Scientific reports of Bukhara State University

Volume 3
Issue 3 *BSU 2019 issue 3*

Article 2

7-26-2020

THE PROBLEM OF DETERMINING A KERNEL IN A MULTIDIMENSIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF HEAT CONDUCTION

Durdimurod Kalandarovich Durdiev
professor of the department of mathematics, doctor of physics and mathematics, BSU

Zhonibek Zhamolovich Zhumaev
doctoral student, BSU

ANIQ VA TABIIY FANLAR

УДК: 517.958

ИССИҚЛИК ЎТКАЗУВЧАНЛИКНИНГ КЎП ЎЛЧОВЛИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАСИ УЧУН ЯДРОНИ ТОПИШ МАСАЛАСИ

ЗАДАЧА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЯДРА В МНОГОМЕРНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

THE PROBLEM OF DETERMINING A KERNEL IN A MULTIDIMENSIONAL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION OF HEAT CONDUCTION

Дурдиев Дурдимурод Каландарович
профессор кафедры математики БухГУ, д.ф.-.м.н.
Жумаев Жонибек Жамолович
докторант (PhD) БухГУ

Durdiev Durdimurod Kalandarovich
professor of the department of mathematics, doctor of physics and mathematics, BSU
Zhumaev Zhonibek Zhamolovich
doctoral student, BSU

Таянч сўзлар: интегро-дифференциалтенглама, ядро, вазнлиузлуксиз функция, тескари масала, Фурье усули.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, ядро, непрерывные функции с весом, обратная задача, метод Фурье.

Key words: integro-differential equation, kernel, continuous functions with weight, inverse problem, Furye method.

Ушбу мақолада кўп ўлчовли иссиқлик ўтказувчанлик интегро-дифференциал тенгламаси учун интеграл *ҳад ядросини топиш юзасидан тескари масала ўрганилган. Вазнли узлуксиз функциялар синфида интервал ўлчамлари ихтиёрий ҳол учун қўйилган масаланинг мавжудлик ва ягоналик теоремаси исбот этилган. Бу мақолада ихтиёрий интервал учун кўп ўлчовли иссиқлик тенгламасидаги ядрони аниқлаш масаласини ўрганамиз.*

В этой статье мы изучили обратную задачу нахождения интегрального ядра для многомерного интегро-дифференциального уравнения теплопроводности. В пространстве непрерывных функций с весом доказана теорема существования и единственности поставленной задачи для произвольного интервала определения функции. В настоящей работе исследуется задача определения ядра в многомерном уравнении теплопроводности для произвольного интервала.

In this article, we studied the inverse problem of finding the integral kernel for the multidimensional integro-differential heat equation. In the space of continuous functions with weight, the existence and uniqueness theorem for the stated problem is proved for an optional interval of function definition. In this paper, we study the problem of determining the core in a multidimensional heat equation for an arbitrary interval.

Введение. Обратные задачи для дифференциальных уравнений являются бурно развивающейся областью современной математики основными результатами и методами их решения для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений можно ознакомиться в монографиях [1]-[3]. В работе [4] изучена обратная задача для одномерного уравнения теплопроводности с интегральным членам типа свёртки. В настоящей работе исследуется задача определения ядра в многомерном уравнении теплопроводности для произвольного интервала.

Основная часть. Рассмотрим задачу Коши для следующего уравнения:

$$u_t - a^2\Delta u = \int_0^t k(\tau)u(x,t-\tau)d\tau, \quad x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in \mathbf{R}^n,\ t>0 \quad (1)$$

с начальным условием

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ x\in\mathbf{R}^n. \quad (2)$$

Здесь $\varphi(x),\ x\in\mathbf{R}^n$-заданная гладкая функция, $a>0$-известное число.

Обратную задачу сформулируем следующим образом: найти ядро $k(t),\ t>0$ в интегральном члене (1), если задано решение задачи (1), (2) на $x=0$:

$$u\big|_{x=0} = f(t),\ \ t>0. \quad (3)$$

Введем следующее обозначение: $\omega = \Delta u_t$. Обратную задачу (1)-(3) перепишем в терминах функции $\omega(x,t)$. Для это дифференцируем уравнение (1) по t, затем полученному уравнению применим оператор Δ. Используя условие (2), имеем:

$$\omega_t - a^2\omega = k(t)\Delta\varphi(x) + \int_0^t k(\tau)\omega(x,t-\tau)d\tau,\ x\in\mathbf{R}^n,\ t>0. \quad (4)$$

Положив в уравнение $t=0$ и использовав (2), получим начальное условие

$$\omega\big|_{t=0} = a^2\Delta^2\varphi(x),\ x\in\mathbf{R}^n. \quad (5)$$

Чтобы получить дополнительное условие, в дифференцированном по t уравнении (1), положим $x=0$. После несложных преобразований приходим к равенству

$$\omega\big|_{x=0} = \frac{1}{a^2}f''(t) - \frac{1}{a^2}k(t)\varphi(0) - \frac{1}{a^2}\int_0^t k(\tau)f'(t-\tau)d\tau,\ t>0. \quad (6)$$

Пусть относительно заданных функций выполняются следующие условия

$$\varphi(0) = f(0) \text{ и } |\varphi(0)| \geq \beta > 0, \quad (7)$$

где β -некоторое число.

Таким образом, обратная задача (1)-(3) свелась к задаче определения функции $k(t),\ t>0$ из соотношений (4)-(6).

В частности, из (5) и (6) получаем:

$$k(0) = \frac{1}{\varphi(0)}\left\{ f''(t)\big|_{t=0} - a^4\Delta^2\varphi(x)\big|_{x=0}\right\}.$$

Обратную задачу (4)-(6) заменим системой интегральных уравнений. Для этого используя формулу Пуассона [см. напр. 5] из (4), (5) для функции $\omega(x,t)$ получаем следующее уравнение:

$$\omega(x,t) = \psi(x,t) + \int_0^t\int_{R^n} G(x-\xi,t-\tau)\left[k(\tau)\Delta\varphi(\xi) + \int_0^\tau k(\alpha)\omega(\xi,\tau-\alpha)d\alpha\right]d\xi d\tau \quad (8)$$

где $\psi(x,t) = \int_{R^4} G(x-\xi,t)a^2\Delta^2\varphi(\xi)d\xi;\ G(x-\xi,t-\tau) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi(t-\tau)})^n}e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2(t-\tau)}};$

фундаментальное решение уравнения $\omega_t = \omega_{xx}$, $|x-\xi|^2 = \sum_{k=1}^n |x_k-\xi_k|^2$.

Используя равенства (6) и (8), при x=0 для $k(t)$ получаем уравнение

$$k(t) = F_0(t) - \frac{1}{\varphi(0)}\int_0^t k(\tau)f'(t-\tau)d\tau + \frac{a^2}{\varphi(0)}\int_0^t\int_{R^n} G(\xi,t-\tau)\left[k(\tau)\Delta\varphi(\xi) + \int_0^\tau k(\alpha)\omega(\xi,\tau-\alpha)d\alpha\right]d\xi d\tau, \quad (9)$$

где

$$F_0(t)=\frac{1}{\varphi(0)}\left[f''(t)-a^4\int_{R^n}G(\xi,t)\Delta^2\varphi(\xi)d\xi\right].$$

Введём следующий класс функций: $B(\mathbf{R}^n)$, $B(D_T)$ - класс непрерывных, ограниченных функций, соответственно в $\mathbf{R}^n$ и $D_T=\{(x,t)\,|\,x\in\mathbf{R}^n, 0<t<T\}$. Определим нормы в этих классах равенствами

$$\|\varphi\|_{B(\mathbf{R}^n)}=\sup_{x\in\mathbf{R}^n}|\varphi(x)|,\ \|f\|_{B(D_T)}=\sup_{(x,t)\in B(D_T)}|f(x,t)|.$$

Лемма: Пусть $(\Delta\varphi(x),\Delta^2\varphi(x)\in B(\mathbf{R}^n),\ k(t)\in C(0,T)$, тогда в классе функций $B^{2,1}(D_T)$ существует единственное решение задачи (4), (5).

($B^{2,1}(D_T)$-два раза по x и один раз по t с производными непрерывно дифференцируемых и ограниченных в области D_T класс функций.)

Доказательство: Уравнение (8) перепишем следующим образом:

$$\omega(x,t)=\Phi(x,t)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau\int_{R^n}d\xi\int_0^\tau e^{-\xi^2}k(\alpha)\omega(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\tau-\alpha)d\alpha, \tag{10}$$

где

$$\Phi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{R^n}e^{-\xi^2}\Delta^2\varphi(x+2\xi\sqrt{t})d\xi+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau\int_{R^n}e^{-\xi^2}\Delta\varphi(x+2\xi\sqrt{t-\tau})k(\tau)d\xi .$$

Используя метод последовательных приближений, составим следующую последовательность:

$$\omega_0(x,t)=\Phi(x,t),$$

$$\omega_n(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau\int_{R^n}d\xi\int_0^\tau e^{-\xi^2}k(\alpha)\omega_{n-1}(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\tau-\alpha)d\alpha,\ n=1,2,....$$

При выполнении условия леммы, имеем $\omega_0(x,t)\in B^{2,1}(D_T)$. Для оценки членов последовательности нам нужны некоторые оценки, которые мы ниже выводим:

$$V(x,t)=\int_0^t k(\alpha)\omega(x,t-\alpha)d\alpha,$$

$$|V|+|V_x|\le const,$$

$$\omega(x,t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau\int_{R^n}e^{-\xi^2}d\xi\int_0^\tau k(\alpha)\omega(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\tau-\alpha)d\alpha,\ \{(x,t)\in D_\tau, 0<\tau\le t\}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\omega}{\partial x}&=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t d\tau\int_{R^n}e^{-\xi^2}V_x(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\tau)d\xi=\\ &=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{R^n}e^{-\xi^2}V_\xi(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\tau)d\xi= \qquad (11)\\ &=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{R^n}e^{-\xi^2}\xi V(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\tau)d\xi,\end{aligned}$$

$$\left|e^{-\xi^2}\xi V(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\tau)\right|\le|\xi|e^{-\xi^2}\|V_1\|_{B(D_T)}.$$

Равенство (11) дифференцируем по x

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}\int_{R^n}e^{-\xi^2}\xi V_x(x+2\xi\sqrt{t-\tau},\tau)d\xi.$$

Введём обозначения $\|k\|_{B(D_T)}=k_0, \|\Delta^2\varphi\|_{B(\mathbf{R}^n)}=\rho_0, \|\Delta\varphi\|_{B(\mathbf{R}^n)}=\rho_1$:

$$\left|\omega_0(x,t)\right|_{B(D_T)} \le a^2\rho_0 + k_0\rho_1 t;$$

$$\left|\omega_1(x,t)\right|_{B(D_T)} \le a^2\rho_0 k_0 \frac{t^2}{2!} + k_0{}^2\rho_1 \frac{t^3}{3!};$$

$$\ldots.$$

$$\left|\omega_n\right|_{B(D_T)} \le a^2\rho_0 k_0 \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \rho_1 k_0^{n+1} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Если через $B^4(R)$-обозначим класс функций четырежды непрерывно дифференцируемых и ограниченных в $\mathbf{R}$ функций, и для функции $\varphi(x) \in B^4(R)$ рассмотрим следующую норму

$$\left\|\varphi(x)\right\|_{B(R^4)} = \sum_{i=0}^{4} \left\|\varphi^i(x)\right\|_{B(R)}$$

тогда каждая из норм $\left\|\Delta\varphi(x)\right\|_{B(R)}$ и $\left\|\Delta^2\varphi(x)\right\|_{B(R)}$ меньше чем $\left\|\varphi(x)\right\|_{B(R^4)}$. В дальнейшем используем обозначения $\left\|\varphi(x)\right\|_{B(R^4)} = \alpha_1$.

Воспользуясь интегральными уравнениями (8), (9) запишем их виде операторного уравнения:

$g = Ag$, (12)

где $g = (g_1; g_2) = (\omega(x,t); k(t)),\ A = (A_1; A_2)$-операторы, определяемы правыми частями уравнений (8), (9).

Теорема.Пусть для функций $\varphi(x)$ и $f(t)$ выполняются соотношения и условия леммы, тогда для любого $T > 0$ уравнение (12) имеет единственное решение.

Доказательство: Рассмотрим векторную функцию составленную из свободных членов правой части уравнения (12)

$$g_0(x,t) = (g_{01}; g_{02})(x,t) = (\psi; F_0)(x,t).$$

Для этой векторной функции введем норму $\left\|g_0\right\|_{B(D_T)} = \max\limits_{1\le i\le 2}\left\|g_{0_i}\right\|_{B(D_T)}$, а для неизвестной вектор функции $g(x,t) \in B(D_h), 0 < h \le T$ следующую весовую норму:

$$\left\|g(x,t)\right\|^{\rho}_{B(D_T)} = \max\left\{\sup_{(x,t)\in D_T}\left|g_1(x,t)e^{-\rho t}\right|, \sup_{t\in(0.T)}\left|g_2(t)e^{-\rho t}\right|\right\} = \max\left\{\left\|g_1\right\|^{\rho}_{B(D_h)}, \left\|g_2\right\|^{\rho}_{B[0,h]}\right\}, \rho > 0.$$

Положительный параметр ρ выберем позже.

Для оператора (12) используем метод сжимающих отображений. Введем множество $G(g_0,\varepsilon), \varepsilon = \left\|g_0\right\|_{B(D_T)}$ функций $g(x,t)$, удовлетворяющих неравенству $\left\|g - g_0\right\|_{B(D_T)} \le \varepsilon.$ Заметим, что если $g(x,t) \in G(g_0,\varepsilon)$, то из неравенства $\left\|g - g_0\right\|_{B(D_T)} \le \varepsilon.$ вытекает $\left\|g\right\|_{B(D_T)} \le 2\varepsilon.$ Сначала докажем, что оператор А переводит множество $G(g_0,\varepsilon)$ в себя, если число ρ удовлетворяет некоторому условию, т.е. из $g(x,t) \in G(g_0,\varepsilon)$ следует $Ag(x,t) \in G(g_0,\varepsilon)$.

Этой целью проводим следующие оценки:

$$\|A_1 g - g_{01}\|^{\rho}_{B(D_T)} = \sup_{(x,t)\in D_T} \left|\left(A_1 g - g_{01}\right)e^{-\rho t}\right| =$$

$$= \sup_{(x,t)\in D_T} \left| \int_0^t d\tau \int_{R^n} G(x-\xi, t-\tau)\left[g_2(\tau)\Delta\varphi(\xi) + \int_0^{\tau} g_2(\alpha) g_1(\xi, \tau-\alpha) d\alpha \right] d\xi \cdot e^{-\rho t}\right| \le$$

$$\le \sup_{(x,t)\in D_T} \left| \int_0^t g_2(\tau) e^{-\rho\tau} e^{-\rho(t-\tau)} d\tau \int_{R^n} G(x-\xi, t-\tau)\Delta\varphi(\xi) d\xi \right| +$$

$$+ \sup_{(x,t)\in D_T} \left| \int_0^t d\tau \int_{R^n} G(x-\xi, t-\tau) \int_0^{\tau} g_2(\alpha) e^{-\rho\alpha} g_1(\xi, \tau-\alpha) e^{-\rho(\tau-\alpha)} d\alpha e^{-\rho(t-\tau)} d\xi \right| \le I_1 + I_2,$$

где через I_1 и I_2 обозначены первое и второе слагаемые в правой части последнего выражения.

Оценим каждый интеграл $I_i\,(i=1,2,...)$:

$$I_1 = \sup_{(x,t)\in D_T} \left| \int_0^t g_2(\tau) e^{-\rho\tau} e^{-\rho(t-\tau)} d\tau \int_{R^n} G(x-\xi, t-\tau)\Delta\varphi(\xi) d\xi \right| \le$$

$$\le \|g_2\|^{\rho}_{B[0,h]} \cdot \rho_1 \sup_{(x,t)\in D_T} \left| \int_0^t e^{-\rho(t-\tau)} \int_{R^n} G(x-\xi, t-\tau) d\tau d\xi \right| \le \frac{2\varepsilon\rho_1}{\rho},$$

$$I_2 = \sup_{(x,t)\in D_T} \left| \int_0^t d\tau \int_{R^n} G(x-\xi, t-\tau) \int_0^{\tau} g_2(\alpha) e^{-\rho\alpha} g_1(\xi, \tau-\alpha) e^{-\rho(\tau-\alpha)} d\alpha e^{-\rho(t-\tau)} d\xi \right| \le$$

$$\le \|g_1\|^{\rho}_{B(D_h)} \|g_2\|^{\rho}_{B[0,h]} \cdot \sup_{(x,t)\in D_h} \left| \int_0^t e^{-\rho(t-\tau)} \int_{R^n} G(x-\xi, t-\tau) d\xi d\tau \right| \le \frac{4\varepsilon^2 T}{\rho}.$$

Это значит, $\|A_1 g - g_{01}\|^{\rho}_{B(D_T)} \le \frac{2\varepsilon\rho_1}{\rho} + \frac{4\varepsilon^2 T}{\rho} = \frac{2\varepsilon}{\rho}\left(\rho_1 + 2\varepsilon T\right)$. Для выполнения неравенство $\|A_1 g - g_{01}\|^{\rho}_{B(D_T)} \le \varepsilon$ должно выполняться $\frac{2\varepsilon}{\rho}\left(\rho_1 + 2\varepsilon T\right) \le \varepsilon$. Из этого вытыкает $\rho \ge 2(\rho_1 + 2\varepsilon T) = \gamma_0$. Оценим вторую компоненту A:

$$\|A_2 g - g_{02}\|^{\rho}_{B[0,h]} = \sup_{t\in[0,h]} \left|\left(A_2 g - g_{02}\right)e^{-\rho t}\right| = \sup_{t\in[0,h]} \left|\left(\frac{1}{\varphi(0)} \int_0^t g_2(\tau) f'(t-\tau) d\tau - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\varphi(0)} \int_0^t d\tau \int_{R^n} G(\xi, t-\tau) \left[g_2(\tau)\Delta\varphi(\xi) + \int_0^{\tau} g_2(\alpha) g_1(\xi, \tau-\alpha) d\alpha \right] d\xi \right) e^{-\rho t}\right| \le$$

$$\le \sup_{t\in[0,h]} \left| \frac{1}{\varphi(0)} \int_0^t g_2(\tau) e^{-\rho\tau} f'(t-\tau) e^{-\rho(t-\tau)} d\tau \right| +$$

$$+ \sup_{t\in[0,h]} \left| \frac{1}{\varphi(0)} \int_0^t g_2(\tau) e^{-\rho\tau} e^{-\rho(t-\tau)} d\tau \int_{R^n} G(\xi, t-\tau)\Delta\varphi(\xi) d\xi \right| +$$

$$+ \sup_{t\in[0,h]} \left| \frac{1}{\varphi(0)} \int_0^t d\tau \int_{R^n} G(\xi, t-\tau) \int_0^{\tau} g_2(\alpha) e^{-\rho\alpha} g_1(\xi, \tau-\alpha) e^{-\rho(\tau-\alpha)} d\alpha e^{-\rho(t-\tau)} d\xi \right|.$$

Обозначая каждое слагаемое в этой формуле через $J_i\,(i=1,2,3)$, получим для них оценки:

$$J_1 = \sup_{t\in[0,h]} \left| \frac{1}{\varphi(0)} \int_0^t g_2(\tau) e^{-\rho\tau} f'(t-\tau) e^{-\rho(t-\tau)} d\tau \right| \le \frac{1}{\varphi(0)} \|g_2\|^{\rho}_{B[0,T]} \sup_{t\in[0,h]} \left| \frac{1}{\varphi(0)} \int_0^t f'(t-\tau) e^{-\rho(t-\tau)} d\tau \right| \le$$

$$\le \frac{2\varepsilon \|f'\|_{B[0,T]}}{\beta} \int_0^t e^{-\rho(t-\tau)} d\tau \le \frac{2\varepsilon \|f'\|_{B[0,T]}}{\beta\rho};$$

$$J_2 = \sup_{t\in[0,h]}\left|\frac{1}{\varphi(0)}\int_0^t g_2(\tau)e^{-\rho\tau}e^{-\rho(t-\tau)}d\tau\int_{R^n} G(\xi,t-\tau)\Delta\varphi(\xi)d\xi\right| \le$$

$$\le \frac{\rho_1}{\beta}\|g_2\|^{\rho}_{B[0,T]}\int_0^t e^{-\rho(t-\tau)}d\tau\int_{R^n} G(\xi,t-\tau)d\xi \le \frac{2\varepsilon\rho_1}{\beta\rho};$$

$$J_3 = \sup_{t\in[0,h]}\left|\frac{1}{\varphi(0)}\int_0^t d\tau\int_{R^n} G(\xi,t-\tau)\int_0^\tau g_2(\alpha)e^{-\rho\alpha}g_1(\xi,\tau-\alpha)e^{-\rho(\tau-\alpha)}d\alpha e^{-\rho(t-\tau)}d\xi\right| \le$$

$$\le \frac{\|g_1\|^{\rho}_{B(D_h)}\|g_1\|^{\rho}_{B[0,T]}T}{\beta}\int_0^t e^{-\rho(t-\tau)}d\tau\int_{R^n} G(\xi,t-\tau)d\xi \le \frac{4\varepsilon^2 T}{\beta\rho}.$$

Таким образом,

$$\|A_2 g - g_{02}\|^{\rho}_{B[0,h]} \le \frac{2\varepsilon\|f'\|_{B[0,T]}}{\beta\rho} + \frac{2\varepsilon\rho_1}{\beta\rho} + \frac{4\varepsilon^2 T}{\beta\rho} = \frac{2\varepsilon}{\beta\rho}(f_0 + \rho_1 + 2\varepsilon T).$$

Из этого вытекает, что если $\rho \ge \frac{2}{\beta}(f_0 + \rho_1 + 2\varepsilon T) = \gamma_1,$ то $A_2 g \in G(g_0,\varepsilon)$.

Итак, если выполняется неравенство $\rho > \rho_0 = \max(\gamma_0,\gamma_1),$ то оператор А отображает $G(g_0,\varepsilon)$ в себя. Теперь находим условия, что оператор в A шаре $G(g_0,\varepsilon)$ является сжимающим оператором. Рассмотрим два элемента g^1, g^2 из множество $G(g_0,\varepsilon)$ и проводим оценки

$$\|A_1 g^1 - A_1 g^2\|^{\rho}_{B(D_T)} \le \sup_{(x,t)\in D_T}\left|\left(\int_0^t d\tau\int_{R^n} G(x-\xi,t-\tau)\left[g_2^1\Delta\varphi + \int_0^\tau g_2^1 g_1^1 d\alpha\right]d\xi -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_0^t d\tau\int_{R^n} G(x-\xi,t-\tau)\left[g_2^2\Delta\varphi + \int_0^\tau g_2^2 g_1^2 d\alpha\right]d\xi\right)e^{-\rho t}\right| \le$$

$$\le \sup_{(x,t)\in D_T}\left|\int_0^t d\tau\int_{R^n} G(x-\xi,t-\tau)\left[g_2^1 - g_2^2\right](\tau)e^{-\rho\tau}\Delta\varphi e^{-\rho(t-\tau)}d\xi\right| +$$

$$+\sup_{(x,t)\in D_T}\left|\int_0^t d\tau\int_{R^n} G(x-\xi,t-\tau)\int_0^\tau\left[g_2^1 g_1^1 - g_2^2 g_1^2\right]d\alpha(\tau)e^{-\rho t}d\xi\right|,$$

$$I_{1,1} = \sup_{(x,t)\in D_T}\left|\int_0^t d\tau\int_{R^n} G(x-\xi,t-\tau)\left[g_2^1 - g_2^2\right](\tau)e^{-\rho\tau}\Delta\varphi e^{-\rho(t-\tau)}d\xi\right| \le$$

$$\le \rho_1\|g^1 - g^2\|^{\rho}_{B(D_T)} e^{-\rho(t-\tau)}\int_0^t d\tau\int_{R^n} G(x-\xi,t-\tau)d\xi \le \frac{\rho_1}{\rho}\|g^1 - g^2\|^{\rho}_{B(D_T)},$$

$$I_{1,2} = \sup_{(x,t)\in D_T}\left|\int_0^t d\tau\int_{R^n} G(x-\xi,t-\tau)\int_0^\tau\left[g_2^1 g_1^1 - g_2^2 g_1^2\right]d\alpha(\tau)e^{-\rho t}d\xi\right| \le$$

$$\le \sup_{(x,t)\in D_T}\left|\int_0^t d\tau\int_{R^n} G(x-\xi,t-\tau)\int_0^\tau\left(\left|g_2^1 - g_2^2\right|\cdot\left|g_1^1\right|e^{-\rho t} + \left|g_1^1 - g_1^2\right|\cdot\left|g_2^2\right|e^{-\rho t}\right)d\alpha d\xi\right| \le$$

$$\le \sup_{(x,t)\in D_T}\left|\int_0^t d\tau\int_{R^n} G(x-\xi,t-\tau)\int_0^\tau\left|g_2^1 - g_2^2\right|e^{-\rho\tau}d\alpha\cdot\left|g_1^1\right|e^{-\rho(t-\tau)}d\xi\right| +$$

$$+\sup_{(x,t)\in D_T}\left|\int_0^t d\tau\int_{R^n} G(x-\xi,t-\tau)\int_0^\tau\left|g_1^1 - g_1^2\right|e^{-\rho\tau}d\alpha\cdot\left|g_2^2\right|e^{-\rho(t-\tau)}d\xi\right| \le$$

$$\le 4\varepsilon\|g^1 - g^2\|^{\rho}_{B(D_T)} T\int_0^t e^{-\rho(t-\tau)}d\tau\int_{R^n} G(x-\xi,t-\tau)d\xi \le \frac{4\varepsilon T}{\rho}\|g^1 - g^2\|^{\rho}_{B(D_T)}.$$

В итоге, имеем

$$\left\|A_1 g^1 - A_1 g^2\right\|^{\rho}_{B(D_T)} \le \frac{\rho_1}{\rho}\left\|g^1 - g^2\right\|^{\rho}_{B(D_T)} + \frac{4\varepsilon T}{\rho}\left\|g^1 - g^2\right\|^{\rho}_{B(D_T)} = \frac{1}{\rho}(\rho_1 + 4\varepsilon T)\left\|g^1 - g^2\right\|^{\rho}_{B(D_T)},$$

$$\rho_1 + 4\varepsilon T = \gamma_2$$

Подобным образом оценивается вторая компонента оператора A :

$$\left\|A_1 g^1 - A_1 g^2\right\|^{\rho}_{B(D_T)} \le \sup_{t\in[0,T]}\left|\left(\frac{1}{\varphi(0)}\int_0^t g_2^1 f'(t-\tau)d\tau - \frac{1}{\varphi(0)}\int_0^t d\tau\int_{R^n} G(\xi,t-\tau)\left[g_2^1\rho_1 + \int_0^\tau g_2^1 g_1^1 d\alpha\right]d\xi - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\varphi(0)}\int_0^t g_2^2 f'(t-\tau)d\tau + \frac{1}{\varphi(0)}\int_0^t d\tau\int_{R^n} G(\xi,t-\tau)\left[g_2^2\rho_1 + \int_0^\tau g_2^2 g_1^2 d\alpha\right]d\xi\right)e^{-\rho t}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\beta}\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \left|g_2^1 - g_2^2\right| f'(t-\tau)e^{-\rho t}d\tau\right| + \frac{\rho_1}{\beta}\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t d\tau\int_{R^n} G(\xi,t-\tau)\left|g_2^1 - g_2^2\right|e^{-\rho t}d\xi\right| +$$

$$+\frac{1}{\beta}\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t d\tau\int_{R^n} G(\xi,t-\tau)\int_0^\tau \left|g_2^1 g_1^1 - g_2^2 g_1^2\right| d\alpha e^{-\rho t}d\xi\right|.$$

Обозначая интегралы в этой формуле, оценим их:

$$J_{1,1} = \frac{1}{\beta}\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \left|g_2^1 - g_2^2\right|e^{-\rho\tau} f'(t-\tau)e^{-\rho(t-\tau)}d\tau\right| \le \frac{f_0}{\beta}\left\|g_2^1 - g_2^2\right\|^{\rho}_{B[0,T]}\int_0^t e^{-\rho(t-\tau)}d\tau \le \frac{f_0}{\beta\rho}\left\|g_2^1 - g_2^2\right\|^{\rho}_{B[0,T]},$$

$$J_{1,2} = \frac{\rho_1}{\beta}\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t e^{-\rho(t-\tau)}d\tau\int_{R^n} G(\xi,t-\tau)\left|g_2^1 - g_2^2\right|e^{-\rho\tau}d\xi\right| \le \frac{\rho_1}{\beta\rho}\left\|g_2^1 - g_2^2\right\|^{\rho}_{B[0,T]},$$

$$J_{1,3} = \frac{1}{\beta}\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t d\tau\int_{R^n} G(\xi,t-\tau)\int_0^\tau \left|g_2^1 g_1^1 - g_2^2 g_1^2\right| d\alpha e^{-\rho t}d\xi\right| \le$$

$$\le \frac{1}{\beta}\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t e^{-\rho(t-\tau)}d\tau\int_{R^n} G(\xi,t-\tau)\int_0^\tau \left|g_2^1 - g_2^2\right|e^{-\rho\tau}\left|g_1^1\right| d\alpha d\xi\right| +$$

$$+\frac{1}{\beta}\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t e^{-\rho(t-\tau)}d\tau\int_{R^n} G(\xi,t-\tau)\int_0^\tau \left|g_1^1 - g_2^2\right|e^{-\rho\tau}\left|g_2^2\right| d\alpha d\xi\right| \le$$

$$\le \frac{4\varepsilon T}{\beta}\left\|g_2^1 - g_2^2\right\|^{\rho}_{B[0,T]}\int_0^t e^{-\rho(t-\tau)}d\tau\int_{R^n} G(\xi,t-\tau)d\xi \le \frac{4\varepsilon T}{\beta\rho}\left\|g_2^1 - g_2^2\right\|^{\rho}_{B[0,T]}.$$

$$\left\|A_1 g^1 - A_1 g^2\right\|^{\rho}_{B(D_T)} \le \frac{1}{\beta\rho}(f_0 + \rho_1 + 4\varepsilon T)\cdot\left\|g_2^1 - g_2^2\right\|^{\rho}_{B[0,T]},$$

$$\frac{1}{\beta\rho}(f_0 + \rho_1 + 4\varepsilon T) < 1,$$

$$\rho \ge \frac{1}{\beta}(f_0 + \rho_1 + 4\varepsilon T) = \gamma_3.$$

Заключение. Из этих оценок ясно,что если ρ выбираем из условия $\rho > \rho_{00} = \max(\gamma_2, \gamma_3)$, то оператор A в множестве $G(g_0, \varepsilon)$ является сжимающим отображением. Согласно принципу сжимающих операторов [2], таким образом, если ρ выбирается из условия $\rho > \max(\rho_0, \rho_{00})$, то оператор A в множестве $G(g_0, \varepsilon)$ имеет единственную неподвижную точку. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Romanov V.G. Obratnie zadachi matematicheskoy fiziki. - M.: Nauka, 1984. - 264 s.
2. Romanov V.G. Ustoychivost v obratnix zadachax. - M.: Nauchniy Mir, 2005. - 296 s.
3. Durdiev D.K. Obratnoe zadachi dlya sred s posledeystviem. - T.: TURON-IQBOL, 2014. - 232 s.
4. Durdiyev D.Q., Jumayev J.J. O`ng tomoni integral hadli issiqlik o`tkazuvchanlikning integro-defferensial tenglamasi. - Buxoro: BuxDU ilmiy axboroti, 2016. - B. 14-21.
5. MixaylovV.P. Differentsialnoe uravneniya v chastnix proizvodnix. - M.: Nauka, 1976. - 391 s.