[Scientific journal of the Fergana State University](https://uzjournals.edu.uz/fdu)

Volume 2 *Scientific journal of the Fergana State University № 3/2019*

Article 1

8-28-2019

Solving differential matrix equations for surface with respect to action of group of Lorence

U. Bekbayeva
Ferghana State University, Ferghana, Murabbiylar 19, fdujournal@fdu.uz

K. Muminov
Ferghana State University, Ferghana, Murabbiylar 19, fdujournal@fdu.uz

Recommended Citation

Bekbayeva, U. and Muminov, K. (2019) "Solving differential matrix equations for surface with respect to action of group of Lorence," *Scientific journal of the Fergana State University*: Vol. 2 , Article 1.
DOI: 512.745
Available at: https://uzjournals.edu.uz/fdu/vol2/iss3/1

УДК: 512.745

МАТРИЦАЛИ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИНИ СИРТЛАР УЧУН ЛОРЕНЦ АЛМАШТИРИШЛАРИ АНИҚЛИГИДА ЕЧИШ

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА

SOLVING DIFFERENTIAL MATRIX EQUATIONS FOR SURFACE WITH RESPECT TO ACTION OF GROUP OF LORENCE

У.Бекбаев, К.Муминов

Аннотация

Мақолада матрицали дифференциал тенгламалар системасининг ечимларига кўра Лоренц группасига нисбатан эквивалент бўлган сиртлар системасини тиклаш масаласи хал қилинган.

Аннотация

В статье рассматриваются задачи по описанию систем дифференциальных матричных уравнений, решения которых однозначно восстанавливают классы O(3,1) – эквивалентных поверхностей.

Annotation

In The artlcle a description is given for the system of differential matrix equations, the solutions of which regenerate the class of surfaces in 4 – dimensional space, which are equivalent with respect to the action of group - O(3,1).

Таянч сўз ва иборалар: *псевдоортогонал фазо, Лоренц алмаштиришлари, группа таъсири, эквивалент сиртлар.*

Ключевые слова и выражения: *псевдоортогональное пространство, преобразования Лоренца, действие группы, эквивалентность поверхностей.*

Keywords and expressions: *Pseudoorthogonal space, Lorenz transforms group action, equivalence of surfaces.*

1. Введение

Пусть C^4 - комплексное 4 - мерное линейное пространство и пусть $GL(4,\mathrm{C})$- группа всех обратимых линейных преобразований пространства X. Элементы из C^4 представляются в виде 4 – мерных вектор-столбцов $\vec{x} = \{\vec{x}_j\}_{j=1}^{4}$, а преобразования $g \in GL(4,C)$ в виде 4×4 – матриц $\left(g_{ij}\right)_{i,j=1}^{4}$, где x_i, $g_{ij} \in R$*i,j=1,…,4*. Действие $g \in GL(4,C)$ на вектор $\vec{x} = \{\vec{x}_j\}_{j=1}^{4} \in C^4$ есть умножение матрицы g на вектор-столбец $\vec{x}$ (запись: $g\vec{x}$).

C^∞ - дифференцируемое отображение $x: (0,1) \times (0,1) \to C^4$ называется элементарной поверхностью. Если G - подгруппа группы $GL(4,C)$, то две элементарные поверхности $\vec{y}(s,t)$и $\vec{x}(s,t)$ называют G- эквивалентными, если $\vec{y}(s,t) = g\vec{x}(s,t)$ для некоторого $g \in G$ и любых $(s,t) \in (0,1) \times (0,1)$.

Одной из задач в дифференциальной геометрии является проблема нахождения удобных критериев для эквивалентности элементарных поверхностей. Одним из эффективных методов при решении указанной задачи является инструментарий теории дифференциальных инвариантов.

В настоящей работе задача G – эквивалентности элементарных поверхностей для группы Лоренца - $O(3,1)$ переформулируется в терминах дифференциальной алгебры, что позволяет использовать алгебраический подход для решения этой задачи. Такой подход был использован при получении необходимых и достаточных условий G – эквивалентности поверхностей в случае действий общей линейной, специальной линейной, ортогональной и симплектической групп ([4], [5], [6], [7]).

Кроме того, описываются системы дифференциальных уравнений, решения которых восстанавливают поверхности с точностью до их эквивалентности относительно действия группы Лоренца $O(3,1)$.

2. Предварительные сведения.

Рассмотрим квадратичную форму

У.Бекбаев - кандидат физико-математических наук, доцент TURIN POLYTECHNIC UNIVERSITY**.**

Қ.Муминов- доктор физико-математических наук, профессор Национального университета Узбекистана.

$$x^T Jx = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$$

с матрицей

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 00 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 01 & 0 \\ 0 & 00 & -1 \end{pmatrix}, \text{т. е.} \, diag\, J = (1,1,1,-1).$$

Линейное преобразование $x \to y = gx$ мы будем называть преобразованием Лоренца, если оно оставляет неизменной квадратичную форму $x^T Jx$; матрицу gбудем называть в этом случае лоренцевой матрицей. Так как при преобразовании $y = gx$ квадратичная форма переходит в

$$y^T Jy = (gx)^T Jgx = x^T g^T Jgx,$$

то g является лоренцевой матрицей тогда и только тога, когда $g^T Jg = J$.

Из этого можно заключить, что совокупность лоренцевых матриц образует группу $G = O(3,1)$.

Для каждой элементарной поверхности $\vec{x}(s,t) = (x_j(s,t))_{j=1}^4$ через $M_s(\vec{x})$ обозначим 4×4 - матрицу $(m_{ij}(s,t))_{i,j=1}^4$ где *i*- ый столбец имеет координаты $m_{ij}(s,t) = \frac{\partial^{i-1} x_j(s,t)}{\partial s^{i-1}}$, $i,j = 1, \dots, 4$, при этом, считатся, что $\frac{\partial^0 x_j(s,t)}{\partial s^0} = x_j(s,t)$ для всех $j = 1, \dots, 4$, $s,t \in (0,1)$.

Через $M'_{ss}(\vec{x})$обозначается матрица $\left\{\frac{\partial^i x_j(s,t)}{\partial s^i}\right\}_{i,j=1}^4$, а через $M'_{st}(x)$ - матрица $\left\{\frac{\partial^i x_j(s,t)}{\partial s^{i-1} \partial t}\right\}_{i,j=1}^4$. Во всех нижеследующих случаях рассматриваются только регулярные поверхности, т.е. элементарные поверхности $\vec{x}(s,t)$, для которых определитель $det M_s(\vec{x})(s,t) \neq 0$ при всех $s,t \in (0,1)$.

Следующая же теорема устанавливает необходимые и достаточные условия G – эквивалентности регулярных поверхностей $\vec{x}(s,t)$ и $\vec{y}(s,t)$ с помощью матриц $M_s(\vec{x})$ и $M_s(\vec{y})$, в случае, когда $G = O(3,1)$.

Теорема 1. Две регулярные поверхности $\vec{x}(s,t)$ и $\vec{y}(s,t)$ являются $O(3,1)$ - эквивалентыми в том случае, когда выполнены следующие равенства:

$$a)\;\; M_s^{-1}(\vec{x})(s,t) M'_{ss}(\vec{x})(s,t) = M_s^{-1}(\vec{y})(s,t) M'_{ss}(\vec{y})(s,t);$$
$$b)\;\; M_s^{-1}(\vec{x})(s,t) M'_t(\vec{x})(s,t) = M_s^{-1}(\vec{y})(s,t) M'_t(\vec{y})(s,t);$$
$$c)\;\; M_s^T(\vec{x})(s,t) J M_s\;(\vec{x})(s,t) = M_s^T(\vec{y})(s,t) \mathrm{J} M_s\;(\vec{y})(s,t);$$

для всех $s,t \in (0,1)$.

Доказательство. Пусть поверхности $\vec{x}(s,t)$ и $\vec{y}(s,t)$ - $O(3,1)$ – эквивалентны, т.е. существует такой элемент $g \in O(3,1)$, для которого верно равенство $\vec{y}(s,t) = g\vec{x}(s,t)$. Следовательно, в силу определения, матрицы $M_s\,(\vec{x})$, имеем, что $M_s\,(\vec{y}) = gM_s\,(\vec{x})$. Покажем, что из этого равенства вытекает справедливость равенств a), b), c). Действительно,

1) $M_s^{-1}(\vec{y}) M'_{ss}(\vec{y}) = \left(gM_s\;(\vec{x})\right)^{-1} \left(gM_{ss}(\vec{x})\right)' = M_s^{-1}(\vec{x}) g^{-1} g M'_{ss}(\vec{x}) =$
$= M_s^{-1}(\vec{x}) M'_{ss}(\vec{x});$

2) $M_s^{-1}(\vec{y}) M'_{st}(\vec{y}) = \left(gM_s\;(\vec{x})\right)^{-1} \left(gM_s\;(\vec{x})\right)'_{st} = M_s^{-1}(\vec{x}) g^{-1} g M'_{st}(\vec{x}) =$
$= M_s^{-1}(\vec{x}) M'_{st}(\vec{x});$

3) $M_s^T(\vec{y}) J M_s\;(\vec{y}) = \left(gM_s\;(\vec{x})\right)^T J g M_s\;(\vec{x}) = M_s^T(\vec{x}) g^T J\, g M_s\;(\vec{x}) =$

$$= M_s^T(\vec{x}) J M_s\;(\vec{x});$$

Обратно, пусть для поверхностей $\vec{x}(s,t)$ и $\vec{y}(s,t)$ выполняются соотношения a), b), c). Заметим, что если $A(s,t) = A$ - обратимая матрица, то из равенства $A^{-1}A = AA^{-1} = e$ вытекает, что $A_s A^{-1} + A(A^{-1})_s = 0$, откуда $(A^{-1})_s = -A^{-1} A_s A^{-1}$. Используя это равенство, соотношения a), b) переписываются в виде:

$$a')\;\; \left(M_s\;(\vec{y}) \cdot M_s\;(\vec{x})^{-1}\right)_s = 0;$$

https://uzjournals.edu.uz/fdu/vol2/iss3/1
DOI: 512.745

$$b')\ \left(M_s\ (\vec{y})\cdot M_s\ (\vec{x})^{-1}\right)_t = 0\ ;$$

соответственно. Эти равенства означают, что $M_s\ (\vec{y})M_s\ (\vec{x})^{-1} = g = \left(g_{ij}\right)_{i,j=1}^{4} \in GL(4,C)$. Следовательно, $M_s\ (\vec{y}(s,t)) = gM_s\ (\vec{x}(s,t))$, в частности, $\vec{y}(s,t) = g\vec{x}(s,t)$ для всех $s,t \in (0,1)$.

Далее, в силу равенства c), имеем, что $g^T Jg = (M_s\ (\vec{y})M_s\ (\vec{x})^{-1})^T JM_s\ (\vec{y})M_s\ (\vec{x})^{-1} = J$, т.е. $g^T Jg = J$. Это означает, что $g \in O(3,1)$.

Теорема 1 доказана.

3. Дифференциальные уравнения для $O(3,1)$ - эквивалентных поверхностей.

Пусть $\vec{x}(s,t) = \{x_j(s,t)\}_{j=1}^{4}$ регулярная поверхность в C^4, и пусть $M_s\ (\vec{x}) = \left\{\frac{\partial^{i-1} x_j(s,t)}{\partial s^{i-1}}\right\}_{i,j=1}^{4}$, $s,t \in (0,1)$.

Вычисляя обратную матрицу $(M_s\ (\vec{x}))^{-1}$, получим, что произведение $(M_s\ (\vec{x}))^{-1}M_s'(\vec{x}) = A(s,t) = (a_{ij}(s,t))_{i,j=1}^{n}$ имеет следующий вид

$$A(s,t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 00 & a_{14}(s,t) \\ 1 & 0 & 00 & a_{24}(s,t) \\ 0 & 1 & 00 & a_{34}(s,t) \\ 0 & 0 & 01 & a_{44}(s,t) \end{pmatrix},$$

где $a_{i4}(s,t)$ - комплекснозначные бесконечно дифференцируемые функции, $(s,t) \in (0,1) \times (0,1)$, $i = 1,\dots,4$, вычисляемые по следующим формулам

$$a_{14} = \frac{\left[\vec{x}_s^{(4)}\vec{x}_s^{(1)}\vec{x}_s^{(2)}\vec{x}_s^{(3)}\right]}{detM_s\ (\vec{x})},\quad a_{24} = \frac{\left[\vec{x}\vec{x}_s^{(4)}\vec{x}_s^{(2)}\vec{x}_s^{(3)}\right]}{detM_s\ (\vec{x})},$$

$$a_{34} = \frac{\left[\vec{x}\vec{x}_s^{(1)}\vec{x}_s^{(2)}\vec{x}_s^{(3)}\right]}{detM_s\ (\vec{x})},\qquad a_{44} = \frac{\left[\vec{x}\vec{x}_s^{(1)}\vec{x}_s^{(2)}\vec{x}_s^{(4)}\right]}{detM_s\ (\vec{x})},$$

(здесь запись $[\vec{x}\vec{y}\dots\vec{z}]$ означает детерминант матрицы, у которой столбцами являются векторы $\vec{x}\ ,\vec{y},\dots,\vec{z}$).

Рассмотрим следующую систему матричных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} X_s'(s,t) = X(s,t)\,A(s,t), \\ X_t'(s,t) = X(s,t)\,B(s,t), \\ X^T\,(s,t)JX(s,t) = C(s,t), \end{cases} \qquad (1)$$

где $C(s,t) - (c_{ij}(s,t))_{i,j=1}^{4} = C^T(s,t)$ и $c_{ij}(s,t)$ - есть C^∞ - дифференцируемые функции при всех $s,t \in (0,1)$; $X(s,t) = (x_{ij})_{i,j=1}^{4}$ – неизвестная 4×4 – матрица, $A(s,t) = \left(a_{ij}\,(s,t)\right)_{i,j=1}^{4} B(s,t) = \left(b_{ij}\,(s,t)\right)$ – заданные фиксированные 4×4 – матрицы, $s,t \in (0,1)$ (предполагается, что функции $a_{ij}\,(s,t)$ и $b_{ij}\,(s,t)$ являются C^∞ - дифференцируемыми).

Решение $X(s,t)$ системы (1) называется невырожденным, если $detX(s,t) \neq 0$ для всех $s,t \in (0,1)$. Два решения $X_0\ (s,t)$ и $X_1\ (s,t)$ называют $O(3,1)$ – эквивалентными если $X_1\ (s,t) = gX_0\ (s,t)$ для некоторого $g \in O(3,1)$.

Теорема 2 Пусть невырожденные матрицы $A(s,t), B(s,t), C(s,t)$ удовлетворяют следующим условиям:

(*i*).$A(s,t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 00 & a_{14}(s,t) \\ 1 & 0 & 00 & a_{24}(s,t) \\ 0 & 1 & 00 & a_{34}(s,t) \\ 0 & 0 & 01 & a_{44}(s,t) \end{pmatrix}$;

(*ii*). $A_t' + BA = B_s + AB$, где $A_t(s,t) = \left(\frac{\partial\ \ a_{ij}(s,t)}{\partial t}\right)_{i,j=1}^{4}$, $B_s(s,t) = \left(\frac{\partial\ \ b_{ij}(s,t)}{\partial s}\right)_{i,j=1}^{4}$;

(*iii*). $C_s' = A^T C + CA$, где $C_s(s,t) = \left(\frac{\partial \ c_{ij}(s,t)}{\partial s}\right)_{i,j=1}^4$;

(*iv*). $C_s' = B^T C + CB$; где $C_t(s,t) = \left(\frac{\partial \ c_{ij}(s,t)}{\partial t}\right)_{i,j=1}^4$,

Тогда, система уравнений

$$\begin{cases} X_s' = XA \\ X_t' = XB \\ X^T JX = C \end{cases} \tag{2}$$

имеет невырожденное решение. При этом, решение системы (2) единственно с точностью до $O(3,1)$ – эквивалентности.

Доказательство. В силу условия $A_t - B_s = AB - BA$ (см. условие (*ii*)) система (1) имеет невырожденное решение, $X_0(s,t)$ (см., например, [2], §7). Покажем, что всякое другое решение $X_1 = X_1(s,t)$ системы (1) имеет вид $X_1 = gX_0$, где $g \in GL(4,C)$. Действительно, используя (1), имеем

$$(X_1 X_0^{-1})_s = (X_1)_s X_0^{-1} + X_1 (X_0^{-1})_s = (X_1)_s X_0^{-1} + X_1(-X_0^{-1} X_{0s} X_0^{-1}) =$$
$$= (X_{1s} - X_1 X_0^{-1} X_{0s}) X_0^{-1} = (X_1 A - X_1 A) X_0^{-1} = 0.$$

Аналогичным образом, получаем $(X_1 X_0^{-1})_t = 0$. Поэтому $X_1 X_0^{-1} = g \in GL(4,C)$, т.е. $X_1 = gX$.

Таким образом, набор матриц

$$\{gX = gX_0(s,t) : g \in GL(4,C)\} \tag{3}$$

также является решением системы (2).

Если $X = (x_{jk}(s,t))_{j,k=1}^4$ решение системы (1), $X = (x_{jk}^{(1)} x_{jk}(s,t))_{j,k=1}^4$, то с учетом вида матрицы A (см. условие (*i*)), написав первое уравнение системы (1) в виде $X_s = XA$, получим, что

$$\begin{cases} \frac{\partial x_{j1}(s,t)}{\partial s} = x_{j2}(s,t), \ j = 1, \dots, 4 \\ \frac{\partial x_{j2}(s,t)}{\partial s} = x_{j3}(s,t), \ j = 1, \dots, 4 \\ \frac{\partial x_{j3-1}(s,t)}{\partial s} = x_{j4}(s,t), \ j = 1, \dots, 4 \\ \frac{\partial x_{j4}(s,t)}{\partial s} = \sum_{k=1}^{4} a_{k4} x_{jk}(s,t), \quad j = 1, \dots, 4 \end{cases} \tag{4}$$

Это означает, что решение $X = (x_{jk}(s,t))_{j,k=1}^4$системы (1) имеет вид $X = M_s\ (\vec{x})$, где $\vec{x} = (x_{11}(s,t), \dots, x_{41}(s,t))$.

Пусть теперь $X(s,t)$невырожденные решения системы (1), и пусть $W = (X^T)^{-1} C X^{-1}$. Ясно, что матрица W является невырожденной и симметрической. Поскольку $X(t)$ есть решение системы (1), то из условия (*iii*) следует, что

$$W_s' = ((X^T)^{-1} C X^{-1})_s' = ((X^T)^{-1})_s' C X^{-1} + (X^T)^{-1} (C X^{-1})_s' =$$
$$= -(X^{-1} X_s' X^{-1})^T C X^{-1} + (X^T)^{-1} (C_s' X^{-1} - C X^{-1} X_s' X^{-1}) =$$
$$= (X^{-1})^T \left[-(X_s)^T (X^{-1})^T C + C_s' - C X^{-1} X_s' \right] X^{-1} =$$
$$= (X^{-1})^T (-A^T C + C_s' - CA) X^{-1}.$$

Аналогичным образом устанавливается, что $W_t' = ((X^T)^{-1} C X^{-1})_t' = 0$.
Следовательно, $(X^T)^{-1} C X^{-1} = (h_{ij})_{i,j=1}^4 h \in GL(4,C)$, в частности,

$$X^T h X = C. \tag{5}$$

Из разложения Такаги для невырожденной симметричной матрицы h (см, например [3] гл 4, § 4.4) имеем, что $h = U^T D U$,

https://uzjournals.edu.uz/fdu/vol2/iss3/1
DOI: 512.745

где U -унитарная матрица, $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_4)$ есть диагональная матрица с элементами $\lambda_j > 0$ по главной диагонали, $j = 1, \dots, 4$.

Взяв $D_3 = diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3}, i\sqrt{\lambda_4})$, где $i^2 = -1$ и положив $g = D_3U \in GL(4, C)$, получим, что $D = D_3^T J D_3$ и $h = U^T D_3^T J D_3 U = g^T J g$. Таким образом, для $Y = gX$ с учетом (4) имеем, что $Y^T J Y = X^T g^T J g X = X^T h X = C$.

Отсюда и из (3) следует, что Y есть невырожденное решение системы

$$\begin{cases} X_s' = XA \\ X_t' = XB \\ X^T J X = C \end{cases} \tag{6}$$

Если $X(s,t)$- невырожденное решение системы (4), $g \in O(3,1)$ и $Y(s,t) = gX(s,t)$, то $Y_s'(s,t) = gX_s'(s,t) = gX(s,t)A(s,t) = Y(s,t)A(s,t)$ и $Y_t'(s,t) = gX_t'(s,t) = gX(s,t)B(s,t) = Y(s,t)B(s,t)$, при этом

$$Y^T(s,t)JY(s,t) = X^T(s,t)g^T J g X(s,t) = X^T(s,t)JX(s,t) = C(s,t).$$

Это означает, что $Y(s,t)$ также есть невырожденное решение системы (6). Таким образом, для системы (5) существует единственное с точностью до $O(3,1)$- эквивалентности невырожденное решение $X(s,t) = (x_{ij}(s,t))_{i,j=1}^4$. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда

(*i*). Для любого невырожденного решения $X(s,t) = (x_{ij}(s,t))_{i,j=1}^4$ системы уравнений (2) существует регулярная поверхность $\vec{x}(s,t) = (x_j(s,t))_{j=1}^4$, $s,t \in (0,1)$, для которой $M_s(\vec{x}(s,t)) = X(s,t)$при всех $s,t \in (0,1)$;

(*ii*). Существует единственная с точностью до $O(3,1)$- эквивалентности регулярная поверхность $\vec{x}(s,t)$, для которой матрица $M_s(\vec{x}(s,t))$ есть решение системы (2).

Доказательство. (*i*) Если $X = (x_{ij}(s,t))_{i,j=1}^4$ есть невырожденное решение системы (2), то в силу равенств (4) имеем, что $\frac{\partial \ x_{ji}}{\partial s}(s,t) = x_{j(i+1)}(s,t)$т.е. $x_{ij}(s,t) = \frac{\partial \ x_{j1}}{\partial s^{i-1}}(s,t)$ для всех $j = 1, \dots, 4$, $i = 1, \dots, 4$. Следовательно, для регулярной поверхности $\vec{x}(s,t) = \{x_{j1}(s,t)\}_{j=1}^4$ верно равенство $M_s(\vec{x}(s,t)) = X(s,t)$ для всех $s,t \in (0,1)$.

(*ii*). Пусть $\vec{x}(s,t)$ и $\vec{y}(s,t)$ две регулярные поверхности, для которых матрицы $M_s(\vec{x}(s,t))$ и $M_s(\vec{y}(s,t))$ является решениями системы (2).

Согласно теореме 2, существует такое $g \in O(3,1)$ что $M_s(\vec{y}(s,t)) = gM_s(\vec{x}(s,t))$ в частности, $\vec{y}(s,t) = g\vec{x}(s,t)$ для всех $s,t \in (0,1)$. Это означает, что поверхности $\vec{x}(s,t)$ и $\vec{y}(s,t)$ являются $O(3,1)$ - эквивалентными.

Замечание. Варианты теорем 2 и 3 для C^∞ - дифференцируемых путей получены раннее в монографии [1, гл. 4., § 4.3].

Литература:

1.. Муминов К, Чилин В Эквивалентность кривых в конечномерных пространствах. Lap. LAMBERT Academic Publishing. Deutschland. 2015.

2. Винберг Э.Б. Компактные группы Ли. –М.: МГУ, –1967.

3. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. –М.: Мир, –1989.

4. Муминов К.К. Эквивалентность поверхностей в комплексных векторных пространствах относительно Sp(2,C) групп. УзМЖ. -1997. -№2. -С. 53-57.

5. Муминов К.К. Эквивалентность путей и поверхностей для действия псевдоортогональной группы. УзМЖ. -2005. -№2. -с. 35-43.

6. Бекбаев У.Д. Муминов К.К. Об эквивалентности и инвариантах элементарных поверхностей относительно симплектической группы. -УзМЖ. -1997. -№4. –С. 26-30.

7. Muminov K.K., Bekboev U.D. On differential rational invariants of classical movements groups of vector spaces. Methods of Functional Analysis and Topology, (MFAT). Ukraine, Kiev. -2004. -Vol.10.-№3.-P.7-10.

8. Muminov K.K. Equivalence of multidimensional surfaces with to the acting of classical groups. Uzbek. Math. J.-2010. -№1. -P. 99-107.