

6-10-2019

NUMERICAL MODELING OF A TURBULENT FLOW IN A FLOW FLAT PLATE WITH A ZERO GRADIENT OF PRESSURE BASED ON A STANDARD K-E AND MODERNIZED K-E MODELS

Z M. Malikov

Institute of Mechanics and Seismic Strength of Structures at the Academy of Sciences of Uzbekistan,
authors@ferpi.uz

E. U. Madaliev

Ferghana Polytechnic Institute

M. E. Madaliev

Ferghana Polytechnic Institute

Follow this and additional works at: <https://uzjournals.edu.uz/ferpi>

Recommended Citation

Malikov, Z M.; Madaliev, E. U.; and Madaliev, M. E. (2019) "NUMERICAL MODELING OF A TURBULENT FLOW IN A FLOW FLAT PLATE WITH A ZERO GRADIENT OF PRESSURE BASED ON A STANDARD K-E AND MODERNIZED K-E MODELS," *Scientific-technical journal*: Vol. 23 : Iss. 2 , Article 10.

Available at: <https://uzjournals.edu.uz/ferpi/vol23/iss2/10>

This Article is brought to you for free and open access by 2030 Uzbekistan Research Online. It has been accepted for inclusion in Scientific-technical journal by an authorized editor of 2030 Uzbekistan Research Online. For more information, please contact sh.erkinov@edu.uz.

BUILDING

УДК: 696.11

NUMERICAL MODELING OF A TURBULENT FLOW IN A FLOW FLAT PLATE WITH A ZERO GRADIENT OF PRESSURE BASED ON A STANDARD K-E AND MODERNIZED K-E MODELSZ.M. Malikov¹, E.U. Madaliev², M.E. Madaliev²¹Institute of Mechanics and Seismic Strength of Structures at the Academy of Sciences of Uzbekistan
²Fergana Polytechnic Institute**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕЧЕНИЯ ПРИ ОБТЕКАНИИ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНЫ С НУЛЕВЫМ ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ СТАНДАРТНОЙ $k-\varepsilon$ И МОДЕРНИЗИРОВАННОЙ $k-\varepsilon$ МОДЕЛЕЙ**З.М. Маликов¹, Э.У. Мадалиев², М.Э. Мадалиев²¹Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева АН РУз
²Ферганский политехнический институт**БОСИМ ГРАДИЕНТИСИЗ ЯССИ ПЛАСТИНКАДА ОҚИМНИНГ ТУРБУЛЕНТ ХАРАКАТИНИ СТАНДАРТ $k-\varepsilon$ ВА ТАКОМИЛЛАШГАН $k-\varepsilon$ МОДЕЛЛАР ОРҚАЛИ СОЎЛИ МОДЕЛЛАШТИРИШ**З.М. Маликов¹, Э.Ў. Мадалиев², М.Э. Мадалиев²¹Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т.Уразбаева АН РУз.
²Фарғона политехника институти

Abstract. In this article, the velocity on a flat plate with a zero pressure gradient is studied. The article is based on solving the hydrodynamic Navier-Stokes equations for turbulent flow based on the standard $k-\varepsilon$ and modernized $k-\varepsilon$ models. In this variant, complex turbulent continuum models were considered.

Keywords: Navier - Stokes, numerical method.

Аннотация. В данной статье изучена скорость на плоской пластине с нулевым градиентом давления. Статья основана на решении гидродинамических уравнений Навье-Стокса для турбулентного потока на основе стандартной $k-\varepsilon$ и модернизированном $k-\varepsilon$ моделей. В данном варианте рассматривалась сложная турбулентная модель сплошной среды.

Ключевые слова: Навье — Стокс, численный метод.

Аннотация. Ушбу мақолада босимсиз чексиз узун пластинкада оқим тезлиги ўрганган. Мақола Навье — Стоксни турбулент оқим гидродинамик тенгламасига асосланган стандарт $k-\varepsilon$ ва модернизация қилинган $k-\varepsilon$ моделларидан фойдаланилган. Ҳисобланган моделда суюқлик оқими мураккаб турбулентҳаракат учун кўрилган.

Таянч сўзлар: Навье — Стокс, ҳисобий усул.

Введение

Первоначально $k-\varepsilon$ модель использовалась для расчета несжимаемой сдвиговой турбулентности. Наиболее естественным путем включения в модель гравитационной турбулентности является введение специальной эмпирической константы при генерационном члене гравитационной неустойчивости в ε -уравнении. При этом значения остальных констант модели должны оставаться близкими к их значениям, подобранным для описания сдвиговой турбулентности. Рассмотрение задачи о взаимодействии турбулентности с ударными волнами демонстрирует неприменимость стандартного варианта $k-\varepsilon$ модели для описания взаимодействия ударных волн с турбулентностью, связанную с нетипично большим ростом турбулентных величин в ударном скачке.

BUILDING

k - ε модель является, видимо, наиболее удачной моделью турбулентности первого уровня замыкания. Для описания турбулентных величин в ней используется система двух нелинейных диффузионных уравнений для массовой плотности турбулентной энергии k и скорости диссипации турбулентной энергии ε . Простейший вариант данной модели появился более тридцати лет тому назад [1]. С тех пор k - ε модель широко применялась для расчетов большого круга задач, в основном, для описания сдвиговой несжимаемой турбулентности.

В качестве прецедента включения и гравитационной (конвективной) турбулентности, можно указать применение k - ε модели для расчетов профилей ветра, температуры и коэффициентов турбулентной диффузии в атмосферном пограничном слое различной стратификации [2,3]. При этом эмпирические константы данного варианта модели несколько отличаются, от устоявшегося варианта констант [1], подобранного для описания сдвиговых течений. К тому же, для хорошего описания профилей величин в приземном атмосферном слое требуется использование несколько разных эмпирических констант в случае устойчивой и неустойчивой стратификации. Еще более значительное отличие эмпирических констант модели от устоявшегося набора было предложено в работе [4] посвященной применению k - ε модели к расчету автомодельного гравитационного перемешивания двух несжимаемых жидкостей.

Довольно ясно, что возможности k - ε модели для описания сложных турбулентных течений ограничены. Тем не менее, ввиду простоты этой модели (по сравнению с моделями второго уровня замыкания и другими более основательными приближениями), желательно иметь ее вариант, который бы обеспечил приемлемое описание достаточно широкого круга течений со сдвиговой и гравитационной турбулентностью.

В настоящей работе дается обзор имеющихся источников для оценки эмпирических констант модели. Для этого рассматриваются аналитические решения уравнений k - ε модели для ряда характерных частных случаев, позволяющие сделать оценку эмпирических констант, путем сравнения с имеющимися экспериментальными данными или результатами прямого численного моделирования. Данный анализ проводится без привлечения численного решения k - ε уравнений, что делает его более ясным.

Основные уравнения

Число методов, основанных на использовании моделей второго порядка и отличающихся друг от друга количеством привлекаемых уравнений переноса и составом неизвестных, выражающих характеристики турбулентных движений, в настоящее время велико. Наиболее положительные отзывы в текущей литературе относятся к методам, содержащим уравнения переноса кинетической энергии. Среди них выделяется метод, основанный на совместном решении уравнений переноса импульса, кинетической энергии и скорости диссипации так называемый метод « k — ε ». В этом методе совместному решению подлежит система уравнений [5].

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, & u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'} \right), \\ u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \varepsilon, & u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k}, \end{aligned} \quad (1)$$

где положено

$$k = \frac{1}{2} (\overline{u'^2 + v'^2}), \quad \varepsilon = \nu \left(\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2} + \overline{\left(\frac{\partial v'}{\partial y} \right)^2} \right), \quad -\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Для замыкания системы уравнений применяется «связка» Прандтля — Колмогорова

$$\nu_t = C_v \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad (2)$$

BUILDING

основанная на локальной аналогии с теорией однородной и изотропной турбулентности. В правых частях последних двух уравнений системы вместо явной записи коэффициентов ν_k для кинетической энергии k и ν_ε — для скорости диссипации ε — введены «числа Прандтля»

$$\sigma_k = \frac{\nu_t}{\nu_k}, \sigma_\varepsilon = \frac{\nu_t}{\nu_\varepsilon}.$$

Система уравнений метода « $k-\varepsilon$ » содержит целый ряд эмпирических констант: $C_v=0,09$, $C_1=1,44$, $C_2=1,92$, $\sigma_k=1$ а σ_ε определяется равенством

$$\sigma_\varepsilon = \frac{\chi^2}{\sqrt{C_v}(C_2 - C_1)}, \chi = 0.4.$$

В модернизированном « $k-\varepsilon$ » методе совместному решению подлежит система уравнений.

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, & u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} (v \frac{\partial u}{\partial y} - \overline{u'v'}), \\ u \frac{\partial k}{\partial x} + v \frac{\partial k}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\mu_s}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y}) + G_k - \varepsilon, & u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (\frac{\mu_s}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}) + C_1 f_1 \frac{\varepsilon}{k} G_k - C_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{k}, \end{aligned} \quad (3)$$

Для замыкания системы уравнений применяется

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \frac{\partial u}{\partial y}, \nu_t = C_\mu f_\mu \frac{\rho k^2}{\varepsilon}, f_\mu = (1 - \exp(-A_m R_r))^2 (1 + \frac{A_t}{R_t}). \quad (4)$$

где $R_r = \frac{\rho \sqrt{k} y}{\mu}, R_t = \frac{\rho k^2}{\mu \varepsilon}.$

В данной системе уравнений G_k представляет кинетическую энергию, образованную от средних градиентов скорости. Применяемая гипотезу Буссинекса, ее можно выразит по формуле

$$G_k = G_{xy} = 4\mu_s (\frac{\partial u}{\partial y})^2. \quad (5)$$

где $\mu_s = \nu + \nu_t.$

На уравнений (3) ест два функции f_1 и f_2 они определяется по формуле

$$f_1 = 1 + (\frac{A_t}{f_\mu})^3, f_2 = 1 - \exp(-R_t^2). \quad (6)$$

Остальные константы определены из экспериментов для фундаментальных турбулентных жидкости и имеют следующие значения: $C_1=1,44$, $C_2=1,92$, $C_\mu=0,09$, $\sigma_k=1$, $\sigma_\varepsilon=1,3$, $A_m=0,0165$, $A_t=20,5$, $A_l=0,05$, ρ -плотность газа.

Численный метод

Для решения задачи с учетом выше предложенных моделей турбулентности рассматриваются уравнения турбулентного движения. Для численной реализации системы (1,3) введем переменные Мизеса [6] (ξ, ψ) :

$$(x, y) \rightarrow (\xi(x, y), \psi(x, y)), x = \xi.$$

В новых переменных, производные определяются по известной формуле [7]:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \psi}. \quad U = \frac{\psi^n \partial \psi}{\partial y}, V = -\frac{\psi^n \partial \psi}{\partial x}. \quad (7)$$

Здесь n — используется для регулирования сгущения расчетной сетки около стенки. С увеличением n увеличивается и сгущение сетки. Авторы для расчетов использовали значение $n=1$. В новых переменных

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \frac{V \partial}{\psi \partial \psi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{U}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi}. \quad (8)$$

А) система (1,3) приобретает вид стандартная $k-\varepsilon$ модель

BUILDING

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{u}{\psi} \frac{\partial u}{\partial \psi} (\gamma + \gamma_t) \right), \quad \frac{\partial k}{\partial \xi} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{u}{\psi} \frac{\partial k}{\partial \psi} \right) + v_t \frac{u}{\psi^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 - \frac{\varepsilon}{u}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{u}{\psi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi} \right) + C_1 \frac{\varepsilon}{k} v_t \frac{u}{\psi^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \psi} \right)^2 - C_2 \frac{\varepsilon^2}{uk}, \quad \gamma_t = C_\gamma \frac{k^2}{\varepsilon}.$$

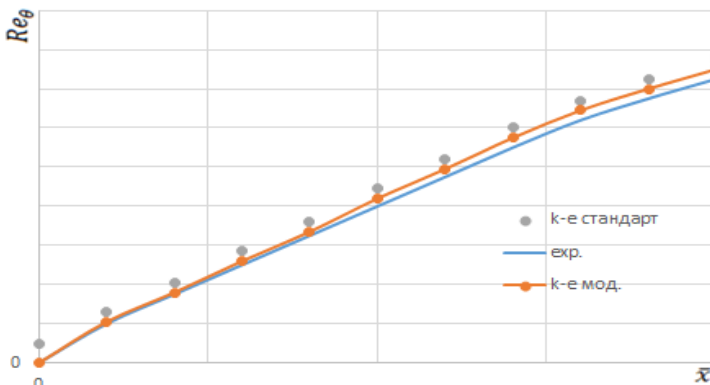
Б) модернизированная k-ε модель

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{u}{\psi} \frac{\partial u}{\partial \psi} (\gamma + \gamma_t) \right), \quad \frac{\partial k}{\partial \xi} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\mu_s}{\sigma_k} \frac{u}{\psi} \frac{\partial k}{\partial \psi} \right) + \frac{G_k}{u} - \frac{\varepsilon}{u}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} = \frac{1}{\psi} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\mu_s}{\sigma_\varepsilon} \frac{u}{\psi} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \psi} \right) + C_1 f_1 G_k \frac{\varepsilon}{uk} - C_2 f_2 \frac{\varepsilon^2}{uk}, \quad G_k = 4\mu_s \left(\frac{u \partial u}{\psi \partial \psi} \right)^2.$$

Численный расчет уравнений системы (1,3) проводился с помощью неявной конечно-разностной схемы.

В поперечном направлении использована центральная разность. Для решения неявной схемы использовался метод прогонки. Шаги интегрирования были $\Delta \xi = 0.00001$, $\Delta \psi = 0.0002$. Число расчетных точек в поперечном направлении было 4000. Для задачи ставились следующие граничные условия: на стенке, т.е. при $\psi = 0$: $U = 0$ и при $\psi \rightarrow \infty$: $U = 1$. Старт расчета происходил в $\varepsilon = k = 0.0045$



Фиг.1. Зависимость числа Рейнольдса толщины потери импульса от длины пластины.

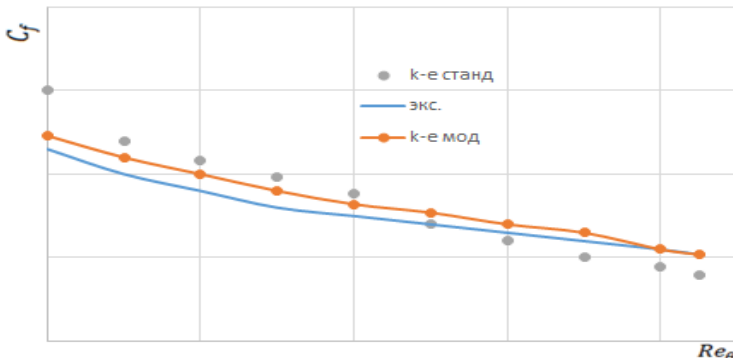
для числа Рейнольдса $Re = 5 \cdot 10^6$. Таким образом, до сечения $\xi = 0$ поток был ламинарным и после него становился турбулентным за счет увеличения относительных скоростей. Ниже показаны сопоставления полученных численных результатов с известными опытными данными и теориями. На фиг.1 сплошной линией показывается численные результаты изменения числа Рейнольдса толщины потери импульса от безразмерной длины пластины \tilde{x} . Число Рейнольдса толщины потери импульса находился путём интегрирования уравнения

$$\frac{d Re_\theta}{d \xi} = 0.5 C_f. \tag{11}$$

Здесь C_f - коэффициент трения пластины:

$$C_f = \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \frac{2}{Re} \left(\frac{u}{\psi} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right)_w = \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial u^2}{\partial \psi^2} \right)_w \tag{12}$$

Уравнение (11) несложно получить путем интегрирования уравнения движения для осредненного потока по y .



Фиг.2. Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса толщины потери импульса.

Обсуждение результатов.

На фиг.1 для сравнения пунктирной линией представлены опытные результаты [8].

На фиг.2 сплошной линией показана зависимость коэффициента трения от безразмерной толщины потери импульса по предлагаемой модели. Пунктирной линией иллюстрируется также результаты

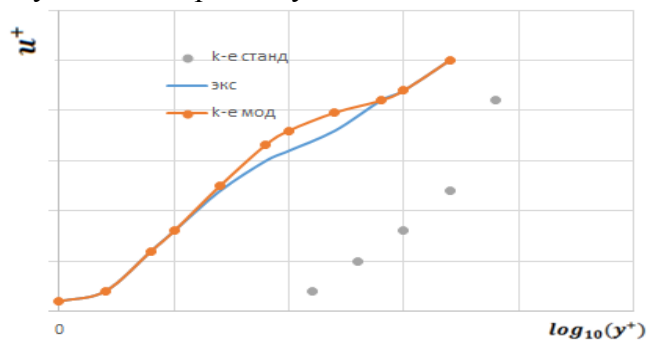
по теории Кармана-Шоенхера [9].

BUILDING

На фиг.3 сплошной линией показан результат численного расчета для безразмерной продольной скорости потока в зависимости от безразмерного расстояния до пластины. Безразмерные скорости и расстояние определялись по формулам

$$u_+ = \frac{u}{u_*}, y_+ = \text{Re } y u_*, u_* = \sqrt{0.5 C_f}.$$

Здесь для сравнения с результатами модели пунктирными линиями показаны также результаты теории Коулза [10,11].



Фиг.3. Поперечное распределение продольной скорости.

Заключение

В статье показана возможность моделирования турбулентных процессов с помощью двух взаимопроникающих потоков. Калибровка и верификация « $k-\varepsilon$ » модели проведена на известных задачах, которые хорошо исследованы экспериментально. Несмотря на то, что природа турбулентности у этих задач разные, « $k-\varepsilon$ » модель количественно не

описывает точно эти сложные течения, а модернизированная $k-\varepsilon$ модель неплохо описывает эти сложные течения.

References:

- [1]. B. Mohammadi, O. Pironneau. Analysis of the K-Epsilon turbulence model. M. John Wiley & Sons, 1994.
- [2]. Vager B.G., Nadejina Ye.D. Ispol'zovanie differentsialnogo uravneniya perenosa dissipatsii pri modelirovanii prizemnogo sloya atmosfery. Izvestiya AN SSSR. Fizika atmosfery i okeana, t. 12, № 6, s.345-355, 1976.
- [3]. M.G. Anuchin, V.E. Neuvajaev, I.E. Parshukov. Primenenie $k\varepsilon$ -modeli dlya opisaniya prizemnogo sloya atmosfery. VANT ser. Matematicheskoe modelirovanie fizicheskikh protsessov, vip. 2, s. 11-27, 2001.
- [4]. V.E. Neuvajaev, V.G. Yakovlev. Raschet gravitatsionnogo turbulentnogo peremeshivaniya po $k-\varepsilon$ modeli. VANT ser. «Teoreticheskaya i prikladnaya fizika», vyp. 1, str. 28-36, 1988.
- [5]. Loytsyanskiy L.G. Mexanika zhidkosti i gaza. M.: Nauka, 1987. С. 373–382.
- [6]. Mises R., Zs. angew. Math. u. Mech., 7, 425(1927).
- [7]. Karman Th. Mechanische Ahnlichkeit und Turbulenz. – Nachr. d. Gesellsch. d. Wissen. Zu Gottingen, Math. Phys. Kl., 1930.
- [8]. “Turbulence modeling Resource. NASA Langley Research Center”, <http://turbmodels.larc.nasa.gov>.
- [9]. Schoenherr K. E. Resistance of flat plate. Trans. SNAME. 40:279-313, 1932.
- [10]. Coles, D. E. The law of the wake in the turbulent boundary layer. J. Fluid Mech. 1, 191–226, 1956.
- [11]. Coles, D. The turbulent boundary layer in a compressible fluid. J. Fluid Mech. 1, 191. Rep.R-403-PR, Rand Corp., Santa Monica, California, 1962.

Литература

- [1]. B. Mohammadi, O. Pironneau. Analysis of the K-Epsilon turbulence model. M. John Wiley & Sons, 1994.
- [2]. Вагер Б.Г., Надежина Е.Д. Использование дифференциального уравнения переноса диссипации при моделировании приземного слоя атмосферы. Известия АН СССР. Физика атмосферы и океана, т. 12, № 6, с.345-355, 1976.
- [3]. М.Г. Анучин, В.Е. Неуважаев, И.Э. Паршуков. Применение $k\varepsilon$ -модели для описания приземного слоя атмосферы. ВАНТ сер. Математическое моделирование физических процессов, вып. 2, с. 11-27, 2001.
- [4]. В.Е. Неуважаев, В.Г. Яковлев. Расчет гравитационного турбулентного перемешивания по $k-\varepsilon$ модели. ВАНТ сер. «Теоретическая и прикладная физика», вып. 1, стр. 28-36, 1988.
- [5]. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. С. 373–382.
- [6]. Mises R., Zs. angew. Math. u. Mech., 7, 425(1927).
- [7]. Karman Th. Mechanische Ahnlichkeit und Turbulenz. – Nachr. d. Gesellsch. d. Wissen. Zu Gottingen, Math. Phys. Kl., 1930.
- [8]. “Turbulence modeling Resource. NASA Langley Research Center”, <http://turbmodels.larc.nasa.gov>.
- [9]. Schoenherr K. E. Resistance of flat plate. Trans. SNAME. 40:279-313, 1932.
- [10]. Coles, D. E. The law of the wake in the turbulent boundary layer. J. Fluid Mech. 1, 191–226, 1956.
- [11]. Coles, D. The turbulent boundary layer in a compressible fluid. J. Fluid Mech. 1, 191. Rep.R-403-PR, Rand Corp., Santa Monica, California, 1962.