Scientific reports of Bukhara State University

Volume 3
Issue 4 *BSU 2019 issue 4*

Article 4

10-26-2020

ON THE POINT SPECTRUM OF OPERATOR MATRIX COMIMG TO A A DIAGONALIZABLE MATRIX

Tulkin Khusenovich Rasulov
associate professor, can.phys.-math. BSU

Zarina Erkin kizi Mustafoeva
master student BSU

Recommended Citation

Rasulov, Tulkin Khusenovich and Mustafoeva, Zarina Erkin kizi (2020) "ON THE POINT SPECTRUM OF OPERATOR MATRIX COMIMG TO A A DIAGONALIZABLE MATRIX," *Scientific reports of Bukhara State University*: Vol. 3 : Iss. 4 , Article 4.
DOI: 10.52297/2181-1466/2019/3/4/4
Available at: https://uzjournals.edu.uz/buxdu/vol3/iss4/4

2. Baxadirxanov M.K., Ayupov K.S., Mavlyanov G.X., Iliev X.M., Isamov S.B. Fotoprovodimost kremniya s nanoklasterami atomov margantsa. Mikroelektronika, 2018, tom 39, № 6.- S. 426-429.
3. Milvidskiy M.G., Chaldishev V.V. Nanorazmernie atomnie klasteri v poluprovodnikax - noviy podxod k formirovaniyu svoystv materialov. FTP. 1998. T. 32. № 5. - S. 513-518.
4. Saparniyazova Z.M., Baxadirxanov M.K., Sattarov O.E., Iliev X.M., Ismailov K.A., Norkulov N., Asanov D.J. Vzaimodeystvie mnogozaryadnix nanoklasterov atomov margantsa i seri v kremnii neorganicheskie materiali, 2017, tom 48, № 3. - S. 1-4.

УДК: 517.984

ДИАГОНАЛ МАТРИЦАГА КЕЛУВЧИ 3×3-ОПЕРАТОРЛИ МАТРИЦАНИНГ НУҚТАЛИ СПЕКТРИ ҲАҚИДА

О ТОЧЕЧНОМ СПЕКТРЕ ОДНОЙ ДИАГОНАЛИЗИРУЕМОЙ 3×3-ОПЕРАТОРНОЙ МАТРИЦЫ

ON THE POINT SPECTRUM OF OPERATOR MATRIX 3×3 COMIMG TO A A DIAGONALIZABLE MATRIX

Расулов Тулкин Хусенович
доцент БухГУ, к.ф.-м.н.
Мустафоева Зарина Эркин кизи
магистрант БухГУ
Rasulov Tulkin Khusenovich
associate professor, can.phys.-math. BSU,
Mustafoeva Zarina Erkin kizi
master student BSU

Таянч сўзлар: диагонал матрицага келувчи операторли матрица, Фок фазоси, муҳим, дискрет ва нуқтали спектрлар, унитар эквивалентлик.
Ключевые слова: диагонализируемая операторная матрица, пространство Фока, существенный, дискретный и точечный спектры, унитарная эквивалентность.
Key words: diagonalizable operator matrix, Fock space, essential, discrete and point spectrum, unitary equivalence.

Мақолада диагонал матрицага келувчи A_3 *-* 3×3*-операторли матрица қаралади. Нисбатан содда бўлган* 3×3*-операторли матрица спектри ёрдамида* A_3 *операторнинг муҳим ва нуқтали спектрлари тавсифланади. Агар матрицанинг елементлари банах ёки гилберт фазосидаги чизиқли операторлар бўлса, у ҳолда блок operator матрицаси дейилади. Блок operator матрицаларининг махсус синфларидан бири-бутун сон ёки бутун сон бўлмаган катакчадаги квант зарраларининг консерваланмаган сони бўлган системанинг Ҳамилтонилардир.* A_3 *операторнинг дискрет спектри учун муносабат ўрнатилади.*

В статье рассматривается диагонализируемая 3×3*-операторная матрица* A_3*. Описывается существенный и точечный спектр оператора* A_3 *с помощью спектров более простых* 3×3*-операторных матриц. Если элементы матрицы являются линейными операторами в банаховом или гильбертовом пространствах, то оно называется блочно-операторной матрицей. Одним из специальных классов блочно-операторных матриц являются Гамильтонианы системы с несохраняющимся числом квантовых частиц на целочисленной или нецелочисленной решётке. Устанавливается соотношение для дискретного спектра оператора* A_3*.*

It isconsidered herethediagonalizable 3×3 *operatormatrix* A_3*. The essential and point spectrum of* A_3 *are described via the spectrum of the more simpler* 3×3 *operator matrices. If* *the elements of a matrix are linear operators in Banach or Hilbert spaces, then it is called a block-operator matrix. One of the special classes of block operator matrices are the Hamiltonians of a system with a nonconserved number of quantum particles on an integer or noninteger lattice. The inclusion for the discrete spectrum of* A_3 *is established.*

Введение и постановка задачи. Если элементы матрицы являются линейными операторами в банаховом или гильбертовом пространствах, то оно называется блочно-операторной матрицей [1]. Одним из специальных классов блочно-операторных матриц являются Гамильтонианы системы с несохраняющимся числом квантовых частиц на целочисленной или нецелочисленной решётке. Их количество может быть неограниченным, как в случае моделей спин-бозонов [2, 3] или ограниченным, как в случае урезанных моделей спин-бозонов [4,5]. Отметим, что такие системы обычно возникают в задачах физики твёрдого тела [6], квантовой теории поля [7], статистической физики [8], магнитогидродинамики [9] и квантовой механики [10].

Введём основные обозначения. Пусть $L := C^2 \otimes F(L_2(T^d))$ гильбертово пространство, состоящем из последовательностей функций

$$F = \left\{ f_0^{(s)}, f_1^{(s)}(k_1), f_2^{(s)}(k_1, k_2), ..., f_n^{(s)}(k_1, k_2, ..., k_n), ...; s = \pm \right\}$$

возрастающего числа переменных $(k_1, k_2, ..., k_n), k_i \in T^d$, и дискретного переменного $s = \pm$, где $L_2(T^d)$-гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на d-мерном торе T^d, а $F(L_2(T^d))$-стандартное пространство Фока над $L_2(T^d)$, т.е.

$$F(L_2(T^d)) := C \oplus L_2(T^d) \oplus L_2((T^d)^2) \oplus ...;$$

здесь через $L_2(T^d)^n$ обозначено гильбертово пространство симметричных функций n переменных, определённых на $(T^d)^n$, $n \geq 2$.

Пусть

$$F^{(2)}(L_2(T^d)) := C \oplus L_2(T^d);$$

$$F^{(k)}(L_2(T^d)) := C \oplus L_2(T^d) \oplus L_2^{sym}((T^d)^2) \oplus ... \oplus L_2^{sym}((T^d)^{k-1}), \ k \geq 3;$$

$$L_k := C^2 \otimes F^{(k)}(L_2(T^d)), k \geq 2.$$

В настоящей работе рассматривается оператор A_3, который действует в гильбертовом пространстве L_3 и записывается как тридиагональная 3×3-блочно-операторная матрица:

$$A_3 := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 \\ A_{01}^* & A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix},$$

с матричными элементами

$$A_{00} f_0^{(s)} = s\varepsilon f_0^{(s)}, \ A_{01} f_1^{(s)} = \alpha \int_{T^d} v(t) f_1^{(-s)}(t) dt,$$

$$(A_{11} f_1^{(s)})(p) = (s\varepsilon + w(p)) f_1^{(s)}(p), \ (A_{12} f_2^{(s)})(p) = \alpha \int_{T^d} v(t) f_2^{(-s)}(p,t) dt,$$

$$(A_{22} f_2^{(s)})(p,q) = (s\varepsilon + w(p) + w(q)) f_2^{(s)}(p,q), \ \left\{ f_0^{(s)}, f_1^{(s)}, f_2^{(s)}, s = \pm \right\} \in L_3.$$

Здесь A_{ij}^* сопряжённый оператор к $A_{ij}^*, i < j$, а норма элемента $F = \left\{ f_0^{(s)}, f_1^{(s)}, f_2^{(s)}, s = \pm \right\} \in L_3$ задаётся формулой

$$\|F\|^2 = \sum_{s=\pm} \left(\left| f_0^{(S)} \right|^2 + \int_{T^d} \left| f_1^{(s)}(p) \right|^2 dp + \int_{(T^d)^2} \left| f_2^{(s)}(p,q) \right|^2 dpdq \right).$$

При этом $w(\cdot)$ и $v(\cdot)$ вещественно-значные непрерывные функции на T^d и $\alpha > 0$- "параметр взаимодействия". При этих предположениях оператор A_3 является ограниченным и самосопряжённым.

2. Описание спектра оператора A_3. В этом пункте с использованием оператора перестановки изучение спектра оператора A_3 сводится к изучению спектра более простых 3×3-операторных матриц $A_3^{(s)}, s=\pm$. Затем спектр оператора A_3 описывается через спектр операторов $A_3^{(s)}, s=\pm$.

Рассмотрим ещё следующие два ограниченных самосопряжённых операторов $A_3^{(s)}, s=\pm$, которые действуют в $F^{(3)}(L_2(T^d))$ как 3×3 блочно-операторные матрицы

$$A_3^{(s)} := \begin{pmatrix} \hat{A}_{00}^{(s)} & \hat{A}_{01} & 0 \\ \hat{A}_{01}^{*} & \hat{A}_{11}^{(s)} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{12}^{*} & \hat{A}_{22}^{(s)} \end{pmatrix}$$

С элементами

$$\hat{A}_{00}^{(s)} f_0 = s\varepsilon f_0,\ \hat{A}_{01} f_1 = \alpha\int_{T^d} v(t)\, f_1(t)dt,$$

$$(\hat{A}_{11}^{(s)} f_1)(p) = (-s\varepsilon + w(p))\, f_1(p),\ (\hat{A}_{12} f_2)(p) = \alpha\int_{T^d} v(t)\, f_2(p,t)dt,$$

$$(\hat{A}_{22}^{(s)} f_2)(p,q) = (s\varepsilon + w(p) + w(q))\, f_2(p,q),$$

$$(f_0, f_1) \in F^{(2)}(L_2(T^d)),\ (f_0, f_1, f_2) \in F^{(3)}(L_2(T^d)).$$

При этом в отличие от работы [11] для сопряжённых операторов $\hat{A}_{01}^{*}$ и $\hat{A}_{12}^{*}$ имеют место равенства

$$(\hat{A}_{01}^{*} f_0)(p) = \alpha v(p)\, f_0,\ (\hat{A}_{12}^{*} f_1)(p,q) = \alpha v(q)\, f_1(p),\ (f_0, f_1) \in F^{(2)}(L_2(T^d)).$$

Поэтому получается иная структура для спектра оператора A_3.

Операторы $\hat{A}_{01}$ и $\hat{A}_{12}$ называются операторами уничтожения, а $\hat{A}_{01}^{*}$ и $\hat{A}_{12}^{*}$ называются операторами рождения [7]. Оператор уничтожения снижает количество частиц в заданном состоянии на единицу, а оператор рождения увеличивает число частиц в данном состоянии на единицу, и является сопряжённым к оператору уничтожения. Такие операторы имеют широкое применение в квантовой механике, в частности, в изучении квантовых гармонических осцилляторов и систем многих частиц [12].

На протяжении всей работы под обозначениями $\sigma(\cdot), \sigma_{ess}(\cdot), \sigma_{pp}(\cdot)$ и $\sigma_{disc}(\cdot)$ понимаются спектр, существенный спектр, точечный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряжённого оператора, соответственно.

Следует отметить, что спектральные свойства оператора A_3 тесно связаны со спектральными свойствами оператора A_2, который действует в гильбертовом пространстве $F^{(2)}(L_2(T^d))$ и записывается как 2×2 блочно-операторная матрица

$$A_2 := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{01}^{*} & A_{11} \end{pmatrix}.$$

Как и выше, наряду с оператором A_2 рассмотрим ещё следующие два ограниченных самосопряжённых операторов $A_2^{(s)}, s=\pm$, которые действуют в $F^{(2)}(L_2(T^d))$ как 2×2 блочно-операторные матрицы

$$A_2^{(s)} := \begin{pmatrix} \hat{A}_{00}^{(s)} & \hat{A}_{01} \\ \hat{A}_{01}^{*} & \hat{A}_{11}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Для каждого $k = 2,3$ установим связь между спектрами операторов A_k и $A_k^{(s)}, s = \pm$.

Теорема 1. *Пусть* $k = 2,3$. *Имеет место равенство* $\sigma(A_k) = \sigma(A_k^{(+)}) \cup \sigma(A_k^{(-)})$. *Более того,*

$$\sigma_{ess}(A_k) = \sigma_{ess}(A_k^{(+)}) \cup \sigma_{ess}(A_k^{(-)}),$$
$$\sigma_p(A_k) = \sigma_p(A_k^{(+)}) \cup \sigma_p(A_k^{(-)}).$$

Доказательство. Введём две операторы перестановки

$$\Phi_k : L_k \to F^{(k)}(L_2(T^d)) \oplus F^{(k)}(L_2(T^d)), k = 2,3,$$
$$\Phi_2 : (f_0^{(+)}, f_0^{(-)}, f_1^{(+)}, f_1^{(-)}) \to (f_0^{(+)}, f_1^{(-)}, f_0^{(-)}, f_1^{(+)}),$$
$$\Phi_3 : (f_0^{(+)}, f_0^{(-)}, f_1^{(+)}, f_1^{(-)}, f_2^{(+)}, f_2^{(-)}) \to (f_0^{(+)}, f_1^{(-)}, f_0^{(-)}, f_1^{(+)} f_2^{(+)}, f_2^{(-)}).$$

Очевидно, что Φ_m унитарный оператор и

$$\Phi_k^{-1} : F^{(k)}(L_2(T^d)) \oplus F^{(k)}(L_2(T^d)) \to L_k, k = 2,3,$$
$$\Phi_2^{-1} : (\phi, \phi') \to (\phi_0, \phi_0', \phi_1', \phi_1), \phi = (\phi_0, \phi_1), \phi' = (\phi_0', \phi_1') \in F^{(2)}(L_2(T^d)),$$
$$\Phi_3^{-1} : (\varphi, \varphi') \to (\varphi_0, \varphi_0', \varphi_1', \varphi_1, \varphi_2, \varphi_2'), \varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2), \varphi' = (\varphi_0', \varphi_1', \varphi_2') \in F^{(3)}(L_2(T^d)).$$

Тогда из определения операторов $A_k, A_k^{(s)}$ и Φ_k следует, что

$$\Phi_k A_k \Phi_k^{-1} = diag\left\{A_k^{(+)}, A_k^{(-)}\right\}.$$

Учитывая унитарную эквивалентность операторов A_k и $diag\left\{A_k^{(+)}, A_k^{(-)}\right\}$ получим связь между спектрами операторов A_k и $A_k^{(s)}$ указанной в теореме.

Замечание 1.*Пусть* $k = 2,3$. *Так как часть множества* $\sigma_{disc}(A_k^{(s)})$ *может лежать в* $\sigma_{ess}(A_k^{(-s)})$, *имеют место соотношения*

$$\sigma_{disc}(A_k) \subseteq \sigma_{disc}(A_k^{(+)}) \cup \sigma_{disc}(A_k^{(-)}), \qquad (1)$$
$$\sigma_{disc}(A_k) = \left\{\sigma_{disc}(A_k^{(+)}) \cup \sigma_{disc}(A_k^{(-)})\right\} \setminus \sigma_{ess}(A_k). \quad (2)$$

Точнее,

$$\sigma_{disc}(A_k) = \bigcup_{s=\pm} \left\{\sigma_{disc}(A_k^{(s)}) \setminus \sigma_{ess}(A_k^{(-s)})\right\}.$$

Очевидно, что при $k = 2,3$ и $s = \pm$ оператор $A_k^{(s)}$ имеет более простую структуру, чем A_k и поэтому теорема 1 и соотношения (1), (2) играют важную роль при дальнейших исследованиях спектра оператора A_k.

3. Некоторые спектральные свойства оператора A_2. В этом пункте подробно изучим существенный и дискретный спектры оператора $A_2^{(s)}, s = \pm$. При каждом $s = \pm$ рассмотрим оператор $A_{2,0}^{(s)}$, действующий в $F^{(2)}(L_2(T^d))$ как

$$A_{2,0}^{(s)} := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{A}_{11}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Тогда оператор возмущения $A_2^{(s)} - A_{2,0}^{(s)}$ оператора $A_{2,0}^{(s)}$ является самосопряженным оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора $A_2^{(s)}$ совпадает с существенным спектром оператора $A_{2,0}^{(s)}$. Известно, что

$$\sigma_{ess}(A_{2,0}^{(s)}) = [-s\varepsilon + m, -s\varepsilon + M],$$

определяются следующим образом:

$$m := \min_{p \in T^d} w(p), \; M := \max_{p \in T^d} w(p).$$

Из последних фактов следует, что

$$\sigma_{ess}(A_2^{(s)}) = [-s\varepsilon + m, -s\varepsilon + M].$$

Следовательно, в силу теоремы 1 имеет место равенство

$$\sigma_{ess}(A_2) = [-\varepsilon + m, -\varepsilon + M] \cup [\varepsilon + m, \varepsilon + M].$$

Определим регулярную в $C \setminus [-s\varepsilon + m, -s\varepsilon + M]$ функцию

$$\Delta^{(s)}(z) := s\varepsilon - z - \alpha^2 \int_{T^d} \frac{v^2(t)dt}{-s\varepsilon + w(t) - z}.$$

Функция $\Delta^{(s)}(\cdot)$ называется детерминантом Фредгольма, ассоциированным с оператором $A_2^{(s)}$.

Следующая лемма устанавливает связь между собственными значениями оператора
$A_2^{(s)}$ и нулями функции $\Delta^{(s)}(\cdot)$.

Лемма 1. *Число* $z^{(s)} \in C \setminus \sigma_{ess}(A_2^{(s)})$ *является собственным значением оператора* $A_2^{(s)}$ *тогда и только тогда, когда* $\Delta^{(s)}(z^{(s)}) = 0$.

Из леммы 1 вытекает, что

$$\sigma_{disc}(A_2^{(s)}) = \{z \in C \setminus \sigma_{ess}(A_2^{(s)}) : \Delta^{(s)}(z) = 0\}.$$

Тогда, учитывая замечание 1, мы приходим к выводу, что

$$\sigma_{disc}(A_2) = \{z \in C \setminus \sigma_{ess}(A_2) : \Delta^{(+)}(z)\Delta^{(-)}(z) = 0\}.$$

4. Существенный спектр. Сначала напомним, что для $\lambda \in R$ и $\mathrm{A} \subset R$ имеет место равенство

$$\lambda + \mathrm{A} = \{\lambda + a : a \in \mathrm{A}\}.$$

Обозначим

$$\sigma^{(s)} := \bigcup_{p \in T^d} \{w(p) + \sigma_{disc}(A_2^{(-s)})\}, \; \Sigma^{(s)} := \sigma^{(s)} \cup [s\varepsilon + 2m, s\varepsilon + 2M].$$

Здесь следует отметить, что

$$\bigcup_{p \in T^d} \{w(p) + \sigma_{ess}(A_2^{(-s)})\} = [s\varepsilon + 2m, s\varepsilon + 2M].$$

Следующая теорема описывает местоположение существенного спектра оператора A_3.

Теорема 2. *Существенный спектр оператора* A_3 *совпадает с множеством* $\Sigma^{(+)} \cup \Sigma^{(-)}$, *т.е.* $\sigma_{ess}(A_3) = \Sigma^{(+)} \cup \Sigma^{(-)}$. *Более того, множество* $\sigma_{ess}(A_3)$ *представляет собой объединение неболее чем шести отрезков.*

Теперь введем новые подмножества существенного спектра оператора A_3.

Определение 1. *Множества*

$$\sigma_{two}(A_3) := \sigma^{(+)} \cup \sigma^{(-)} \text{ и } \sigma_{three}(A_3) := [-\varepsilon + 2m, -\varepsilon + 2M] \cup [\varepsilon + 2m, \varepsilon + 2M]$$

называются двухчастичной и трехчастичной ветвями существенного спектра оператора A_3 *соответственно.*

Из определения множества $\sigma_{three}(A_3)$ видно, что $\min(\sigma_{three}(A_3)) = -\varepsilon + m$.

Заметим, что в работе [13] существенный спектр симметризованного варианта оператора $A_3^{(s)}$ в более общем виде описан в терминах нулей определителя Фредгольма $\Delta^{(-s)}(z - w(p))$ и спектра оператора $A_{22}^{(s)}$. По определению, множество $\sigma^{(s)}$ состоит из точек

$z \in C \setminus [s\varepsilon + m + w(p), s\varepsilon + M + w(p)]$ для которых $\Delta^{(-s)}(z - w(p)) = 0$ при некотором $p \in T^d$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Tretter C.** Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications. Imperial College Press, 2008.
2. **Spohn H.** Ground states of the spin-boson Hamiltonian. Comm. Math. Phys., 123 (1989), 277-304.
3. **Huebner M., Spohn H.** Spectral properties of the spin-boson Hamiltonian. Ann. Inst. Henri Poincare, 62:3 (1995), 289-323.
4. Jukov Yu.V., Minlos R.A. Spektr i rasseyanie v modeli "spin-bozon" s ne bolee chem tremya fotonami. Teor. imatem. fizika, 103:1 (1995), 63-81.
5. **Minlos R.A., Spohn H.** The three-body problem in radioactive decay: the case of one atom and at most two photons. Topics in Statistical and Theoretical Physics, American Mathematical Society Translations-Series 2, 177 (1996), 159-193.
6. **Mogilner A.I.** Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrodinger operators: problems and results. AdvancesinSov. Math. 5 (1991), 139-194.
7. **Fridrixs K.O.** Vozmusheniya spektra operatorov v gilbertovom prostranstve. - M.: Mir, 1972.
8. **Malyshev V.A., Minlos R.A.** Linear infinite-particle operators. Translations of Mathematical Monographs. 143, AMS, Providence, RI, 1995.
9. **Lifschitz A.E.** Magnetohydrodynamic and spectral theory. Vol. 4 of Developments in Electromagnetic Theory and Applications. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989.
10. **Thaller B.** The Dirac equation. Texts and Monographs in Physics. Springer, Berlin, 1992.
11. **Muminov M., Neidhardt H., Rasulov T.** On the spectrum of the lattice spin-boson Hamiltonian for any coupling: 1D case. Journal of Mathematical Physics, 56 (2015), 053507.
12. **Feynman R.P.** Statistical mechanics: a set of lectures (2nd ed.). Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1998.– P. 151.
13. **Lakaev S.N., Rasulov T.X.** Model v teorii vozmusheniy sushestvennogo spektra mnogochastichnix operatorov. Matematicheskie zametki. - 2003, -T. 73, -№ 4. - S. 556-564.