Scientific reports of Bukhara State University

Volume 3
Issue 3 *BSU 2019 issue 3*

Article 3

7-26-2020

THRESHOLD EIGENVALUES AND RESONANCES OF A FRIEDRICHS MODEL WITH RANK TWO PERTURBATION

Tulkin Husenovich Rasulov
associate professor, candidate of physical and mathematical sciences, BSU

Bekzod Islom ugli Bakhronov
master's student, BSU

УДК: 517.984

ИККИ ЎЛЧАМЛИ ҚЎЗҒАЛИШГА ЭГА ФРИДРИХС МОДЕЛИНИНГ БЎСАҒАВИЙ ХОС ҚИЙМАТЛАРИ ВА РЕЗОНАНСЛАРИ

ПОРОГОВЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЕ И РЕЗОНАНСЫ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА С ДВУМЕРНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

THRESHOLD EIGENVALUES AND RESONANCES OF A FRIEDRICHS MODEL WITH RANK TWO PERTURBATION

Расулов Тулкин Хусенович
доцент БухГУ, к.ф.-м.н.
Бахронов Бекзод Ислом угли
магистрант БухГУ

Rasulov Tulkin Husenovich
associate professor, candidate of physical and mathematical sciences, BSU
Bakhronov Bekzod Islom ugli
master's student, BSU

Таянч сўзлар: Фридрихс модели, муҳим ва дискрет спектрлар, Фредгольмнинг детерминанти, бўсағавий хос қиймат, виртуал сатҳ.

Ключевые слова: модель Фридрихса, существенный и дискретный спектры, определитель Фредгольма, пороговое собственное значение, виртуальный уровень.

Key words: Friedrichs model, essential and discrete spectrum, Fredholm determinant, threshold eigenvalue, virtual level.

Мақолада Гильберт фазосида таъсир қилувчи чегараланган ўз-ўзига қўшма икки ўлчамли қўзғалишга эга H Фридрихс модели фодаланган. H оператор хосқийматларининг сони ва жойлашув ўрни ўрганилган. Бу хос қийматларнинг мавжудлик шартлари топилган. Маълумшартларда H оператор муҳим спектрининг қуйи (юқори) чегараси H оператор учун ёбўсағавий хосқиймат,виртуал сатҳ бўлиши исботланган.

В статье рассматривается ограниченный самосопряженный модель Фридрихса H с двумерным возмущением в гильбертовом пространстве. Изучена число и месторасположение собственных значений оператора H. Найдены условия существования этих собственных значений. При определенных предположениях доказано, что нижняя (верхняя) гран существенного спектра оператора H является либо пороговым собственным значением, либо виртуальным уровным для H.

In this paper in the Hilbert space a bounded self-adjoint Friedrichs model with rank two perturbation is considered. Number and location of the eigenvalues of H are studied. An existence conditions of these eigenvalues are found. Under some conditions we prove that the lower (upper) bound of the essential spectrum of H is either threshold eigenvalue or virtual level of H.

Введение. В ряде задач анализа, математической физики и теории вероятностей возникают операторы, носящие название операторов Фридрихса [1]. Такие операторы действуют в гильбертовом пространстве $L_2(M, d\mu)$, где $(M, d\mu)-$ некоторое многообразие с мерой, по правилу

$$(Hf)(p) = u(p) f(p) + \alpha \int_M D(p,t) f(t) dt, \qquad f \in L_2(M, dp), \qquad M \subset R^d,$$

Здесь $u(\cdot)-$некоторая функция на многообразии M, а $D(\cdot,\cdot)-$ функция от двух переменных на этом многообразии; $\alpha > 0-$ "параметр взаимодействия".

Основная часть. В работе [1] для случая $M=[-1;1]\subset R, u(p)=p$ и малого $\alpha>0$ было установлено, что с точностью до конечного числа собственных значений оператор H имеет абсолютно непрерывный спектр, и что в своем абсолютно непрерывном подпространстве этот оператор унитарно эквивалентен оператору H_0 такому, что

$$(H_0 f)(p)=u(p)f(p), \qquad f\in L_2(M,dp).$$

Позже в работе [2] была предложена более общая модель (в которой M любой промежуток в R, а функции f принимают значения в некотором гильбертовом пространстве L; ядро D при этом заменяется на ограниченный оператор в L) и перенесены на нее результаты работы [1]. Это обобщение существенно расширило область применения теории. В статье [3], развивающей работу [2], и — уже со всей полнотой — в работе [4] было показано, что при определенных ограничениях на ядро D (а именно, при его компактности и гельдеровости с показателем $\mu>1/2$) можно исключить требование малости параметра α. При этом спектр оператора H_0 будет состоять из абсолютно непрерывной части, заполняющей промежуток $M\subset R$, и, быть может, конечного числа собственных значений конечной кратности. В работах [2], [4] было также доказано существование волновых операторов, связанных с H_0.

В настоящее время одной из важнейших задач теория самосопряженных операторов является задача об исследовании пороговых собственных значений и виртуальных уровней. Последние понятие для двухчастичного дискретного оператора Шредингера изучены в работах [5, 6, 7], а для семейства модели Фридрихса с одномерным возмущением, которые ассоциированы с системой двух частиц на решетке изучены в работах [8, 9].

В данной работе рассматривается модель Фридрихса H с двумерным возмущением. Определен число и месторасположение собственных значений. Найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы, либо нижняя (верхняя) гран $E_1\,(E_2)$ существенного спектра оператора H являлось пороговым собственным значением оператора H, либо оператор H имел виртуальный уровень в точке $z=E_1\,(z=E_2)$. Результаты настоящей работы являются обобщениями соответствующих результатов работы [5 - 9].

Модель Фридрихса с двумерным возмущением и его спектр. Для $d\in N$ обозначим через $T^d :\equiv (-\pi;\pi]^d - d$-мерный тор, а через $L_2(T^d)$ гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплексно-значных) функций, определенных на T^d. Рассмотрим модель Фридрихса H, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(T^d)$ по формуле $H:=H_0-V_1+V_2$, где операторы H_0 и V_α, $\alpha=1,2$ определяются по формулам:

$$(H_0 f)(p)=u(p)f(p), \quad (V_\alpha f)(p)=\mu_\alpha \upsilon_\alpha(p)\int_{T^d}\upsilon_\alpha(t)f(t)dt, \quad \alpha=1,2.$$

Здесь $u(\cdot)$ и $\upsilon_i(\cdot)$, $i=1,2$ -вещественнозначные, непрерывные функции на T^d. Легко можно проверить, что оператор H, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(T^d)$, является ограниченным и самосопряженным.

Из известной теоремы Г. Вейля [10] о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр $\sigma_{ess}(H)$ оператора H совпадает с существенным спектром оператора H_0. Известно, что $\sigma(H_0)=\sigma_{ess}(H_0)=[E_1;E_2]$, где числа E_1 и E_2 определяются по равенствам

$$E_1:=\min_{p\in T^d} u(p), \quad E_2:=\max_{p\in T^d} u(p).$$

Из последних двух фактов следует, что $\sigma_{ess}(H)=[E_1;E_2]$.

Пусть C - комплексная плоскость. При каждом μ_α, $\alpha=1,2$ определим регулярную в $C\setminus[E_1;E_2]$ функцию $\Delta(\mu_1,\mu_2,z):=\Delta_1(\mu_1,z)\Delta_2(\mu_2,z)+\mu_1\mu_2(\Delta_3(z))^2$ (определитель Фредгольма, ассоциированный с оператором H), где

$$\Delta_\alpha(\mu_\alpha,z):=1+(-1)^\alpha\mu_\alpha\int_{T^d}\frac{\upsilon_\alpha^2(t)dt}{u(t)-z},\quad \alpha=1,2,\quad \Delta_3(z):=\int_{T^d}\frac{\upsilon_1(t)\upsilon_2(t)dt}{u(t)-z}.$$

Установим связь между собственными значениями оператора H и нулями функции $\Delta(\mu_1\mu_2,\cdot)$. Верна следующая

Лемма 1. Число $z(\mu_1\mu_2)\in C\setminus\sigma_{ess}(H)$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда $\Delta(\mu_1,\mu_2,z(\mu_1,\mu_2))=0.$

Из леммы 1 следует, что $\sigma_{disc}(H)=\{z\in C\setminus[E_1;E_2]:\Delta(\mu_1,\mu_2,z)=0\}.$

Таким образом для спектра $\sigma(H)$ оператора H имеет место равенство

$$\sigma(H)=[E_1;E_2]\cup\{z\in C\setminus[E_1;E_2]:\Delta(\mu_1,\mu_2,z)=0\}.$$

Для формулировки основных результатов работы наряду с оператором H рассмотрим также ограниченный и самосопряженный оператор $H_\alpha,\alpha=1,2$, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(T^d)$ по формулам $H_1:=H_0-V_1$ и $H_2:=H_0+V_2$.

Следует отметит, что функция $\Delta_\alpha(\mu_\alpha,z)$ является определителом Фредгольма, ассоциированный с оператором H_α и

$$\sigma_{disc}(H_\alpha)=\{z\in C\setminus[E_1;E_2]:\Delta_\alpha(\mu_\alpha,z)=0\},\tag{1}$$
$$\sigma(H_\alpha)=[E_1;E_2]\cup\{z\in C\setminus[E_1;E_2]:\Delta_\alpha(\mu_\alpha,z)=0\}.$$

Число и местонахождение собственных значений оператора H. Пусть $\lambda\in R$. Для любого ограниченного самосопряженного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве L, обозначим через $L_A(\lambda)$ такое подпространство, что $(Af,f)<\lambda\|f\|$ для любого $f\in L_A(\lambda)$ и положим $N(\lambda,A)=\sup\limits_{L_A(\lambda)}\dim L_A(\lambda).$

Число $N(\lambda,A)$ равно бесконечности, если $\lambda>\min\sigma_{ess}(A)$ и если число $N(\lambda,A)$ конечно, то оно равно числу собственных значений оператора A, с учетом кратности, меньших чем λ.

Пусть $\mathrm{supp}\{\upsilon(\cdot)\}-$ носитель функции $\upsilon(\cdot)$ и $mes(\Omega)$ - мера Лебега множества $\Omega\subset T^d$.

Теорема 1. А) *Оператор H может иметь не более чем по одному простому собственному значению, лежащих левее E_1 и правее E_2.*

Б) *Если $mes(\mathrm{supp}\{\upsilon_1(\cdot)\}\cap\mathrm{supp}\{\upsilon_2(\cdot)\})=0$, то число $z\in C\setminus[E_1;E_2]$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда число z является собственным значением хотя бы одного из операторов H_1 и H_2.*

Замечание. *Из определения операторов H_α, $\alpha=1,2$ видно, что они имеют более простую структуру чем H. Поэтому теорема 1 играет важную роль при исследовании обычных и пороговых собственных значений, виртуальных уровней, а также числовую область значений оператора H.*

Доказательство теоремы 1. А) Так как оператор V_α, $\alpha = 1,2$ - неотрицательный, легко можно показать, что $H \geq H_1$ и следовательно, $L_H(\lambda) \subset L_{H_1}(\lambda),\ \ \lambda \leq E_1.$ Это означает, что

$$N(\lambda, H) \leq N(\lambda, H_1), \quad \lambda \leq E_1. \qquad (2)$$

Так как определитель Фредгольма $\Delta_1(\mu_1, \cdot)$ оператора H_1 монотонно убывает на полуоси $(-\infty; E_1)$ имеем, что $N(E_1, H_1) \leq 1$, следовательно, в силу неравенства (2) верно $N(E_1, H) \leq 1$. По обозначению это означает, что оператор H может иметь не более чем одно простое собственное значение, лежащее левее E_1.

Аналогично можно показать, что $N(-E_2, -H) \leq 1$. Утверждение А) теоремы 1 доказана.

Б) Пусть число $z \in C \setminus [E_1; E_2]$ есть собственное значение оператора H и $f \in L_2(T^d) -$ соответствующая собственная функция. Тогда функция f удовлетворяет уравнению $Hf = zf$, т.е. уравнению

$$u(p)f(p) - \mu_1\upsilon_1(p)\int_{T^d}\upsilon_1(t)f(t)dt + \mu_2\upsilon_2(p)\int_{T^d}\upsilon_2(t)f(t)dt = zf(p). \quad (3)$$

Заметим, что для любых $z \in C \setminus [E_1; E_2]$ имеет место соотношение $u(p) - z \neq 0,\ p \in T^d$. Тогда из уравнения (3) для функции f имеем

$$f(p) = \frac{\mu_1\upsilon_1(p)k_1 - \mu_2\upsilon_2(p)k_2}{u(p) - z}, \qquad (4)$$

где

$$k_\alpha = \int_{T^d}\upsilon_\alpha(t)f(t)dt, \quad \alpha = 1,2. \qquad (5)$$

Подставляя выражение (4) для функции f в равенство (5) и учитывая условие

$$mes(\operatorname{supp}\{\upsilon_1(\cdot)\} \cap \operatorname{supp}\{\upsilon_2(\cdot)\}) = 0, \qquad (6)$$

получим, что уравнение (3) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\begin{cases} \Delta_1(\mu_1, z)k_1 = 0 \\ \Delta_2(\mu_2, z)k_2 = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение $(k_1, k_2) \in C^2$, т.е. при условии $\Delta_1(\mu_1, z)\Delta_2(\mu_2, z) = 0$ Отметим, что если $\upsilon_\alpha(p) = 0$, то $H = H_\alpha$, при этом $z \in C \setminus [E_1; E_2]$ является собственным значением оператора H_α тогда и только тогда, когда $\Delta_\alpha(\mu_\alpha, z) = 0$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 получим следующее утверждение.

Следствие 1. *Если выполняется условие (6), то* $\sigma_{disc}(H) = \sigma_{disc}(H_1) \cup \sigma_{disc}(H_2)$.

Для дальнейших исследований всюду предположим, что имеет место условие (6). Положим

$$I_\alpha(z) := \int_{T^d}\frac{\upsilon_\alpha^2(t)dt}{u(t) - z}, \quad z \in R \setminus [E_1; E_2].$$

Так как функции $I_\alpha(\cdot)$, $\alpha = 1,2$ являются монотонно возрастающий на полуосях $(-\infty; E_1)$ и $(E_2; +\infty)$, из теоремы о предельном переходе под знаком интеграла Лебега следует, что существуют (конечные или бесконечные) пределы

$$I_1(E_1) = \lim_{z \to E_1 - 0} I_1(z), \quad I_2(E_2) = \lim_{z \to E_2 + 0} I_2(z).$$

В случаи $|I_\alpha(E_\alpha)| < +\infty, \alpha = 1,2$ положим $\mu_1^0 := (I_1(E_1))^{-1},\ \ \mu_2^0 := -(I_2(E_2))^{-1}.$

Следующая теорема описывает множество собственных значений оператора H_1.

Теорема 2. А) *Если* $I_1(E_1)=+\infty$, *то при всех значениях параметра* $\mu_1>0$ *оператор* H_1 *имеет единственное собственное значение, лежащее левее* E_1.

Б) *Пусть* $I_1(E_1)<+\infty$.

Б$_1$) *Если* $0<\mu_1\le\mu_1^0$, *то оператор* H_1 *не имеет собственных значений, лежащих на* $(-\infty;E_1)$;

Б$_2$) *Если* $\mu_1>\mu_1^0$, *то оператор* H_1 *имеет единственное собственное значение, лежащее левее* E_1.

С) При всех значениях параметра $\mu_1>0$ оператор H_1 не имеет собственных значений, лежащих на $(E_2;+\infty)$.

Доказательство. А) Пусть $I_1(E_1)=+\infty$. Тогда при каждом $\mu_1>0$ имеет место соотношение $\lim\limits_{z\to E_1-0}\Delta_1(\mu_1,z)=-\infty.$

В силу монотонности непрерывной функции $\Delta_1(\mu_1,\cdot)$ на $(-\infty;E_1)$ и

$$\lim_{z\to-\infty}\Delta_1(\mu_1,z)=1 \qquad (7)$$

имеем, что существует единственное число $z_1(\mu_1)\in(-\infty;E_1)$ такое, что $\Delta_1(\mu_1,z_1(\mu_1))=0.$ Следовательно, в силу равенства (1) число $z_1(\mu_1)<E_1$ является собственным значением оператора H_1.

Б$_1$) Пусть $I_1(E_1)<+\infty$ и $0<\mu_1\le\mu_1^0$. Так как функция $\Delta_1(\mu_1,\cdot)$ монотонно убывает на полуоси $(-\infty;E_1)$, для любого $z<E_1$ верно

$$\Delta_1(\mu_1,z)>\Delta_1(\mu_1,E_1)\ge\Delta_1(\mu_1^0,E_1)=1-\mu_1^0(\mathrm{I}_1(\mathrm{E}_1))^{-1}=0.$$

Следовательно, по равенству (1) оператор H_1 не имеет собственных значений на $(-\infty;E_1)$.

Б$_2$) Пусть теперь $\mu_1>\mu_1^0$. Функция $\Delta_1(\mu_1,\cdot)$ непрерывна и монотонно убывает на полуоси $(-\infty;E_1)$. Поэтому в силу равенства (7) существует единственное число $z_1(\mu_1)\in(-\infty;E_1)$ такое, что $\Delta_1(\mu_1,z_1(\mu_1))=0.$ В силу равенства (1) число $z_1(\mu_1)$ является единственным собственным значением оператора H_1.

С) Для любых $\mu_1>0$ и $z>E_2$ имеем $\Delta_1(\mu_1,z)\ge1.$ Отсюда учитывая равенства (1) получим, что для любого $\mu_1>0$ оператор H_1 не имеет собственных значений на $(E_2;+\infty)$. Теорема 2 полностью доказана.

Следующая теорема описывает множество собственных значений оператора H_2 и доказывается аналогично теореме 2

Теорема 3. А) *Если* $I_2(E_2)=-\infty$, *то при всех значениях параметра* $\mu_2>0$. *оператор* H_2 *имеет единственное собственное значение, лежащее правее* E_2.

Б) *Пусть* $|I_2(E_2)|<+\infty.$

Б$_1$) *Если* $0<\mu_2\le\mu_2^0$, *то оператор* H_2 *не имеет собственных значений, лежащих на* $(E_2;+\infty)$;

Б$_2$) *Если* $\mu_2>\mu_2^0$ *то оператор* H_2 *имеет единственное собственное значение, лежащее правее* E_2.

С) *При всех значениях параметра* $\mu_2>0$ *оператор* H_2 *не имеет собственных значений, лежащих на* $(-\infty;E_1)$.

Из теорем 1-3 получим следующую утверждению о собственных значениях оператора H.

Следствие 2. А) *Если* $I_1(E_1)=+\infty$ *и* $I_2(E_2)=-\infty$, *то при всех значениях параметры* $\mu_1>0$ *и* $\mu_2>0$ *оператор* H *имеет по одному простому собственному значению, лежащих левее* E_1 *и правее* E_2.

Б) *Если* $I_1(E_1)<+\infty$ *и* $|I_2(E_2)|<+\infty$, *то при* $0<\mu_\alpha\le\mu_\alpha^0$, $\alpha=1,2$ *оператор* H *не имеет собственных значений, лежащих вне своего существенного спектра. А при* $\mu_\alpha>\mu_\alpha^0$, $\alpha=1,2$ *оператор* H *имеет по одному простому собственному значению, лежащих левее* E_1 *и правее* E_2.

4. Пороговые собственные значение и резонансы оператора H. Всюду в этом пункте предположим, что $d=3$, функция $u(\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $p_1\in T^3$ и единственный невырожденный максимум в точке $p_2\in T^3$. Более, того функция $\upsilon_\alpha(\cdot)$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка в окрестности точки $p_\alpha\in T^3$. Далее, где не оговорено противное, всюду в этом пункте предполагается, что число α принимает значения 1 и 2.

Пусть $C(T^3)$ (соот. $L_1(T^3)$) – банахово пространство непрерывных (соот. интегрируемых) функций, определенных на T^3.

Определение 1. *Говорят, что оператор* H *имеет виртуальный уровень в точке* $z=E_\alpha$ *(резонанс с энергией* E_α*), если число* 1 *является собственным значением оператора*

$$(G_\alpha\psi_\alpha)(p)=\int_{T^3}\frac{\mu_1\upsilon_1(p)\upsilon_1(t)-\mu_2\upsilon_2(p)\upsilon_2(t)}{u(t)-E_\alpha}\psi_\alpha(t)dt,\quad \psi\in C(T^3)$$

и по крайней мере одна (с точностью до константы) соответствующая собственная функция ψ_α *удовлетворяет условию* $\psi_\alpha(p_\alpha)\ne 0$.

Заметим, что если оператор H имеет виртуальный уровень в точке $z=E_\alpha$, тогда решение уравнения $G_\alpha\psi_\alpha=\psi_\alpha$ равно (с точностью до константы) функции $\upsilon_\alpha(\cdot)$ (см. доказательство утверждение $Б$) теоремы 4). Отметим, что в определении 1 требование наличия собственного значения 1 оператора G_α соответствует существованию решения уравнения $Hf_\alpha=E_\alpha f_\alpha$, а из условия $\psi_\alpha(p_\alpha)\ne 0$ следует, что решение f_α этого уравнения не принадлежит пространству $L_2(T^3)$. Точнее, если оператор H имеет виртуальный уровень в точке $z=E_\alpha$, то функция

$$f_\alpha(p)=(-1)^{\alpha+1}\frac{\upsilon_\alpha(p)}{u(p)-E_\alpha}, \qquad (8)$$

удовлетворяет уравнению $Hf_\alpha=E_\alpha f_\alpha$ и $f_\alpha\in L_1(T^3)\setminus L_2(T^3)$ (см. доказательство утверждение А) теоремы 4).

Если число $z=E_\alpha$ является собственным значением оператора H, то функция f_α, определенный по формуле (8), удовлетворяет уравнению $Hf_\alpha=E_\alpha f_\alpha$ и $f_\alpha\in L_2(T^3)$ (см. доказательство утверждение А) теоремы 4).

Следующая теорема о необходимых и достаточных условиях для того чтобы, либо число $z=E_\alpha$ являлось собственным значением оператора H, либо оператор H имел виртуальный уровень в точке $z=E_\alpha$.

Теорема 4. А) *Число* $z=E_\alpha$ *является собственным значением оператора* H *тогда и только тогда, когда* $\mu=\mu_\alpha^0$ *и* $\upsilon_\alpha(p_\alpha)=0.$

Б) *Оператор* H *имеет виртуальный уровень в точке* $z=E_\alpha$ *тогда и только тогда, когда* $\mu=\mu_\alpha^0$ *и* $\upsilon_\alpha(p_\alpha)\neq 0.$

Доказательство. А) Необходимость. Пусть число $z=E_\alpha$ является собственным значением оператора H и $f_\alpha \in L_2(T^3)$ - соответствующая собственная функция. Тогда f_α удовлетворяет уравнению $Hf_\alpha = E_\alpha f_\alpha$, т.е. уравнению

$$u(p)f_\alpha(p)-\mu_1\upsilon_1(p)\int_{T^3}\upsilon_1(t)f_\alpha(t)dt+\mu_2\upsilon_2(p)\int_{T^3}\upsilon_2(t)f_\alpha(t)dt=E_\alpha f_\alpha(p). \quad (9)$$

Из (9) с помощью условие (6) и простых рассуждений получим, что собственная функция f_α имеет вид (8) и $\mu_\alpha=\mu_\alpha^0.$

Теперь докажем, что $f_\alpha \in L_2(T^3)$ тогда и только тогда, когда $\upsilon_\alpha(p_\alpha)=0.$ Действительно, если $\upsilon_\alpha(p_\alpha)=0$ соответственно $\upsilon_\alpha(p_\alpha)\neq 0,$ то существуют числа $C_1,C_2,C_3>0,\delta>0$ и $\theta\in\{1,2,3\}$ такие, что

$$C_1|p-p_\alpha|^\theta \le |\upsilon_\alpha(p)| \le C_2|p-p_\alpha|^\theta, \quad p\in U_\delta(p_\alpha), \quad (10)$$

соответственно

$$|\upsilon_\alpha(p)|\ge C_3, \quad p\in U_\delta(p_\alpha): U_\delta(p_\alpha):=\{p\in T^3: |p-p_\alpha|<\delta\}, \quad \delta>0. \quad (11)$$

Так как функция $u(\cdot)$ имеет единственный невырожденный минимум в точке $p_1\in T^3$ и единственный невырожденный максимум в точке $p_2\in T^3$ существуют числа $C_1,C_2,C_3>0$ и $\delta>0$ такие, что

$$C_1|p-p_\alpha|^2 \le |u(p)-E_\alpha| \le C_2|p-p_\alpha|^2, \quad p\in U_\delta(p_\alpha), \quad (12)$$

$$|u(p)-E_\alpha|\ge C_3, \quad p\in T^3\setminus U_\delta(p_\alpha). \quad (13)$$

Имеет место равенство

$$\int_{T^3}|f_\alpha(t)|^2dt=\int_{U_{\delta(p_\alpha)}}\frac{\upsilon_\alpha^2(t)dt}{|u(t)-E_\alpha|^2}+\int_{T^3\setminus U_{\delta(p_\alpha)}}\frac{\upsilon_\alpha^2(t)dt}{|u(t)-E_\alpha|^2}. \quad (14)$$

Учитывая неравенства (10)-(13) имеем, что первое слагаемое в правой части (14) конечна тогда и только тогда, когда $\upsilon_\alpha(p_\alpha)=0.$ В случае $\upsilon_\alpha(p_\alpha)=0$ имеем

$$\int_{T^3}|f_\alpha(t)|^2dt\le C_1\int_{U_{\delta(p_\alpha)}}\frac{|t-p_\alpha|^{2\theta}}{|t-p_\alpha|^4}dt+C_2<\infty.$$

Если $\upsilon_\alpha(p_\alpha)\neq 0,$ то используя неравенств (10)-(13) получим, что

$$\int_{T^3}|f_\alpha(t)|dt\le C_1\int_{U_{\delta(p_\alpha)}}\frac{|t-p_\alpha|^\theta}{|t-p_\alpha|^2}dt+C_2<\infty;\ \int_{T^3}|f_\alpha(t)|^2dt\ge C_1\int_{U_{\delta(p_\alpha)}}\frac{1}{|t-p_\alpha|^4}dt=\infty.$$

Заключение. Таким образом, $f_\alpha\in L_2(T^3)$ тогда и только тогда, когда $\upsilon_\alpha(p_\alpha)=0$; если $\upsilon_\alpha(p_\alpha)\neq 0,$ то $f_\alpha\in L_1(T^3)\setminus L_2(T^3).$

Достаточность. Пусть $\mu_\alpha=\mu_\alpha^0$ и $\upsilon_\alpha(p_\alpha)=0.$ Тогда легко можно проверить, что функция f_α, определенная по формуле (8), удовлетворяет уравнению $Hf_\alpha=E_\alpha f_\alpha.$ Выше доказали, что если $\upsilon_\alpha(p_\alpha)=0,$ то $f_\alpha\in L_2(T^3).$ Утверждение А) теоремы 4 доказано.

Б) Необходимость. Пусть оператор H имеет виртуальный уровень в точке $z = E_\alpha$. Тогда по определению 1 уравнение

$$\int_{T^3} \frac{\mu_1 \upsilon_1(p)\upsilon_1(t) - \mu_2 \upsilon_2(p)\upsilon_2(t)}{u(t) - E_\alpha} \psi_\alpha(t)dt = \psi_\alpha(p) \quad (15)$$

имеет нетривиальное решение $\psi_\alpha \in C(T^3)$, удовлетворяющее условию $\psi_\alpha(p_\alpha) \neq 0$.

Использя условие (6) имеем, что это решение равно (с точностью до константы) функции $\upsilon_\alpha(\cdot)$ и следовательно, $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$.

Достаточность. Пусть $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$ и $\upsilon_\alpha(p_\alpha) \neq 0$. Тогда функция $\upsilon_\alpha \in C(T^3)$ является решением уравнения (15), и следовательно, по определению 1 оператор H имеет виртуальный уровень в точке $z = E_\alpha$. Утверждение Б) теоремы 4 доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedrichs K.O. Uber die Spectralzerlegung einee Integral operators. Math. Ann., 115:1 1938. – P. 249 – 272.

2. Friedrichs K.O. On the perturbation of continuous spectra. Comm. Pure Appl. Math., 1:4 1948. – P. 361 – 406.

3. Faddeev L.D. Stroenie rezolventi operatora Shredingera sistemi trex chastits i zadacha rasseyaniya. Dokl. AN SSSR, 145:2. 1962. - S. 301 304.

4. Faddeev L.D. O modeli Fridrixsa v teorii vozmusheniy neprerivnogo spektra. TrudiMat. Ins-taANSSSR, 73. 1964. - S. 292 313.

5. Albeverio S., Lakaev S.N., Makarov K.A., Muminov Z.I. The threshold effects for the two-particle Hamiltonians in lattice. Comm. Math. Phys. 262. 2006. – P. 91 – 115.

6. Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I. Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann. Henri Poincare. 5. 2004. – P. 743 – 772.

7. Abdullaev J.I., Lakaev S.N. Asimptotika diskretnogo spektra raznostnogo trexchastichnogo operatora Shredingera na reshetke. Teor. imat. fiz., 136:2. 2003. - S. 231 245.

8. Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I. The threshold effects for a family of Friedrichs models under rank one perturbations. J. Math. Anal. Appl. 330. 2007. – P. 1152 – 1168.

9. Albeverio S., Lakaev S.N., Djumanova R.Kh. The essential and discrete spectrum of a model operator associated to a system of three identical quantum particles. Rep. Math. Phys. 63:3. 2009. – P. 359 – 380.

10. Rid M., Saymon B. Metodi sovremennoy matematicheskoy fiziki. T. 4, Analiz operatorov. - M.: Mir, 1982. - 426 s.

УДК 519.837.2

ДОИРАДАГИ СОДДА ДИФФЕРЕНЦИАЛ ЎЙИНЛАРДА ҚУВИШ МАСАЛАСИ

ЗАДАЧА ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ПРОСТЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ В КРУГЕ

THE TASK OF PROSECUTING SIMPLE DIFFERENTIAL GAMES ON THE CIRCLE

Зуннунов Азизхон Олимхон ўғли
ЎзМУ таянч докторанти

Zunnunov Azizhon Olimkhon oglu
basic doctoral student, NUUz

Таянч сўзлар: қувиш, қувувчи, қочувчи, қувувчи бошқаруви, қочувчи бошқаруви.

Ключевые слова: преследование, преследующий, убегающий, управление преследования, управление убегания.

Key words: pursuit, pursuer, evader, pursuit control, evasion control.