

2-10-2020

A SUFFICIENT CONDITION FOR THE APPLICATION OF THE COMPRESSIVE MAPPING THEOREM IN BANACH SPACES TO FIND SOLUTIONS TO NONLINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS

D. E. Akbarov

Kokand State Pedagogical Institute, author@ferpi.uz

U. Y. Akbarov

Kokand State Pedagogical Institute, author@ferpi.uz

X. Sh. Turakulov

Kokand State Pedagogical Institute, author@ferpi.uz

Follow this and additional works at: <https://uzjournals.edu.uz/ferpi>

Recommended Citation

Akbarov, D. E.; Akbarov, U. Y.; and Turakulov, X. Sh. (2020) "A SUFFICIENT CONDITION FOR THE APPLICATION OF THE COMPRESSIVE MAPPING THEOREM IN BANACH SPACES TO FIND SOLUTIONS TO NONLINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS," *Scientific-technical journal*: Vol. 24 : Iss. 2 , Article 1.
Available at: <https://uzjournals.edu.uz/ferpi/vol24/iss2/1>

This Article is brought to you for free and open access by 2030 Uzbekistan Research Online. It has been accepted for inclusion in Scientific-technical journal by an authorized editor of 2030 Uzbekistan Research Online. For more information, please contact sh.erkinov@edu.uz.

UNDAMENTAL SCIENCES

УДК 517.9 : 519.3

A SUFFICIENT CONDITION FOR THE APPLICATION OF THE COMPRESSIVE MAPPING THEOREM IN BANACH SPACES TO FIND SOLUTIONS TO NONLINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS

Akbarov D.E., Akbarov U.Y., Turakulov X.Sh.

Kokand State Pedagogical Institute

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРЕМЫ СЖИМАЮЩЕГО ОТОБРАЖЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Акбаров Д.Е., Акбаров У.Й., Туракулов Х.Ш.

Кокандский государственный педагогический институт

СИҚИБ АКСЛАНТИРИШ ТЕОРЕМАСИНИ БАНАХ ФАЗОЛАРИДА ЧИЗИҚЛИ БЎЛМАГАН ФУНКЦИОНАЛ ТЕНГЛАМАЛАР ЕЧИМЛАРИНИ ТОПИШГА ҚЎЛЛАШНИНГ ЕТАРЛИЛИК ШАРТИ

Акбаров Д.Е., Акбаров У.Й., Туракулов Х.Ш.

Кўкон давлат педагогика институти

Abstract. The theorem on the sufficient condition for the applicability of the principle of contraction mappings in space $L_p[a,b]$, $p > 1$, with reduction to a nonlinear integral equation, using the Green's function, to find the solution of the initial-boundary conditions of quasi-linear ordinary differential equations. The way is given in the proof of the theorem using the initial condition is determined by the $u(a) = u_0, u_1(x)$, then with the same procedure of finding a sequence of functions $u_3(x), u_4(x), \dots, u_m(x), \dots$ enables the approach to solving the problem with the desired accuracy. The above theorem and other as a byproduct, the results can be applied to research and find practical solutions of problems.

Key words: quasilinear, differential equation, boundary and initial conditions, green's function, nonlinear integral equation, functional space, compressive mapping principle, sufficient condition.

Аннотация. В статье доказана теорема о достаточном условии применимости принципа сжимающего отображения в пространстве $L_p[a,b]$, $p > 1$, с приведением к нелинейному интегральному уравнению, пользуясь функцией Грина, для нахождения решение задачи начальным и /или граничным условиями квазилинейного обыкновенного дифференциального уравнения. Способом приведённым в доказательстве теоремы пользуясь начальным условием $u(a) = u_0$ определяется $u_1(x)$, далее с таким же порядком нахождения последовательность функций $u_3(x), u_4(x), \dots, u_m(x), \dots$ даёт возможность приближение к решению задачи с желаемой точности. Доказанная теорема и другие попутные результаты могут применяться для исследования и нахождения решений практических задач.

Ключевые слова: квазилинейное, дифференциальное уравнение, граничное и начальное условия, функция Грина, нелинейное интегральное уравнение, функциональное пространство, принцип сжимающего отображения, достаточное условие.

Аннотация. Мақолада квазичизиқли оддий дифференциал тенгламаларнинг ечимларини топиш масаласини чегаравий ваёки бошлангич шартлар билан боғлиқ ҳолда

UNDAMENTAL SCIENCES

аниқланадиган Грин функцияси орқали чизиксиз интеграл тенгламага келтириб, ечимини топишга $L_p[a, b]$, $p > 1$ функциялар фазосида сиқиб акслантириш теоремасини қўллашнинг етарлилик шартини ҳақидаги теорема исботланди. Теорема исботидаги каби $u(a) = u_0$ бошланғич шартдан фойдаланиб $u_1(x)$, сўнгра $u_1(x)$ функция орқали $u_2(x)$ ва шу тартибда кетма-кет $u_3(x)$, $u_4(x)$, ... , $u_m(x)$, ... функцияларни топиш тенглама ечимига ихтиёрий аниқлик билан яқинлашиш имкониятини беради. Теоремани кўплаб амалий масалалар ечимларини таҳлил қилишга ва топишга тадбиқ этиши мумкин.

Таянч сўзлар: квазичизикли, дифференциал тенглама, чегаравий ва бошланғич шартлар, Грин функцияси, чизиксиз интеграл тенглама, функциялар фазоси, сиқиб акслантириш таъмоили, етарлилик шартини.

Кириш. Кўплаб амалий масалалар билан боғлиқ жараёнлар физика, химия, биология, геология каби табиий фанлар қоида ва қонуниятларига асосланган ҳолда дифференциал, интеграл, интегро-дифференциал функционал тенгламалар ҳамда тенгсизликлар билан ифодаланадиган математик моделларга эга [1-3]. Бундай функционал тенглама ҳамда тенгсизликларда таҳлил қилинаётган жараённи кечиши шарт-шароитлари билан аниқланадиган номаълум функция чизикли ёки чизиксиз боғлиқликда ифодаланади [4-8]. Чизикли функционал масалалар узоқ даврлардан буён ўрганилиб, ҳозирда уларнинг таҳлил қилиш ва ечимларини топишнинг назарий ҳамда амалий асослари деярли тўла яратилган дейиш мумкин. Номаълум функция ва/ёки унинг ҳосиласи чизиксиз қатнашган тенглама ва тенгсизликлар кўп ҳолатларда тадқиқ қилинаётган жараён ҳамда объектларнинг моделларини адекват ифодалаш имкониятини беради [2-8].

Масаланинг қўйилиши. Чизиксизлик ифодаларининг турлича бўлиши ҳар бир чизиксиз масаланинг таҳлилига, унинг ечимини топиш усулларини қўлланилишига, олинган натижаларнинг амалий талқинларига алоҳида ёндошувни талаб этади.

Қуйида банах фазоларида чизикли бўлмаган функционал тенгламалар ечимларини топишга сиқиб акслантириш теоремасини қўллашнинг етарлилик шартини топиш билан боғлиқ масалалар ечими тадқиқ қилинади.

Масаланинг ечилиши. Эслатиб ўтиш ўринлики, норма аниқланган X фазода берилган ҳар қандай $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ фундаментал, яъни $\lim_{m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\|_X = 0$ шартини

каноатлантирувчи кетма-кетлик бирор $x_0 \in X$ элементга яқинлашса бундай нормал фазо тўла нормал фазо ёки банах фазоси деб аталади [9].

Кейинги фикр-мулоҳазаларда фойдаланиладиган қуйидаги n – тартибли чизикли оддий дифференциал тенгламанинг ечими ҳақида тўхталинади:

$$Lu = a_0(x) \frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{du}{dx} + a_n(x) u(x) = f(x), \quad (1)$$

бу ерда коэффициентлар $a_i(x)$, $i = 1, \dots, n$; ва тенгликнинг ўнг томонини ифодаловчи функция $f(x)$ R – ҳақиқий сонлар ўқига тегишли $x \in D \subset R$ бўлган соҳада узлуксиздир. Ушбу тенглама

$$Lu = a_0(x) \frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{du}{dx} + a_n(x) u(x) = 0 \quad (2)$$

берилган (1) тенгламага мос келувчи биржинсли тенглама дейилади.

Кўп ҳолларда (1) тенгламанинг хусусий ечими Грин функцияси $G(x, \xi)$ орқали

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (5)$$

UNDAMENTAL SCIENCES

умумий ечими эса

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) d\xi + A_1 u_1(x) + A_2 u_2(x) + \dots + A_n u_n(x), \quad (6)$$

ифодаланади, бу ерда $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ функциялар (2) тенгламанинг чизикли боғлиқ бўлмаган ечимлари, $A_k, (k=1, 2, \dots, n;)$ ўзгармас коэффициентлар бошланғич ёки чегаравий шартлардан топилади.

Грин функциясини (2) тенгламанинг чизикли боғлиқ бўлмаган $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ ечимлари орқали ифодаланиши мумкин

$$G(x, \xi) = \frac{1}{f(\xi)} [c_1'(x)u_1(x) + c_2'(x)u_2(x) + \dots + c_n'(x)u_n(x)] U(x - \xi),$$

бу ерда $c_k'(x), (k=1, 2, \dots, n;)$ (4) тенгламалар системасининг ечими, функция $U(x - \xi)$ ушбу

$$U(x - \xi) = \begin{cases} 0, & \text{агар } x < \xi \text{ бўлса;} \\ 1, & \text{агар } x > \xi \text{ бўлса.} \end{cases}$$

шартни қаноатлантиради.

Агар бошланғич ёки чегаравий шартларга кўра (6) ифоладаги $A_k, (k=1, 2, \dots, n;)$ коэффициентлар нолга тенг бўлса, у ҳолда (1) тенгламанинг умумий ечими ҳам (5) кўринишда ифодаланади [1,10]. Мана шу қилинган хулосадан квазичизикли дифференциал тенгламалар ечими билан боғлиқ масалалар таҳлилида фойдаланилади. Юқори тартибли ҳосиласига ёки ҳосилаларига нисбатан чизикли бўлган дифференциал тенгламалар квазичизикли дейилади [1].

Ушбу тенглик муносабатлари:

1) Ҳақиқий сонлар ўқининг $x \in [a, b] = \Omega \subset R$ соҳасида аниқланган номаълум $u(x)$ функцияга нисбатан чизиксиз, унинг n – тартибгача ҳосилаларига нисбатан чизикли бўлган оддий дифференциал тенгламанинг умумий кўриниши ифодаси

$$L_{n,0}u = a_0(x) \frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{du}{dx} = f_1(x, u(x)); \quad (7)$$

2) Номаълум функция ва унинг m – тартибгача бўлган ҳосилаларига нисбатан чизиксиз $(n - m - 1)$ дан n гача бўлган ҳосилаларига нисбатан чизикли n – тартибли оддий дифференциал тенгламанинг умумий кўриниши

$$L_{n,m}u = a_0(x) \frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-m-1} u}{dx^{n-m-1}} = f_2(x, u(x), u^{(1)}(x), u^{(2)}(x), \dots, u^{(m)}(x)); \quad (8)$$

амалий аҳамияти муҳим бўлган квазичизикли дифференциал тенгламаларга мисоллар ҳисобланади.

Бу келтирилган тенгламаларнинг чизикли қисмларини нолга тенглаб олинган биржинсли тенгламалари бошланғич ва чегаравий шартларни қаноатлантирувчи нолдан фаркли ечимларга эга бўлмаса, у ҳолда улар ечимларини топишни мос Грин функцияларидан фойдаланиб чизикли бўлмаган интеграл ва интегро-дифференциал тенгламалар ечимларини топишга келтириш мумкин [10,11]:

1) Юқорида келтирилган (7) тенгламадан

$$u(x) = \int_a^b G_{n,0}(x, \xi) f_1(\xi, u(\xi)) d\xi; \quad (9)$$

2) Кейинги (8) тенгламадан

$$u(x) = \int_a^b G_{n,m}(x, \xi) f_2(\xi, u(\xi), u^{(1)}(\xi), u^{(2)}(\xi), \dots, u^{(m)}(\xi)) d\xi; \quad (10)$$

UNDAMENTAL SCIENCES

каби тегишли интегро-дифференциал тенгламаларга ўтиш мумкин.

Қуйида (7) тенгламага мос келувчи биржинсли

$$L_{n,0}u = a_0(x)\frac{d^n u}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{du}{dx} = 0$$

тенглама чегаравий шартларни қаноатлантирувчи нолдан фарқли ечимларга эга бўлмаганда масаланинг қўйилишидан келиб чиққан ҳолда мос Грин функциясидан фойдаланиб ҳосил қилинган (9) тенгламани ечимини топишга сиқиб акслантириш теоремасини қўллашнинг етарлилик шартини аниқлаш масаласи ечилади.

Ушбу

$$u(x) = Au(x) \quad (11)$$

тенгликни қаноатлантирувчи $[a, b] = D \subset R$ соҳада аниқланган номаълум $u(x) \in X$ функцияни топиш талаб этилсин, бу ерда X – функциялар фазоси масаланинг қўйилиши билан боғлиқ $u(x)$ функциянинг хоссаларидан келиб чиққан ҳолда аниқланади.

Сиқиб акслантириш тамоилига кўра X – нормалланган тўла фазони ўзини ўзига акслантириш $A: X \rightarrow X$ бўлиб, $\forall u_1, u_2 \in X$ функциялар учун $0 < \alpha < 1$ шартни қаноатлантирувчи қуйидаги муносабат

$$\|Au_1(x) - Au_2(x)\|_X < \alpha \|u_1(x) - u_2(x)\|_X$$

ўринли бўлса (11) тенглама ягона $u_0(x) = Au_0(x)$ ечимга эга бўлади. Бу ечим $A: X \rightarrow X$ акслантиришнинг қўзғалмас нуқтаси деб ҳам аталади [9].

Ҳосил қилинган (9) тенглама аслида (7) тенглама ва тегишли бошланғич ҳамда чегаравий шартлардан келиб чиққанлиги учун бу интеграл тенгламадаги номаълум функция тегишли бўлган X – функциялар фазоси (7) тенгламага боғлиқ шартлар билан аниқланади. Шундай қилиб, (7) тенгламадаги номаълум функция $u(x) \in C^{(n-1)}[a, b] \subset C[a, b] \subset L_p[a, b]$ бўлиб, ушбу $\|L_p[a, b]\| \leq \|\cdot\|_{C[a, b]} \leq \|\cdot\|_{C^{(n-1)}[a, b]}$ муносабат ўринли.

Ҳосил қилинган (9) тенгламада

$$B(\cdot) = \int_a^b G_{n,0}(x, \xi)(\cdot) d\xi \quad \text{ва} \quad F_1(\cdot) = f_1(\xi, \cdot) \quad (12)$$

белгилашларни қилиб уни операторли кўринишда ифодалаш мумкин

$$u = BF_1u, \quad (13)$$

бу ерда B – чизикли интеграл оператор, F_1 – чизиксиз. У ҳолда бу операторлар суперпозициясини A – оператор билан белгилаб,

$$u = BF_1u = Au \quad \text{ёки} \quad u = Au \quad (14)$$

тенгликлар олинади. Агар $u(x) \in L_p[a, b]$ бўлиб, чизиксиз оператор $F_1: L_p[a, b] \rightarrow L_q[a, b]$ ҳамда чизикли оператор $B: L_q[a, b] \rightarrow L_p[a, b]$ бўлса, улар суперпозициясидан иборат бўлган оператор $A: L_p[a, b] \rightarrow L_p[a, b]$ бўлади. Энди A – операторнинг сиқиб акслантириш хусусиятига эга бўлиш шarti топилади.

Теорема. Ушбу шартларни $p > 1$ ва $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ қаноатлантирувчи p ва q – ҳақиқий сонлар, $\xi \in [a, b] = D \subset R$ ҳамда барча $\zeta \in R$ учун $f_1(\xi, \zeta)$ – функция ўзгарувчи ζ бўйича текис узлуксиз бўлиб:

а) агар

$$|f_1(\xi, \zeta)| \leq g(\xi) + C|\zeta|^{p-1}, \quad (15)$$

UNDAMENTAL SCIENCES

бу ерда $g(\xi) \in L_q[a, b]$, $C = \text{const.}$, шарт бажарилса акслантириш $f_1(\xi, u(\xi)) \in L_q[a, b]$ бўлиб, оператор $F_1(\cdot): L_p[a, b] \rightarrow L_q[a, b]$ узлуксиз ва чегараланган бўлади;

б) агар a) қисм шарти билан биргаликда

$$|f_1(\xi, \zeta_1) - f_1(\xi, \zeta_2)| \leq \alpha |\zeta_1 - \zeta_2|^{p-1}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (16)$$

тенгсизлик ҳам $\forall \zeta_1, \zeta_2 \in R$ учун бажарилса $f_1(\xi, u(\xi)) \in L_q[a, b]$ функция билан аниқланувчи оператор $F_1(\cdot): L_p[a, b] \rightarrow L_q[a, b]$ сиқиб акслантирувчи бўлади;

в) агар a) ва б) қисмлар шартлари билан биргаликда $\|B\|_{L_p[a, b]} \cdot \alpha = \beta < 1$ бажарилса (9) тенгламанинг ягона $u(x) \in L_p[a, b]$ ечими мавжуд бўлади;

з) агар a), б) ва в) қисмлар шартлари бажарилиб, (9) тенглама ечими $u(x) \in L_p[a, b]$ n -тартибгача ҳосилаларига эга бўлса, яъни $u(x) \in L_p[a, b] \cap C^{(n)}[a, b]$ бўлиб, (1) тенгламанинг ечимларига қўйилган бошланғич/чегаравий шартларни ҳам қаноатлантирса, у ҳолда бу ечим (1) ёки (7) тенглама билан боғлиқ бошланғич/чегаравий масаланинг ҳам ечими бўлади.

Олинган натижанинг таҳлили ва ҳулоса. Шундай қилиб квазичизиқли тенгламалар чизиқли қисмларини нолга тенглаб олинган биржинсли тенгламалари бошланғич ва чегаравий шартларни қаноатлантирувчи нолдан фарли ечимларга эга бўлмаса, у ҳолда улар ечимларини топишни мос Грин функцияларидан фойдаланиб чизиқли бўлмаган интеграл ва интегро-дифференциал тенгламалар ечимларини топишга келтириш мумкинлиги ҳақида тўхталинди. Бошланғич ёки чегаравий шартлар билан берилган квазичизиқли оддий дифференциал тенгламага мос Грин функцияси орқали аниқланган чизиқсиз интеграл тенгламага номаълум функция $u(x) \in L_p[a, b]$ бўлиб, чизиқсиз оператор $F_1: L_p[a, b] \rightarrow L_q[a, b]$ ҳамда чизиқли интеграл оператор $B: L_q[a, b] \rightarrow L_p[a, b]$ бўлса, улар суперпозициясидан иборат бўлган $A: L_p[a, b] \rightarrow L_p[a, b]$ операторга сиқиб акслантириш таъмоилини тадбиқининг етарлилик шартини ифодаловчи теорема исбот этилди. Теорема исботидаги каби $u(a) = u_0$ бошланғич шартдан фойдаланиб $u_1(x)$, сўнгра $u_1(x)$ функция орқали $u_2(x)$ ва шу тартибда кетм-кет $u_3(x)$, $u_4(x)$, ..., $u_m(x)$, ... функцияларни ҳисоблаш тенглама ечимига ихтиёрий аниқлик билан яқинлашиш имконияти мавжудлигини ифодалайди. Бу эса теоремани кўплаб амалий масалалар ечимларига тадбиқ этиш имкониятини яратади. Теорема шартларини кўриб ўтилган (10), (11) каби интеграл ҳамда интегро-дифференциал тенгламаларга нисбатан ҳам мос ҳолда шакллантириш мумкин.

References:

- [1]. Tixinov A.N., Samarskiy A.A. Uravneniya matematicheskoy fiziki.—M.: «Nauka». 1966.
- [2]. Marchuk G.I. Matematicheskie modeli v immunologii. —M.: «Nauka». Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1980.
- [3]. Etkins P. Fizicheskaya ximiya. Perevod s angliyskogo na russkiy yazyk. —M.: «Mir». 1980. 1–2 toma.
- [4]. Gaevskiy X., Greger K., Zaxarias K. Nelineynie operatornye uravneniya i operatornie differentsialnie uravneniya. —M.: Mir, 1978. - s.336.
- [5]. Vaynberg M.M. Variatsionniy metod i metod monotonnix operatorov. M.: Nauka, 1972. 416 s.
- [6]. Akbarov D.E., Melnik V.S., Yasinskiy V.V. Metodi upravleniya smeshannimi (sosredotochenno-raspredelennimi) sistemami. Operatorniy podxod. K.: Viriy, 1998. 223 s.
- [7]. Akbarov D.E. Pro odnu optimizatsiynu zadachu v lebegovix prostorax // Naukovi visti NTUU «KPI». -1998, № 2. -s. 84-87.
- [8]. Kufner A., Fuchik S. Nelineynye differentsialnie uravneniya. —M.: Nauka, 1988. - 304 s.
- [9]. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementi teorii funktsiy i funktsionalnogo analiza. —M.: «Nauka», 1981. 542 s.
- [10]. Krasnoselskiy M.A. Topologicheskije metodi v teorii nelineynix integralnix uravneniy. - M.: Gos. izd. texn.-teor. lit., 1956. - 392 s

UNDAMENTAL SCIENCES

- [11]. Butkovskiy A.G. *Xarakteristiki sistem s oaspredeleennimi parametrami (spravochnoe posobie)*. –M.: «Nauka». Glavnaya redaktsiya fiz.-mat. literaturi. 1979. –224 str.

Адабиётлар

- [1]. Тихинов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. –М.: «Наука». 1966.
- [2]. Марчук Г.И. *Математические модели в иммунологии*. –М.: «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, 1980.
- [3]. Эткинс П. *Физическая химия*. Перевод с английского на русский язык. –М.: «Мир». 1980. 1–2 тома.
- [4]. Гаевский Х., Греггер К., Захариас К. *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*. –М.: Мир, 1978. - с.336.
- [5]. Вайнберг М.М. *Вариационный метод и метод монотонных операторов*. М.: Наука, 1972. 416 с.
- [6]. Акбаров Д.Е., Мельник В.С., Ясинский В.В. *Методы управления смешанными (сосредоточенно-распределенными) системами. Операторный подход*. К.: Вирій, 1998. 223 с.
- [7]. Акбаров Д.Е. Про одну оптимізаційну задачу в лебегових просторах // Наукові вісті НТУУ «КПІ». -1998, № 2. -с. 84-87.
- [8]. Куфнер А., Фучик С. *Нелинейные дифференциальные уравнения*. –М.: Наука, 1988. - 304 с.
- [9]. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. –М.: «Наука», 1981. 542 с.
- [10]. Красносельский М.А. *Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений*. - М.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1956. - 392 с
- [11]. Бутковский А.Г. *Характеристики систем с оаспределенными параметрами (справочное пособие)*. –М.: «Наука». Главная редакция физ.-мат. литературы. 1979. –224 стр.

Web сайтлар

- [1]. bardosh9295@mail.ru