.А.Уткина, А.Магер, Т.Д.Джураев, О.С.Зикиров ва бошқалар томонидан ўрганилган.

Кўйилган Гурса масаласини ечиш учун куйидаги каср тартибли Эрдей–Кобер [1] операторидан фойдаланамиз:

$$I_{\eta, \alpha}^x f(x) = \frac{2x^{-2(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - s^2)^{\alpha-1} s^{2\eta+1} f(s) ds, \tag{5}$$

бу ерда $\alpha > 0, \eta \geq -\frac{1}{2}, \Gamma(z)$ – Эйлернинг Гамма функцияси [2].

Маълумки [1], (5) оператор учун, $\alpha > 0, \eta \geq -\left(\frac{1}{2}\right) f(x) \in C^2(0, b), b > 0,$

$\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\eta+1} f'(x) = 0$ шартлар бажарилганда, ушбу тенглик ўринли бўлади

$$B_{\eta+\alpha}^x I_{\eta, \alpha}^x f(x) = I_{\eta, \alpha}^x B_\eta^x f(x)$$

бу ерда – Бессел оператори.

Эрдейи-Кобер операторининг ушбу хоссасини куйидаги ёрдамчи масалани ечишга тадбик этамиз.

G_α масалани ечиш учун куйидаги ёрдамчи масалани тадқиқ этамиз. G_0 масала. Ω сохада (1) тенгламани (2), (3) ва

$$u_x(0, y) = 0 \tag{6}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин.

G_0 масалани ечимини куйидаги кўринишда излаймиз

$$u(x, y) = I_{-1/2, \alpha}^{(x)} v(x, y), \tag{7}$$

бу ерда $\alpha \in R, \alpha > 0, v(x, y)$ – номаълум силлиқ функция.

(7) тенгликни (2) ва (3) шартларга қўйиб номаълум $v(x, y)$ функцияга нисбатан куйидаги масалага келамиз:

$$L_0(v) \equiv v_{xxy} + cv = F(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \tag{8}$$

$$v(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \tag{9}$$

$$v(0, y) = \gamma_0 \varphi_1(y), \quad 0 \leq y \leq h, \tag{10}$$

$$v_x(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq h, \tag{11}$$

SHORT MESSAGES

$$F(x, y) = \left(I_{-1/2, \alpha}^{(x)}\right)^{-1} f(x, y) \quad \psi_1(x) = \left(I_{-1/2, \alpha}^{(x)}\right)^{-1} \psi(x)$$

{(8)–(11)} масалани ечими [3] мақолада ошкор кўринишда топганмиз. Ушбу ҳолда бу ечим куйидаги кўринишга эга:

$$\begin{aligned} v(x, y) = & \psi_1(x) + \gamma_0 \varphi_1(y) - \psi_1(0) {}_0F_2\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{s}{4}x^2 y\right) + \\ & + cy \int_0^x \left[{}_0F_2\left(2, \frac{3}{2}; -\frac{s}{4}y(\xi - x)^2(\xi - x)\right) \right] \psi_1(\xi) d\xi - \\ & - \gamma_0 \frac{c}{2} x^2 \int_0^y {}_0F_2\left(2; \frac{3}{2}; -\frac{c}{4}x^2(\eta - y)\right) \psi_1(\eta) d\eta - \\ & - \int_0^x \int_0^y R(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \tag{12}$$

$v(x, y)$ функциянинг (12) ифодасини (7) тенгликка қўямиз ва бир қанча ҳисоб китобларни бажарганимиздан сўнг G_0 масаланинг ечими куйидаги кўринишга эга бўлади:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) = & \psi(x) + \varphi_1(y) - \psi(0) {}_0F_2\left(1, \alpha + \frac{1}{2}; -\frac{c}{4}yx^2\right) + cy \int_0^x \psi(s) K_1(x, y, s) ds + \\ & + \frac{c}{4} x^2 \int_0^y \varphi_1(\eta) {}_0F_2\left(2, \alpha + \frac{1}{2}; \frac{c}{4}x^2(\eta - y)\right) d\eta. \end{aligned}$$

Бу ерда

$$\begin{aligned} K_1(x, y, s) = & \left(\frac{s}{x}\right)^\alpha (x - s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^n}{(2)_n \left(\frac{3}{2}\right)_n n!} {}_2F_1\left(\alpha, 1 - \alpha, \frac{3}{2} + n; \sigma\right) = \\ = & \left(\frac{s}{x}\right)^\alpha (x - s) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha_m)(1 - \alpha)_m}{\left(\frac{3}{2}\right)_m m!} \sigma^m {}_0F_2\left(\frac{3}{2} + m, 2; \omega\right) \\ & \omega = -\frac{c}{4}y(x - s)^2, \quad \sigma = -\frac{(x - s)^2}{4xs}. \end{aligned}$$

Энди G_α масалани ечими учун (1) тенгламанинг куйидаги хоссасидан фойдаланамиз: агар $u_1 = u_1(x, y; 1 - \alpha)$ функция $L_{1-\alpha}(u_1) = 0$ тенгламанинг $u_1(x, 0) = \psi(x)$, $u_1(0, y) = \varphi_1(y)$ ва $u_{1x}(0, y) = 0$ шартларини қаноатлантирувчи ечими бўлсин, у ҳолда

$$u_2(x, y) = x^{1-2\alpha} u_1(x, y, 1 - \alpha) \tag{13}$$

функция $L_2(u_2) = 0$ тенгламани $u_2(0, y) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\alpha} u_{2x}(x, y) = (1 - 2\alpha)\varphi_1(y)$ шартларни қаноатлантирувчи ечими бўлади.

SHORT MESSAGES

Бундан ташқари $K_1(x, y, s; 1 - \alpha) = \left(\frac{s}{x}\right)^{1-2\alpha} K_1(x, y, s; \alpha)$ эканлигини ҳисобга олсак ва $(1 - 2\alpha)\varphi_1(y)$ ни $\frac{\varphi_2(y)}{1 - 2\alpha}$ билан алмаштирсак, u_2 нинг қуйидаги умумий кўриниши ҳосил бўлади:

$$u_2(x, y) = x^{1-2\alpha} \psi(x) + \frac{x^{1-2\alpha}}{1 - 2\alpha} \varphi_2(y) - \psi(0) x^{1-2\alpha} {}_0F_2\left(1, \frac{3}{2} - \alpha; -\frac{c}{4} yx^2\right) +$$

$$+ cy \int_0^x \psi(s) s^{1-2\alpha} K_1(x, y, s; \alpha) ds + \frac{c}{4} \frac{x^{3-2\alpha}}{1 - 2\alpha} \int_0^y \varphi_2(\eta) {}_0F_2\left(2, \frac{3}{2} - \alpha; \frac{c}{4} x^2(\eta - y)\right) d\eta$$

Қар тартибли операторни алмаштириш сифатида қўллаб Гурса масаласининг ечим формуласини ошқор кўринишда топилди, бунда қуйидаги теорема ўринли:

Теорема: Агар $0 < \alpha < 1$ ва $\psi_k(x) \in C^2(0, l]$ $\varphi_k(y) \in C^1[0, h]$ ($k = 1, 2$), у ҳолда

Гурса масаласининг ягона ечими мавжуд бўлади.

Топилган Гурса масаласининг ечими формуласи ва Риман функциясидан фойдаланиб (1) тенглама учун бошқа бошланғич чегаравий нолакал масалаларни тадқиқ этиш мумкин.

References:

- [1]. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integrali i proizvodnye drobnogo porjadka i ix prilozheniya. Minsk: Nauka i tekhnika. 1987. –702s.
- [2]. 2. Beytmen G., Erdeyi A. Visshie transtsendentnie funksii, t.1.2.–М.: Nauka, 1973.–296 s.
- [3]. Xojiakbarova G., Uchinchi tartibli psevdoparabolik tenglama uchun Gursa masalasi. FarDU.Ilmii xabarlar–Nauchniy vestnik.FerGU 3–2016. 11–16b.

Адабиётлар.

- [1]. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника. 1987. –702с.
- [2]. 2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т.1.2.–М.: Наука, 1973.–296 с.
- [3]. Хожиакбарова Г., Учинчи тартибли псевдопараболик тенглама учун Гурса масаласи. ФарДУ.Илмий хабарлар–Научный вестник.ФерГУ 3–2016. 11–16б.