

4-12-2019

## About local and non-local problems for a fractional order ordinary differential equation

D. Oripov

*Ferghana State University, Ferghana, Murabbiylar 19, fdujournal@fdu.uz*

Follow this and additional works at: <https://uzjournals.edu.uz/fdu>



Part of the [Mathematics Commons](#)

---

### Recommended Citation

Oripov, D. (2019) "About local and non-local problems for a fractional order ordinary differential equation," *Scientific journal of the Fergana State University*. Vol. 2 , Article 18.

DOI: 517.9+517.948.3

Available at: <https://uzjournals.edu.uz/fdu/vol2/iss1/18>

This Article is brought to you for free and open access by 2030 Uzbekistan Research Online. It has been accepted for inclusion in Scientific journal of the Fergana State University by an authorized editor of 2030 Uzbekistan Research Online. For more information, please contact [sh.erkinov@edu.uz](mailto:sh.erkinov@edu.uz).

**КАСР ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН ЛОКАЛ ВА НОЛОКАЛ  
ШАРТЛИ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА ҲАҚИДА  
О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ЛОКАЛЬНЫМИ И НЕЛОКАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ  
ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА  
ABOUT LOCAL AND NON-LOCAL PROBLEMS FOR A FRACTIONAL ORDER ORDINARY  
DIFFERENTIAL EQUATION**

**Д.Орипов**

**Аннотация**

Мақолада каср тартибли бир оддий дифференциал тенглама учун локал ва нолокал шартли чегаравий масала қўйилган ва бу масаланинг ечими ошкор кўринишда топилган.

**Аннотация**

В статье поставлена краевая задача с локальными и нелокальными условиями для одного обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка, решения поставленной задачи найдены в явном виде.

**Annotation**

Boundary-value problems local and non-local conditions for a fractional ordinary differential equation were set and solutions of these problems were found explicitly.

**Таянч сўз ва иборалар:** каср тартибли ҳосила, каср тартибли оддий дифференциал тенглама, чегаравий масала, Миттаг-Леффлер функцияси.

**Ключевые слова и выражения:** производная дробного порядка, обыкновенное дифференциальное уравнение дробного порядка, краевая задача, функция Миттага-Леффлера.

**Key words and word expressions:** fractional derivative, fractional ordinary differential equation, boundary-value problem, Mittag-Leffler's function.

Агар тенгламада бир ўзгарувчан номаълум функциянинг каср тартибли ҳосиласи катнашса, бундай тенглама каср тартибли оддий дифференциал тенглама дейилади. Бутун тартибли оддий дифференциал тенгламаларга ўхшаш каср тартибли оддий дифференциал тенгламалар учун ҳам Коши ва чегаравий масалаларни ўрганиш мумкин [1.42].

Ушбу мақола [2.17] ишнинг давоми бўлиб, унда қуйидаги масала ўрганилган.

**Масала.** Каср тартибли ушбу

$$D_{ax}^{\alpha} y(x) - \lambda y(x) = f(x), \quad a < x < b \quad (1)$$

оддий дифференциал тенгламанинг

$$y^{(m)}(b) + d_m y(b) = q_m, \quad m = \overline{1, i} \quad (2)$$

$$\left[ D_{ax}^{\alpha-j} y(x) \right]_{x=a} = q_j, \quad j = \overline{i+1, n} \quad (3)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $q_m$ ,  $d_m$ ,  $q_j$  - берилган ҳақиқий сонлар бўлиб,  $0 < \alpha \notin N$ ,  $i, j, m \in N$ ,  $i > 1$ ,  $f(x)$  - берилган функция,  $y = y(x)$  - номаълум функция.

Қуйидаги теорема ўринли.

**Теорема.** Агар  $n-1 < \alpha < n$ ,  $n \in N$ ,  $\Delta \neq 0$ ,  $\lambda \neq 0$ ,  $f(x) \in C_{\gamma}[a, b]$ ,  $0 \leq \gamma < 1$  бўлса, {1-3} чегаравий масаланинг ягона  $y(x) \in C_{n-\alpha}[a, b]$  ечими мавжуд бўлади, бу ерда

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1^{(1)}(\lambda) & A_2^{(1)}(\lambda) & \dots & A_i^{(1)}(\lambda) \\ A_1^{(2)}(\lambda) & A_2^{(2)}(\lambda) & \dots & A_i^{(2)}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_1^{(i)}(\lambda) & A_2^{(i)}(\lambda) & \dots & A_i^{(i)}(\lambda) \end{vmatrix},$$

$$A_k^{(m)}(\lambda) = \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l \frac{(b-a)^{\alpha l + \alpha - k - m - 1}}{\Gamma(\alpha l + \alpha - k - m)} + d_m \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l \frac{(b-a)^{\alpha l + \alpha - k}}{\Gamma(\alpha l + \alpha - k + 1)}.$$

**Исбот.** Бизга маълумки, (1) тенгламининг умумий ечими

$$y(x) = \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left[ \lambda(x-t)^\alpha \right] f(t) dt + \sum_{k=1}^n C_k (x-a)^{\alpha-k} E_{\alpha,\alpha-k+1} \left[ \lambda(x-a)^\alpha \right] \quad (4)$$

кўринишда бўлади, бу ерда  $C_k$  – ихтиёрий сонлар,  $E_{\alpha,\beta}(z)$  – Миттаг-Лефллер функцияси бўлиб,

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{\Gamma(\alpha l + \beta)}$$

кўринишда аниқланади,  $\Gamma(z)$  эса Эйлернинг гамма функцияси [1.49].

(1) тенгламининг (4) умумий ечими ва масаланинг (2), (3) шартларидан фойдаланиб,  $C_k$ ,  $k = \overline{1, n}$  – ихтиёрий сонларни топамиз.

Агар (4) умумий ечим формуласини (3) шартларга қўйсақ,

$$C_{i+1} = q_{i+1}, C_{i+2} = q_{i+2}, \dots, C_n = q_n \quad (5)$$

тенгликлар келиб чиқади.

Энди (4) умумий ечим формуласини (2) шартларга бўйсундирамиз. Натижада қуйидаги алгебраик тенгламалар системасини оламиз:

$$\sum_{k=1}^n C_k \cdot A_k^{(m)}(\lambda) = B^{(m)}(\lambda), \quad m = \overline{1, i}, \quad (6)$$

бу ерда

$$B^{(m)}(\lambda) = q_m - \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l D_{ax}^{-\alpha l - \alpha + m} f(x) \right]_{x=b} - d_m \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \lambda^l D_{ax}^{-\alpha l - \alpha} f(x) \right]_{x=b}.$$

(6) ни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$A_1^{(m)}(\lambda)C_1 + A_2^{(m)}(\lambda)C_2 + \dots + A_k^{(m)}(\lambda)C_k + \dots + A_n^{(m)}(\lambda)C_n = B^{(m)}(\lambda), \quad m = \overline{1, i} \quad (7).$$

Агар (7) да  $m = 1$  бўлса,  $C_2, C_3, \dots, C_n$  маълум сонлар,  $C_1$  номаълум сон бўлади.

Натижада қуйидаги бир номаълумли тенглама ҳосил бўлади:

$$C_1 \cdot A_1^{(1)}(\lambda) = B^{(1)}(\lambda) - A_2^{(1)}(\lambda)q_2 - \dots - A_k^{(1)}(\lambda)q_k - \dots - A_n^{(1)}(\lambda)q_n.$$

Бу ерда  $\Delta = A_1^{(1)}(\lambda) \neq 0$  бўлганлиги учун  $C_1$  бир қийматли аниқланади.

Агар (7) да  $m = \overline{1, 2}$  бўлса, у ҳолда

$$\begin{cases} A_1^{(1)}(\lambda)C_1 + A_2^{(1)}(\lambda)C_2 = B^{(1)}(\lambda) - A_3^{(1)}(\lambda)q_3 - \dots - A_n^{(1)}(\lambda)q_n \\ A_1^{(2)}(\lambda)C_1 + A_2^{(2)}(\lambda)C_2 = B^{(2)}(\lambda) - A_3^{(2)}(\lambda)q_3 - \dots - A_n^{(2)}(\lambda)q_n \end{cases}$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади.

Бу тенгламалар системасидан

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1^{(1)}(\lambda) & A_2^{(1)}(\lambda) \\ A_1^{(2)}(\lambda) & A_2^{(2)}(\lambda) \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлганлиги учун  $C_1$  ва  $C_2$  бир қийматли топилади.

Шунга ўхшаш  $m = \overline{1, i}$  бўлса,

$$\begin{cases} A_1^{(1)}(\lambda)C_1 + A_2^{(1)}(\lambda)C_2 + \dots + A_i^{(1)}(\lambda)C_i = B^{(1)}(\lambda) - A_{i+1}^{(1)}(\lambda)q_{i+1} - \dots - A_n^{(1)}(\lambda)q_n \\ A_1^{(2)}(\lambda)C_1 + A_2^{(2)}(\lambda)C_2 + \dots + A_i^{(2)}(\lambda)C_i = B^{(2)}(\lambda) - A_{i+1}^{(2)}(\lambda)q_{i+1} - \dots - A_n^{(2)}(\lambda)q_n \\ \dots \\ A_1^{(i)}(\lambda)C_1 + A_2^{(i)}(\lambda)C_2 + \dots + A_i^{(i)}(\lambda)C_i = B^{(i)}(\lambda) - A_{i+1}^{(i)}(\lambda)q_{i+1} - \dots - A_n^{(i)}(\lambda)q_n \end{cases} \quad (8)$$

тенгламалар системаси ҳосил бўлади.

(8) тенгламалар системасининг асосий детерминанти  $\Delta$  дан иборат бўлиб, у теорема шартига асосан нолдан фарқли. Шунинг учун (8) система ягона ечимга эга. (8) алгебраик тенгламалар системасидан  $C_k$  ларни бир қийматли топиб, сўнгра топилган  $C_k$ ,  $k = \overline{1, i}$  ларни (4) формулага қўйсақ, ўрганилаётган масала ечимига эга бўламиз. Теорема исбот бўлди.

#### References:

1. Kilbas. A.A. Teoriya i prilozheniya differentsial'nykh uravneniy drobnogo poryadka. –Samara. Kurs lektsiy, 2009.
2. Oripov. D.D. Kasr tartibli bir oddiy differentsial tenglama uchun lokal va nolokal masalalar // "FarDU. Ilmiy xabarlar – Nauchnyy vestnik.FerGU" jurnali. -2018, №6.

(Тақризчи: А. Ўринов – физика-математика фанлари доктори, профессор).