

2-10-2020

QUALITATIVE PROPERTIES OF THE NONLINEAR SYSTEM OF THE EQUATIONS OF REACTION-DIFFUSION BASED ON THE AUTOMODELINE ANALYSIS OF SOLUTIONS

D. K. Muhamediyeva

Scientific-innovative center of information and communication technologies at the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khorazmiy, author@ferpi.uz

Follow this and additional works at: <https://uzjournals.edu.uz/ferpi>

Recommended Citation

Muhamediyeva, D. K. (2020) "QUALITATIVE PROPERTIES OF THE NONLINEAR SYSTEM OF THE EQUATIONS OF REACTION-DIFFUSION BASED ON THE AUTOMODELINE ANALYSIS OF SOLUTIONS," *Scientific-technical journal*: Vol. 24 : Iss. 2 , Article 5.
Available at: <https://uzjournals.edu.uz/ferpi/vol24/iss2/5>

This Article is brought to you for free and open access by 2030 Uzbekistan Research Online. It has been accepted for inclusion in Scientific-technical journal by an authorized editor of 2030 Uzbekistan Research Online. For more information, please contact sh.erkinov@edu.uz.

FUNDAMENTAL SCIENCES

УДК: 577.3.01; 577.38

QUALITATIVE PROPERTIES OF THE NONLINEAR SYSTEM OF THE EQUATIONS OF REACTION-DIFFUSION BASED ON THE AUTOMODELINE ANALYSIS OF SOLUTIONS

Muhamediyeva D.K.

Scientific-innovative center of information and communication technologies at the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khorazmiy

КАЧЕСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ РЕАКЦИИ-ДИФФУЗИИ НА ОСНОВЕ АВТОМОДЕЛЬНОГО АНАЛИЗА РЕШЕНИЙ

Мухамедиева Д.К.

Научно-инновационный центр информационно-коммуникационных технологий при Ташкентском университете информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий

ЕЧИМЛАРНИНГ АВТОМОДЕЛ ТАҲЛИЛИ АСОСИДА РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ НОЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР ТИЗИМИНИНГ СИФАТ ХОССАЛАРИ

Мухамедиева Д.К.

Мухаммада ал-Хоразмий номидаги Тошкент Ахборот технологиялари Университети ҳузурдаги Ахборот-коммуникация технологиялари илмий-инновацион маркази

Abstract. Based on the self-similar analysis of solutions, the properties of solutions of the nonlinear system of reaction-diffusion equations for one problem of a biological population of the Kolmogorov-Fisher type are investigated. Suitable initial approximations are proposed for a rapidly converging iterative process.

Keywords: cross-diffusion, biological population, parabolic system of quasilinear equations, convective transfer, numerical solution, iterative process, self-similar solutions.

Аннотация. На основе автомодельного анализа решений исследованы свойства решений нелинейной системы уравнений реакции-диффузии одной задачи биологической популяции типа Колмогорова-Фишера. Предложены подходящие начальные приближения для быстро сводимого итерационного процесса.

Ключевые слова: кросс-диффузия, биологическая популяция, параболическая система квазилинейных уравнений, конвективный перенос, численное решение, итерационный процесс, автомодельные решения.

Аннотация. Ечимларнинг автомодел таҳлили асосида Колмогоров-Фишер туридаги биологик популяция реакция-диффузия ночизикли тенгламалар тизимининг сифат хоссалари тадқиқ қилинган. Тез яқинлашувчи итерацион жараён учун мос бошланғич яқинлашишлар таклиф этилган.

Таянч сўзлар: кросс-диффузия, биологик популяция, квазичизикли тенгламалар тизими, конвектив кўчиш, сонли ечим, итерацион жараён, автомодел ечим.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в области $Q = \{(t, x): 0 < t < \infty, x \in \mathbb{R}^2\}$ параболическую систему двух квазилинейных уравнений реакции-диффузии задачи биологической популяции типа которое описывает процесс биологической популяции в нелинейной двухкомпонентной среде, коэффициент диффузии которого равен $D_1 u_1^{\sigma_1}$ и $D_2 u_2^{\sigma_2}$, $\sigma_1, \sigma_2, \beta_1, \beta_2$ - положительные вещественные числа, $u_1 = u_1(t, x) \geq 0$, $u_2 = u_2(t, x) \geq 0$ - искомые решения.

FUNDAMENTAL SCIENCES

$$\text{Колмогорова-Фишера} \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_1 u_1^{\sigma_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + k_1(t) u_1 \cdot (1 - u_2^{\beta_1}), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_2 u_2^{\sigma_2} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) - k_2(t) u_2 \cdot (1 - u_1^{\beta_2}), \end{cases} \quad (1)$$

$$u_1|_{t=0} = u_{10}(x), \quad u_2|_{t=0} = u_{20}(x), \quad (2)$$

Задача Коши и краевые задачи для системы (1) в одномерном и многомерном случаях исследованы многими авторами [1-7].

Целью данной работы является исследование качественных свойств решения задачи (1), (2) на основе автомодельного анализа и его численные решения с применением методов современных компьютерных технологий, исследование способов линеаризации к сходимости итерационного процесса с дальнейшей визуализацией. Найдены оценки решений и возникающий при этом свободной границы, что дает возможность выбрать подходящие начальные приближения [3] для каждого значения числовых параметров.

Займемся построением автомодельной системы уравнений для (1)-(2) – более простого для исследований системы уравнений.

2. Построение автомодельных уравнений системы

Автомодельную систему уравнений построим методом нелинейного расщепления [3].

Замена в (1)

$$u_1(t, x) = e^{k_1 t} v_1(t, x),$$

$$u_2(t, x) = e^{k_2 t} v_2(t, x)$$

приведёт (1) к виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_1 v_1^{\sigma_1} \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - k_1 e^{((\beta_1 k_2 + k_1) - (\sigma_1 + 1)k_1)t} v_1 v_2^{\beta_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_2 v_2^{\sigma_2} \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) - k_2 e^{((\beta_2 k_1 + k_2) - (\sigma_2 + 1)k_2)t} v_1^{\beta_2} v_2 \end{cases} \quad (3)$$

$$v_1|_{\tau=0} = v_{10}(x), \quad v_2|_{\tau=0} = v_{20}(x),$$

Выбирая $\sigma_1 k_1 = \sigma_2 k_2$, получим следующую систему уравнений,

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_1 v_1^{\sigma_1} \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - a_1 \tau^{b_1} v_1 v_2^{\beta_1}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_2 v_2^{\sigma_2} \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) - a_2 \tau^{b_2} v_1^{\beta_2} v_2, \end{cases} \quad (4)$$

где $a_1 = (\delta_1 k_1)^{b_1}$, $a_2 = (\delta_2 k_2)^{b_2}$,

$b_1 = [(\beta_1 k_2 + k_1) - (\sigma_1 + 1)k_1] / \sigma_1 k_1$, $b_2 = [(\beta_2 k_1 + k_2) - (\sigma_2 + 1)k_2] / \sigma_2 k_2$.

Если $b_i = 0$, $i = 1, 2$, т.е. $\beta_1 k_2 + k_1 = (\sigma_1 + 1)k_1$ и $\beta_2 k_1 + k_2 = (\sigma_2 + 1)k_2$, то система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_1 v_1^{\sigma_1} \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - a_1 v_1 v_2^{\beta_1}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_2 v_2^{\sigma_2} \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) - a_2 v_1^{\beta_2} v_2. \end{cases}$$

FUNDAMENTAL SCIENCES

Ниже мы опишем один из способов получения автомодельной системы для системы уравнений (4). Он состоит в следующем. Найдём сначала решение обыкновенной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\bar{v}_1}{d\tau} = -a_1 \bar{v}_1 \bar{v}_2^{\beta_1} \\ \frac{d\bar{v}_2}{d\tau} = -a_2 v_1^{\beta_2} v_2 \end{cases}$$

вида

$$\bar{v}_1(\tau) = c_1(\tau + T_0)^{-\gamma_1}, \quad \bar{v}_2(\tau) = c_2(\tau + T_0)^{-\gamma_2}, \quad T_0 > 0,$$

где $c_1 = 1, \gamma_1 = \frac{1}{\beta_1}, c_2 = 1, \gamma_2 = \frac{1}{\beta_2}$.

А затем решение системы (3)-(4) ищется в виде

$$v_1(t, x) = \bar{v}_1(t)w_1(\tau, x), \quad v_2(t, x) = \bar{v}_2(t)w_2(\tau, x),$$

где $\tau = \tau(t)$ выбирается так

$$\tau_1(\tau) = \int_0^\tau \bar{v}_1^{\sigma_1}(t)dt = \begin{cases} \frac{1}{1-\gamma_1\sigma_1} (T + \tau)^{1-\gamma_1\sigma_1}, & \text{если } 1-\gamma_1\sigma_1 \neq 0, \\ \ln(T + \tau), & \text{если } 1-\gamma_1\sigma_1 = 0. \end{cases}$$

Тогда для $w_i(\tau, x), i = 1, 2$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} (D_1 w_1^{\sigma_1} \frac{\partial w_1}{\partial x}) + \psi_1(w_1 w_2^{\beta_1} - w_1) \\ \frac{\partial w_2}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} (D_2 w_2^{\sigma_2} \frac{\partial w_2}{\partial x}) + \psi_2(w_2 w_1^{\beta_2} - w_2) \end{cases}, \tag{5}$$

где

$$\psi_i = \begin{cases} \frac{\gamma_i}{(1-\gamma_i\sigma_i)\tau}, & \text{если } 1-\gamma_i\sigma_i > 0, \\ \gamma_i c_i^{-\sigma_i}, & \text{если } 1-\gamma_i\sigma_i = 0. \end{cases}$$

При $\tau \rightarrow \infty, \psi_i \rightarrow 0$ и $\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial \tau} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (D_1 w_1^{\sigma_1} \frac{\partial w_1}{\partial x}), \\ \frac{\partial w_2}{\partial \tau} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (D_2 w_2^{\sigma_2} \frac{\partial w_2}{\partial x}). \end{cases}$

Пусть $\gamma_1\sigma_1 > 0, \gamma_1\sigma_1 = \gamma_2\sigma_2, \sigma_2(b_2 + 1) + \beta_2(b_1 + 1) = \sigma_1(b_1 + 1) + \beta_1(b_2 + 1) c_i > 0$. Волновые решения уравнения (5) имеет вид

$$w_i(\tau(t), x) = y_i(\xi), \quad \xi = \pm c\tau_1(t) + x, \quad i = 1, 2$$

и учитывая, что уравнение для $w_i(\tau, x)$ без младших членов всегда автомодельно, получим систему

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} (y_1^{\sigma_1} \frac{dy_1}{d\xi}) + c \frac{dy_1}{d\xi} + \psi_1(y_1 y_2^{\beta_1} - y_1) = 0, \\ \frac{d}{d\xi} (y_2^{\sigma_2} \frac{dy_2}{d\xi}) + c \frac{dy_2}{d\xi} + \psi_2(y_2 y_1^{\beta_2} - y_2) = 0. \end{cases}$$

FUNDAMENTAL SCIENCES

Отсюда мы имеем $y_1 \rightarrow (c\sigma_1)_+^{\frac{1}{\sigma_1}}$ при $\xi \rightarrow \frac{a_1}{c\sigma_1}$ и $y_2 \rightarrow (c\sigma_2)_+^{\frac{1}{\sigma_2}}$ при $\xi \rightarrow \frac{a_2}{c\sigma_2}$ скорость волнового решения, если скорость движения среды ограниченная при $t > 0$. Здесь использовано обозначение $(a)_+ = \max(0, a)$

3. Система квазилинейных уравнений реакции-диффузии с двойной нелинейной кросс-диффузией.

Рассмотрим в области $Q = \{(t, x) : 0 < t, x \in \mathbb{R}\}$ параболическую систему двух квазилинейных уравнений реакции-диффузии с двойной нелинейной кросс-диффузией

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_1 u_2^{m_1-1} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + l(t) \frac{\partial u_1}{\partial x} + k_1(t) u_1 (1 - u_2^{\beta_1}) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_2 u_1^{m_2-1} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|^{p-2} \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + l(t) \frac{\partial u_2}{\partial x} + k_2(t) u_2 (1 - u_1^{\beta_2}) \end{cases} \quad (3)$$

$$u_1|_{t=0} = u_{10}(x), \quad u_2|_{t=0} = u_{20}(x),$$

которое описывает процесс биологической популяции типа Колмогорова-Фишера в нелинейной двухкомпонентной среде, коэффициенты диффузии которых равны $D_1 u_2^{m_1-1} \left| \frac{\partial u_2}{\partial x} \right|^{p-2}$, $D_2 u_1^{m_2-1} \left| \frac{\partial u_1}{\partial x} \right|^{p-2}$ и конвективным переносом со скоростью $l(t)$, где $m_1, m_2, p, \beta_1, \beta_2$ - положительные вещественные числа, $u_1 = u_1(t, x) \geq 0$, $u_2 = u_2(t, x) \geq 0$ - искомые решения.

Ниже исследуем качественные свойства рассматриваемой задачи путем построением автомодельной системы уравнений для (3).

Автомодельную систему уравнений построим методом нелинейного расщепления [1].

Замена в (3)

$$\begin{aligned} u_1(t, x) &= e^{-\int_0^t k_1(\zeta) d\zeta} v_1(\tau(t), \eta), \quad \eta = x - \int_0^t l(\zeta) d\zeta, \\ u_2(t, x) &= e^{-\int_0^t k_2(\zeta) d\zeta} v_2(\tau(t), \eta), \quad \eta = x - \int_0^t l(\zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

приведёт (3) к виду:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D_1 v_2^{m_1-1} \left| \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right|^{p-2} \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right) - k_1(t) e^{[(\beta_1 - m_1 - p + 3)k_2]t} v_1 v_2^{\beta_1}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D_2 v_1^{m_2-1} \left| \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right|^{p-2} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right) - k_2(t) e^{[(\beta_2 - m_2 - p + 3)k_1]t} v_1^{\beta_2} v_2, \end{cases} \quad (4)$$

$$v_1|_{t=0} = v_{10}(\eta), \quad v_2|_{t=0} = v_{20}(\eta).$$

Выбирая $\tau(t) = \frac{e^{(m_1 + p - 3)k_2 t}}{(m_1 + p - 3)k_2} = \frac{e^{[(m_2 + p - 3)k_1]t}}{(m_2 + p - 3)k_1}$, получим следующую систему уравнений:

FUNDAMENTAL SCIENCES

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D_1 v_2^{m_1-1} \left| \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right|^{p-2} \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right) - a_1(t) \tau^{b_1} v_1 v_2^{\beta_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D_2 v_1^{m_2-1} \left| \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right|^{p-2} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right) - a_2(t) \tau^{b_2} v_1^{\beta_2} v_2 \end{cases} \quad (5)$$

где $a_1 = k_1 ((m_1 + p - 3)k_2)^{b_1}$, $b_1 = \frac{(\beta_1 - m_1 - p + 3)}{(m_1 + p - 3)}$,
 $a_2 = k_2 ((m_2 + p - 3)k_1)^{b_2}$, $b_2 = \frac{(\beta_2 - m_2 - p + 3)}{(m_2 + p - 3)}$.

Если $b_i = 0$, и $a_i(t) = const, i = 1, 2$, то система имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_1}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D_1 v_2^{m_1-1} \left| \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right|^{p-2} \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \right) - a_1 v_1 v_2^{\beta_1}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D_2 v_1^{m_2-1} \left| \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right|^{p-2} \frac{\partial v_1}{\partial \eta} \right) - a_2 v_1^{\beta_2} v_2. \end{cases}$$

С целью получения автомодельной системы для системы уравнений (5) найдём сначала решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\bar{v}_1}{d\tau} = -a_1 \bar{v}_1 \bar{v}_2^{\beta_1}, \\ \frac{d\bar{v}_2}{d\tau} = -a_2 \bar{v}_1^{\beta_2} \bar{v}_2, \end{cases}$$

вида

$$\bar{v}_1(\tau) = c_1(\tau + T_0)^{-\gamma_1}, \quad \bar{v}_2(\tau) = c_2(\tau + T_0)^{-\gamma_2}, \quad T_0 > 0,$$

где

$$c_1 = 1, \quad \gamma_1 = \frac{1}{\beta_2}, \quad c_2 = 1, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\beta_1}.$$

А затем решение системы (5) ищется в виде

$$\begin{cases} v_1(t, \eta) = \bar{v}_1(t) w_1(\tau, \eta), \\ v_2(t, \eta) = \bar{v}_2(t) w_2(\tau, \eta), \end{cases} \quad (6)$$

а $\tau = \tau(t)$ выбирается так

$$\tau_1(\tau) = \int_0^\tau \bar{v}_2^{(p-2)}(t) \bar{v}_2^{(m_1-1)}(t) dt = \begin{cases} \frac{1}{1 - [\gamma_2(m_1 + p - 3)]} (T + \tau)^{1 - [\gamma_2(m_1 + p - 3)]}, & \text{если } 1 - [\gamma_2(m_1 + p - 3)] \neq 0, \\ \ln(T + \tau), & \text{если } 1 - [\gamma_2(m_1 + p - 3)] = 0, \\ (T + \tau), & \text{если } m_1 + p = 3, \end{cases}$$

если $\gamma_2(m_1 + p - 3) = \gamma_1(m_2 + p - 3)$.

Тогда для $w_i(\tau, x), i = 1, 2$ получим систему уравнений

FUNDAMENTAL SCIENCES

$$\begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D_1 w_2^{m_1-1} \left| \frac{\partial w_2}{\partial \eta} \right|^{p-2} \frac{\partial w_2}{\partial \eta} \right) + \psi_1 (w_1 w_2^{\beta_1} - w_1) \\ \frac{\partial w_2}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D_2 w_1^{m_2-1} \left| \frac{\partial w_1}{\partial \eta} \right|^{p-2} \frac{\partial w_1}{\partial \eta} \right) + \psi_2 (w_2 w_1^{\beta_2} - w_2) \end{cases}, \quad (7)$$

где

$$\psi_1 = \begin{cases} \frac{1}{(1 - [\gamma_2(m_1 + p - 3)])\tau}, & \text{если } 1 - [\gamma_2(m_1 + p - 3)] > 0, \\ \gamma_1 c_1^{-\gamma_2(m_1 + p - 3)}, & \text{если } 1 - [\gamma_2(m_1 + p - 3)] = 0. \end{cases} \quad (8)$$

$$\psi_2 = \begin{cases} \frac{1}{(1 - [\gamma_1(m_2 + p - 3)])\tau}, & \text{если } 1 - [\gamma_1(m_2 + p - 3)] > 0, \\ \gamma_1 c_1^{-\gamma_1(m_2 + p - 3)}, & \text{если } 1 - [\gamma_1(m_2 + p - 3)] = 0. \end{cases}$$

Представление системы (2) в виде (7) позволяет предполагать что, при $\tau \rightarrow \infty$ и $\psi_i \rightarrow 0$ решение последней системы асимптотически на фронте может стремиться к решению системы

$$\tau \rightarrow \infty, \psi_i \rightarrow 0 \text{ и } \begin{cases} \frac{\partial w_1}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D_1 w_2^{m_1-1} \left| \frac{\partial w_2}{\partial \eta} \right|^{p-2} \frac{\partial w_2}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial w_2}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left(D_2 w_1^{m_2-1} \left| \frac{\partial w_1}{\partial \eta} \right|^{p-2} \frac{\partial w_1}{\partial \eta} \right). \end{cases} \quad (9)$$

Это обстоятельство используется для нахождения начального приближения для построения итерационного процесса. Если $1 - [\gamma_i(m_i + p - 3)] \neq 0$, волновое решение системы (7) имеет вид

$$w_i(\tau(t), \eta) = f_i(\xi), \quad \xi = c\tau \pm \eta, \quad i = 1, 2,$$

где c – скорость волны, а функции $w_i(\tau(t), \eta) = f_i(\xi)$ находятся из системы автомодельных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} (f_2^{m_1-1} \left| \frac{df_2}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df_2}{d\xi}) + c \frac{df_1}{d\xi} + \mu_1 (f_1 - f_1 f_2^{\beta_1}) = 0, \\ \frac{d}{d\xi} (f_1^{m_2-1} \left| \frac{df_1}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df_1}{d\xi}) + c \frac{df_2}{d\xi} + \mu_2 (f_2 - f_2 f_1^{\beta_2}) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

$$\mu_i = \frac{1}{1 - [\gamma_{3-i}(m_i + p - 3)]},$$

которая имеет локализованное решение

$$\begin{aligned} \bar{f}_1 &= A(a - \xi)_+^{n_1}, \quad \bar{f}_2 = B(a - \xi)_+^{n_2}, \\ n_1 &= \frac{(p-1)(1 - (m_1 + p))}{1 - (2 - (m_1 + p))(2 - (m_2 + p))}, \\ n_2 &= \frac{(p-1)(1 - (m_2 + p))}{1 - (2 - (m_1 + p))(2 - (m_2 + p))}, \end{aligned}$$

FUNDAMENTAL SCIENCES

$$n = 1 - (2 - (m_1 + p))(2 - (m_2 + p)).$$

Коэффициенты А и В находятся из системы алгебраических уравнений

$$(n_2)^{p-1} A^{-1} B^{m_1+p-2} = c,$$

$$(n_1)^{p-1} A^{m_2+p-2} B^{-1} = c,$$

Тогда с учетом выражения

$$u_1(t, x) = e^{-\int_0^t k_1(\zeta) d\zeta} v_1(\tau(t), \eta),$$

$$u_2(t, x) = e^{-\int_0^t k_2(\zeta) d\zeta} v_2(\tau(t), \eta)$$

имеем

$$u_1(t, x) = A e^{-\int_0^t k_1(\zeta) d\zeta} (c\tau(t) - \xi)_+^{n_1},$$

$$u_2(t, x) = B e^{-\int_0^t k_2(\zeta) d\zeta} (c\tau(t) - \xi)_+^{n_2}, \quad c > 0.$$

$$u_2(t, x) = B e^{-\int_0^t k_2(\zeta) d\zeta} (c\tau(t) - \xi)_+^{n_2}, \quad c > 0.$$

В силу того, что

$$[b\tau(t) - \int_0^t l(\eta) d\eta - x] = 0,$$

если

$$x \geq [b\tau(t) - \int_0^t l(\eta) d\eta - x] < 0, \quad \forall t > 0,$$

то

$$u_1(t, x) \equiv 0, \quad u_2(t, x) \equiv 0, \quad x \geq [b\tau(t) - \int_0^t l(\eta) d\eta - x] < 0, \quad \forall t > 0.$$

Поэтому условием локализации решений системы (3) есть условия

$$\int_0^e l(y) dy < 0, \quad \tau(t) < \infty \text{ для } \forall t > 0. \tag{11}$$

Условие (11) есть условие появления нового эффекта – локализации волновых решений (11). Если же условие (11) невыполнено, то имеет место явление конечной скорости распространения возмущения, т.е.

$$u_i(t, x) \equiv 0 \text{ при } |x| \geq b(t), \quad \tau(t) = \int_0^t e^{-(m_1+p-3)\int_0^\zeta k_1(y) dy} d\zeta, \text{ причем фронт уходит сколь угодно далеко, при}$$

возрастании времени, так как $\tau(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

4. Медленная диффузия

Случай $n_1 > 0, n_2 > 0, n > 0$ (медленная диффузия). Применяя метод [1] для решения уравнения (11) получим следующие функции

$$\bar{\theta}_1(\xi) = (a - \xi)_+^{n_1}, \quad \bar{\theta}_2(\xi) = (a - \xi)_+^{n_2},$$

где $a > 0, (y)_+ = \max(y, 0), \xi < a$. Известно [1, 2], что для глобального существования решения задачи (3) функция $f(\xi)$ должна удовлетворят следующее неравенству:

FUNDAMENTAL SCIENCES

$$\begin{cases} \frac{d}{d\xi} (f_2^{m_1-1} \left| \frac{df_2}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df_2}{d\xi}) + c \frac{df_1}{d\xi} + \mu_1 (f_1 - f_1 f_2^{\beta_1}) \leq 0, \\ \frac{d}{d\xi} (f_1^{m_2-1} \left| \frac{df_1}{d\xi} \right|^{p-2} \frac{df_1}{d\xi}) + c \frac{df_2}{d\xi} + \mu_2 (f_2 - f_2 f_1^{\beta_2}) \leq 0. \end{cases}$$

а

Возьмем функции $\bar{\theta}_1(\xi), \bar{\theta}_2(\xi)$, и покажем, что они будут асимптотикой финитных решений системы (10).

Теорема 1. Финитное решение системы (10) при $\xi \rightarrow a_-$ имеет асимптотику $f_i(\xi) \sim \bar{\theta}_i(\xi)$.

Доказательство. Будем искать решение уравнения (10) в следующем виде

$$f_i = \bar{\theta}_i(\xi) y_i(\eta), \quad i = 1, 2, \tag{12}$$

где $\eta = -\ln(a - \xi)$, причем $\eta \rightarrow +\infty$ при $\xi \rightarrow a_-$, что позволяет исследовать асимптотическую устойчивость решения задачи (10) при $\eta \rightarrow +\infty$. Подставляя (12) в (10) для $y_i(\eta)$ получим следующее уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\eta} \left(y_{3-i}^{m_i-1} \left| \frac{dy_{3-i}}{d\eta} - n_{3-i} y_{3-i} \right|^{p-2} \left(\frac{dy_{3-i}}{d\eta} - n_{3-i} y_{3-i} \right) \right) + \\ & \left(\frac{e^{-\eta}}{a - e^{-\eta}} - n_i \right) \left(y_{3-i}^{m_i-1} \left| \frac{dy_{3-i}}{d\eta} - n_{3-i} y_{3-i} \right|^{p-2} \left(\frac{dy_i}{d\eta} - n_{3-i} y_{3-i} \right) \right) + \\ & + c \left(\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i \right) - \mu_i \frac{e^{-\eta}}{a - e^{-\eta}} y_i(\eta) (1 + e^{-n_{3-i} \beta_i \eta} y_{3-i}^{\beta_i}) = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

где η определенная выше функция.

Отметим, что изучение решения последнего уравнения является равносильно изучению тех решений уравнения (10), каждое из которых в некотором промежутке $[\eta_0, +\infty)$ удовлетворяет неравенству:

$$y_i(\eta) > 0, \quad \frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i \neq 0.$$

Покажем, прежде всего, что решения $y_i(\eta)$ уравнения (13) имеют конечный предел y_{0i} при $\eta \rightarrow +\infty$. Введем обозначения

$$\omega_i(\eta) = y_{3-i}^{m_i-1} \left| \frac{dy_{3-i}}{d\eta} - n_{3-i} y_{3-i} \right|^{p-2} \left(\frac{dy_{3-i}}{d\eta} - n_{3-i} y_{3-i} \right).$$

Тогда уравнение (13) имеет вид:

$$\omega'_i = - \left(\frac{e^{-\eta}}{a - e^{-\eta}} - n_i \right) \omega_i - c \left(\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i \right) - \mu_i \frac{e^{-\eta}}{a - e^{-\eta}} y_i(\eta) (1 + e^{-n_i \beta_i \eta} y_{3-i}^{\beta_i}).$$

Для анализа последнего выражения введем новую вспомогательную функцию

FUNDAMENTAL SCIENCES

$$\phi(\tau, \eta) = - \left(\frac{e^{-\eta}}{a - e^{-\eta}} - n_i \right) \tau - c \left(\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i \right) - \mu_i \frac{e^{-\eta}}{a - e^{-\eta}} y_i(\eta) (1 + e^{-n_i \beta_i \eta} y_{3-i}^{\beta_i}),$$

где τ - вещественное число. Отсюда нетрудно видеть, что при каждом значении τ функция $\phi(\tau, \eta)$ сохраняет знак на некотором промежутке $[\eta_1, +\infty) \subset [\eta_0, +\infty)$ и при всех $\eta \in [\eta_1, +\infty)$ выполняется одно из неравенств

$$\omega'_i(\eta) > 0, \omega'_i(\eta) < 0.$$

И поэтому для функции $\omega_i(\eta)$ существует предел при $\eta \in [\eta_1, +\infty)$. Из выражения для $\omega_i(\eta)$ следует, что

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \omega'_i(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left\{ - \left(\frac{e^{-\eta}}{a - e^{-\eta}} - n_i \right) \omega_i - c \left(\frac{dy_i}{d\eta} - n_i y_i \right) - \mu_i \frac{e^{-\eta}}{a - e^{-\eta}} y_i(\eta) (1 + e^{-n_i \beta_i \eta} y_{3-i}^{\beta_i}) \right\} = 0$$

Отсюда, учитывая, что

$$\xi \rightarrow a \lim_{\eta \rightarrow +\infty} e^{-\eta} \rightarrow 0, \lim_{\eta \rightarrow +\infty} a - e^{-\eta} \rightarrow a, \omega'_i = 0$$

получим следующие алгебраические уравнения:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \beta_i > 1, i = 1, 2 \\ & (n_2)^{p-1} y_2^{m_1+p-3} = c, \\ & (n_1)^{p-1} y_1^{m_2+p-3} = c. \end{aligned}$$

Вычисление последнего уравнения дает $y_i = 1$ и в силу (12) $f(\xi) \sim g(\xi)$.

2) $\beta_i = 1/n_i, i = 1, 2$, y_i должно быть решением системы

$$\begin{aligned} & (n_2)^{p-1} y_2^{m_1+p-3} + y_1^{n_1} y_2^{n_1(\beta_1-1)} = c, \\ & (n_1)^{p-1} y_1^{m_2+p-3} + y_1^{n_2(\beta_2-1)} y_2^{n_2} = c. \end{aligned}$$

Вычисление уравнения дает $y_i = 1$ и в силу (10) $f(\xi) \sim g(\xi)$.

Теорема 1 доказана.

4. Быстрая диффузия

Случай $n_1 > 0, n_2 > 0, n < 0$ (быстрая диффузия). Для (10) имеем

$$\chi_1(\xi) = (a + \xi)^{n_1}, \chi_2(\xi) = (a + \xi)^{n_2},$$

где $a > 0$.

Теорема 2. При $\xi \rightarrow +\infty$ исчезающие на бесконечности решение задачи (8) имеет асимптотику $f_i(\xi) \sim \chi_i(\xi), i = 1, 2$.

Заключение. Исследование качественных свойств системы позволило, выполнить численный эксперимент в зависимости от значений, входящих в систему числовых параметров. Для этой цели как начальное приближение использовались построенные асимптотические решения. При численном решении задачи для линеаризации системы использовались линеаризации по методам Ньютона и Пикара. Для решения задачи биологической популяции предложен метод нелинейного расщепления.

References:

[1]. Mari Dj. Nelineynie diffuzionnie uravneniya v biologii. M., Mir, 1983, 397 str.

FUNDAMENTAL SCIENCES

- [2]. Kolmogorov A. N., Petrovskiy I. G., Piskunov N.S. Issledovanie uravneniya diffuzii, soedinennoy s vozrastaniem kolichestva veshchestva i yego primenenie k odnoy biologicheskoy probleme. Byulleten' MGU, ser. Matematika i mexanika, t. 1, 1-25
- [3]. Aripov M. Metod etalonnix uravneniy dlya resheniya nelineynix kraevix zadach Tashkent, Fan, 1988, 137 s.
- [4]. Belotelov N.V., Lobanov A.I. Populyatsionnie modeli s nelineynoy diffuziyey. // Matematicheskoe modelirovanie. – M.; 1997, №12, str. 43-56.
- [5]. V. Volterra. Matematicheskaya teoriya borbi za sushestvovanie -M.: Nauka, 1976, 288 s.
- [6]. Gauze G.F. O protsessax unichtojeniya odnogo vida drugim v populyatsiyax infuzoriy // Zoologicheskij jurnal, 1934, t.13, №1.
- [7]. Aripov M., Muhammadiev J. Asymptotic behaviour of automodel solutions for one system of quasilinear equations of parabolic type. Buletin Stiintific-Universitatea din Pitesti, Seria Matematica si Informatica. N 3. 1999. pg. 19-40
- [8]. Muxamediyeva D.K. Properties of self similar solutions of reaction-diffusion systems of quasilinear equations // International Journal of Mechanical and production engineering research and development (IJMPERD) ISSN(P): 2249-6890; ISSN(E): 2249-8001 Vol. 8, Issue 2, USA. 2018, 555-565 pp. Impact Factor (JCC): 6.8765.
- [9]. Muhamediyeva D.K. Solving of the Task of Kolmogorov-Fisher Type Biological Population in the Regime with Aggravation // International Journal of Applied Engineering Research ISSN 0973-4562 Volume 13, Number 6 (2018) pp. 4291-4298.
- [10]. Muxamediyeva D.K. Chislennoe reshenie sistemi uravneniy reaktsii-diffuzii s dvoynoy nelineynostyu // FarPI ilmiy-texnika jurnali. –Farg'ona.2018. №3, 127-131 betlar.

Литература

- [1]. Мари Дж. Нелинейные диффузионные уравнения в биологии. М., Мир, 1983, 397 стр.
- [2]. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов Н.С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме. Бюллетень МГУ, сер. Математика и механика, т. 1, 1-25
- [3]. Арипов М. Метод эталонных уравнений для решения нелинейных краевых задач Ташкент, Фан, 1988, 137 с.
- [4]. Белотелов Н.В., Лобанов А.И. Популяционные модели с нелинейной диффузией. // Математическое моделирование. –М.; 1997, №12, стр. 43-56.
- [5]. В. Вольтерра. Математическая теория борьбы за существование -М.: Наука, 1976, 288 с.
- [6]. Гаузе Г.Ф. О процессах уничтожения одного вида другим в популяциях инфузориий // Зоологический журнал, 1934, т.13, №1.
- [7]. Арипов М., Muhammadiev J. Asymptotic behaviour of automodel solutions for one system of quasilinear equations of parabolic type. Buletin Stiintific-Universitatea din Pitesti, Seria Matematica si Informatica. N 3. 1999. pg. 19-40
- [8]. Muxamediyeva D.K. Properties of self similar solutions of reaction-diffusion systems of quasilinear equations // International Journal of Mechanical and production engineering research and development (IJMPERD) ISSN(P): 2249-6890; ISSN(E): 2249-8001 Vol. 8, Issue 2, USA. 2018, 555-565 pp. Impact Factor (JCC): 6.8765.
- [9]. Muhamediyeva D.K. Solving of the Task of Kolmogorov-Fisher Type Biological Population in the Regime with Aggravation // International Journal of Applied Engineering Research ISSN 0973-4562 Volume 13, Number 6 (2018) pp. 4291-4298.
- [10]. Мухамедиева Д.К. Численное решение системы уравнений реакции-диффузии с двойной нелинейностью // ФарПИ илмий-техника журнали. –Фарғона.2018. №3, 127-131 бетлар.

Web сайтлар

- [1]. dilnoz134@rambler.ru