Scientific journal of the Fergana State University

Volume 2 *Scientific journal of the Fergana State University № 1/2019*

Article 1

4-12-2019

A non local problem for a parabolic-hyperbolic equation

A. Rafiqov
Ferghana State University, Ferghana, Murabbiylar 19, fdujournal@fdu.uz

A. Sotvoldiev
Ferghana State University, Ferghana, Murabbiylar 19, fdujournal@fdu.uz

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.956

ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИК ТЕНГЛАМА УЧУН НОЛОКАЛ ШАРТЛИ МАСАЛА
ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ
A NON LOCAL PROBLEM FOR A PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION

А.Рафиқов, А.Сотволдиев

Аннотация

Мақолада пароболо-гиперболик типдаги содда тенглама учун бир нолокал масала ўрганилган. Бунда соҳанинг параболик қисмида учинчи чегаравий шарт ва интеграл шарт, гиперболик қисмида эса силжишли шарт берилган. Қўйилган масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.

Аннотация

В статье изучена одна нелокальная задача для модельного параболо-гиперболического уравнения. При этом в параболической части области взято третье краевое условие и интегральное условие, а в гиперболической части условие со смещением. Доказано наличие и единственность решения поставленной задачи.

Annotation

In the paper a non local problem for a model parabolic hyperbolic equation is researched. The third boundary condition and an integral condition are given in the parabolic part of the domain, and a shifting condition is given in the hyperbolic part of the domain. The existence and uniqueness of the solution of the problem is proved.

Таянч сўз ва иборалар: *пароболо-гиперболик типдаги тенглама, ечимнинг мавжудлиги, ечимнинг ягоналиги, учинчи чегаравий шарт, интеграл шарт.*

Ключевые слова и выражения: *уравнение параболо-гиперболического типа, наличие решения, единственность решения, третье краевое условие, интегральное условие.*

Key words and expressions: *parabolic hyperbolic type equation, existence of solution, uniqueness of solution, third boundary-value condition, shifting condition.*

Ω билан xOt текислигининг $x+t=0$, $x-t=l$, $x=0$, $x=l$, $t=T$ тўғри чизиқлар билан чегараланган чекли соҳасини белгилайлик, бу ерда $l=const>0$, $T=const>0$. Яна қуйидаги белгилашларни киритайлик: $\Omega_1=\left[\Omega\cap\left(t>0\right)\right]\cup AE$, $\Omega_2=\Omega\cap\left(t<0\right)$, $AE=\left\{\left(x,T\right):0<x<l\right\}$, $OA=\left\{\left(0,t\right):0<t<T\right\}$, $OB=\left\{\left(x,0\right):0<x<l\right\}$, $BE=\left\{\left(l,t\right):0<t<T\right\}$, $OM=\left\{\left(x,t\right):t=-x,\ 0<x<\left(l/2\right)\right\}$, $BM=\left\{\left(x,t\right):t=x-l,\ \left(l/2\right)<x<l\right\}$.

Ω соҳада қуйидаги пароболо-гиперболик

$$u_{xx}-\frac{1}{2}\left(1-\operatorname{sgn}t\right)u_{tt}-\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{sgn}t\right)u_t=0 \qquad (1)$$

тенгламани қарайлик. OB кесма бу тенгламанинг тип ўзгариш чизиғи бўлиб, у характеристика ҳам бўлади.

(1) тенглама учун Ω соҳада қуйидаги масалани ўрганамиз:

2-нолокал масала. *Шундай* $u\left(x,t\right)\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C_{x,t}^{2,1}\left(\Omega_1\right)\cap C^2\left(\Omega_2\right)$ *функция топилсинки, у* Ω_1 *ва* Ω_2 *соҳаларда (1) тенгламани,* OB *чизиқда*

$$\lim_{t\to+0}u_t\left(x,t\right)=\lim_{t\to-0}u_t\left(x,t\right),\ 0<x<l \qquad (2)$$

улаш шартини, соҳа чегарасида эса

$$u_x\left(0,t\right)+\gamma u\left(0,t\right)=\varphi_1\left(t\right),\quad 0<t\le T; \qquad (3)$$

***А.Рафиқов –** ФарДУ, физика-математика фанлари номзоди.*
***А.Сотволдиев –** НамДУ магистранти.*

$$u(l,t)=a(t)\int_0^l u(x,t)dx+\varphi_2(t),\ t\in[0,T]; \qquad (4)$$

$$u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)+\alpha(x)u(x,0)=\beta(x),\ x\in[0,l] \qquad (5)$$

чегаравий шартларни қаноатлантирсин, бу ерда $\gamma=const\neq 0$ берилган ҳақиқий сон, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $a(t)$, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ - берилган узлуксиз функциялар бўлиб, $\alpha(0)\neq -1$.

(5) –Бицадзе-Самарский шарти бўлиб, у номаълум $u(x,t)$ функциянинг $\overline{OM}$ кесмадаги чегаравий қийматини Ω соҳага қарашли $\overline{OB}$ кесмадаги қиймати билан боғламоқда.

Масала ечимининг мавжудлигини ва ягоналигини ўрганамиз. Масаланинг $u(x,t)$ ечими мавжуд бўлсин. Масала шартларига асосланиб,

$$\left.\begin{array}{l} u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le l;\ u_t(x,0)=\nu(x),\ 0<x<l; \\ \tau(x)\in C[0,l]\cap C^2(0,l),\ \nu(x)\in C(0,l)\cap L[0,l] \end{array}\right\} \qquad (6)$$

белгилашларни ва фаразларни қабул қилайлик.

У ҳолда $u(x,t)$ функцияни Ω_2 соҳада $u_{xx}-u_{tt}=0$ тенглама учун Коши масаласининг ечими сифатида қуйидагича ёзиш мумкин бўлади:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\tau(x+t)+\tau(x-t)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\nu(\xi)d\xi. \qquad (7)$$

(7) функцияни (5) шартга бўйсундириш мақсадида қуйидаги ҳисоблашларни бажарамиз:

$$u\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\tau(0)+\tau(x)\right]+\frac{1}{2}\int_x^0\nu(\xi)d\xi. \qquad (8)$$

(8) тенгликни ва (6) белгилашларни эътиборга олиб, (5) шартдан

$$\int_0^x\nu(\xi)d\xi=\tau(0)+\left[1+2\alpha(x)\right]\tau(x)-2\beta(x),x\in[0,l] \qquad (9')$$

тенгликни топамиз. Бу тенгликда $x=0$ деб, $\alpha(0)\neq -1$ шартни эътиборга олсак, $\tau(0)=\beta(0)/\left[1+\alpha(0)\right]$ни топамиз.

$(9')$ тенгликни x бўйича дифференциаллаб, $\tau(x)$ ва $\nu(x)$ функциялар орасидаги Ω_2 соҳадан олинган *асосий функционал муносабатга* эга бўламиз:

$$\nu(x)=\left\{\left[1+2\alpha(x)\right]\tau(x)\right\}'-2\beta'(x),\ x\in(0,l). \qquad (9)$$

Энди (1) тенгламада ва (4) шартларда t ни Ω_1 соҳадан нолга интилтирамиз. Натижада (6) белгилашларни эътиборга олиб,

$$\tau''(x)-\nu(x)=0,\ 0<x<l;\quad \tau(l)=a(0)\int_0^1\tau(x)dx+\varphi_2(0) \qquad (10)$$

тенгликларни топамиз.

(9) ва (10) тенгликларнинг биринчисидан $\nu(x)$ ни чиқариб,

$$\tau''(x)-\left\{\left[1+2\alpha(x)\right]\tau(x)\right\}'=-2\beta'(x),\ x\in(0,l) \tag{11}$$

дифференциал тенгламани топамиз. Натижада, (11) тенгламанинг

$$\tau(0)=\beta(0)/\left[1+\alpha(0)\right],\tau(l)=a(0)\int_0^1\tau(x)dx+\varphi_2(0) \tag{12}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечимини топиш ҳақидаги нолокал масалага эга бўламиз.

1-теорема. *Агар* $|a(0)|l\le 1$ *ва* $\alpha'(x)>0$, $x\in(0,l)$ *шартлар бажарилса,* $\{(11),(12)\}$ *масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Фараз қилайлик $\{(11),(12)\}$ масала $\tau_1(x)$ ва $\tau_2(x)$ ечимларга эга бўлсин. У ҳолда $\tau(x)=\tau_1(x)-\tau_2(x)$ функция

$$\tau''(x)-\left[1+2\alpha(x)\right]\tau'(x)-2\alpha'(x)\tau(x)=0,\ x\in(0,l); \tag{13}$$

$$\tau(0)=0,\ \tau(l)=a(0)\int_0^l\tau(x)dx \tag{14}$$

тенгликларни қаноатлантиради.

Фараз қилайлик, (13) ва (14) тенгликларни қаноатлантирувчи $\tau(x)\not\equiv 0$, $x\in[0,l]$ функция мавжуд бўлсин. У ҳолда $\sup\limits_{[0,l]}|\tau(x)|=|\tau(x_0)|=M>0$, $x_0\in[0,l]$ бўлади. $\tau(0)=0$ бўлгани учун $x_0\ne 0$. $x_0\in(0,l)$ деб, фараз қилайлик. Унда x_0 нуқтада $\tau(x)$ функция мусбат максимум (ёки манфий минимум) қабул қилади. Шунинг учун

$$\tau''(x_0)\le 0\ \ (\ge 0),\ \ \tau'(x_0)=0,\ \ \tau(x_0)>0\ \ (<0)$$

тенгсизликлар ўринли бўлади. Бу тенгсизликларни ва $\alpha'(x)>0$, $x_0\in(0,l)$ тенгсизликни ҳисобга олсак,

$$\left\{\tau''(x)-\left[1+2\alpha(x)\right]\tau'(x)-2\alpha'(x)\tau(x)\right\}\Big|_{x=x_0}<0\ \ (>0)$$

тенгсизликка эга бўламиз. Бу эса (13) тенгликка зиддир. Демак, $x_0\,\overline{\in}\,(0,l)$.

У ҳолда $x_0=l$, яъни $|\tau(l)|=M$ бўлиб, $\forall x\in[0,l)$ учун $|\tau(x)|<M$ бўлади. Буни ҳисобга олсак (14) тенгликларнинг иккинчисидан $M=\left|a(0)\int_0^l\tau(z)dz\right|<|a(0)|lM\le M$, яъни $M<M$ кўринишдаги нотўғри тенгсизликка эга бўламиз. Демак, $x_0\ne l$. Бу қарама – қаршилик $\tau(x)\not\equiv 0$, $x\in[0,l]$ деган фаразимиз нотўғрилигини кўрсатади. Демак, $\tau(x)\equiv 0$, $x\in[0,l]$. Унда $\tau_1(x)=\tau_2(x)$, $x\in[0,l]$. 1-теорема исботланди.

Энди 1-теорема шартлари бажарилган деб фараз қилиб, $\{(11),(12)\}$ масала ечимининг мавжудлигини текширамиз. Бунда $\tau''(x)=0$, $x\in(0,l)$; $\tau(0)=0$, $\tau(l)=0$ масаланинг Грин функцияси бўлган ушбу функциядан фойдаланамиз:

$$\Gamma(x,z)=\begin{cases} x(z-l)/l, & x\le z;\\ (x-l)z/l, & x\ge z.\end{cases}$$

Гильберт теоремасига асосан, $\Gamma(x,z)$ функция ва $\{(11),(12)\}$ масаланинг ечими учун

$$\tau(x)=\tau(l)+\frac{1}{l}\left[\tau(l)-\tau(0)\right](x-l)+\int_0^l \Gamma(x,z)\left\{\left[\left(1+2\alpha(z)\right)\tau(z)\right]_z^{'}-2\beta'(z)\right\}dz$$

тенглик ўринли бўлади [2].

Бу тенгликдан, бўлаклаб интеграллаш формуласини қўлланиб,

$$\tau(x)=\tau(l)+\frac{1}{l}\left[\tau(l)-\tau(0)\right](x-l)-\int_0^l \Gamma_z'(x,z)\left\{\left[1+2\alpha(z)\right]\tau(z)-2\beta(z)\right\}dz \quad (15)$$

тенгликка эга бўламиз. (15) тенгликни x бўйича $[0,l]$ да интеграллаймиз:

$$\int_0^l \tau(x)dx=\tau(l)l-\frac{l}{2}\left[\tau(l)-\tau(0)\right]-$$

$$-\int_0^l\left[1+2\alpha(z)\right]\tau(z)dz\int_0^l \Gamma_z'(x,z)dx-2\int_0^l\beta(z)dz\int_0^l\Gamma_z'(x,z)dx.$$

Буни (12) шартларнинг иккинчисига қўйиб ва $2-la(0)\neq 0$ фараз қилиб,

$\tau(l)$ ни бир қийматли топамиз:

$$\tau(l)=\left\{-\int_0^l 2a(0)\left[1+2\alpha(z)\right]\left[\int_0^l\Gamma_z'(x,z)dx\right]\tau(z)dz+\right.$$

$$\left.+la(0)\tau(0)-4a(0)\int_0^l\beta(z)dz\int_0^l\Gamma_z'(x,z)dx+\varphi_2(0)\right\}/\left[2-la(0)\right].$$

$\tau(l)$ нинг бу ифодасини (15) тенгликка қўйиб, $\tau(x)$ номаълум функцияга нисбатан

$$\tau(x)+\int_0^l K(x,z)\tau(z)dz=f(x),\ x\in[0,l] \quad (16)$$

кўринишдаги интеграл тенгламани оламиз, бу ерда

$$f(x)=\left(1-\frac{x}{l}\right)\tau(0)+2\int_0^l\Gamma_z'(x,z)\beta(z)dz+$$

$$+\frac{x}{l\left[2-la(0)\right]}\left[la(0)\tau(0)+\varphi_2(0)-4a(0)\int_0^l\int_0^l\beta(z)\Gamma_z'(\xi,z)d\xi dz\right],$$

$$K(x,z)=\left[\Gamma_z'(x,z)+\frac{2}{l}a(0)x\int_0^l\Gamma_z'(\xi,z)d\xi\right]\left[1+2\alpha(z)\right].$$

(16) – иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб, у $\{(11),(12)\}$ масалага эквивалентдир. Унинг ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги $\{(11),(12)\}$ масала ечимининг ягоналигидан, яъни 1-теоремадан келиб чиқади.

Демак, қуйидаги теорема ўринли:

2- теорема. Агар $|a(0)|l \le 1$ *ва* $\alpha'(x) > 0$, $x \in (0,l)$ *ва* $2 - la(0) \ne 0$ *шартлар бажарилса,* $\{(11),(12)\}$ *масала ягона ечимга эга бўлади.*

Агар $\alpha(x),\ \beta(x) \in C^1[0,l] \cap C^2(0,l)$ бўлса, (16) тенгламанинг ечими ҳам $C^1[0,l] \cap C^2(0,l)$ синфга тегишли бўлади. Топилган $\tau(x)$ функцияни (9) тенгликка қўйиб, $\nu(x) \in C[0,1] \cap C^1(0,l)$ функцияни топамиз. Натижада 2- нолокал масаланинг ечими Ω_2 соҳада (7) формула билан, Ω_1 соҳада эса $u_{xx} - u_t = 0$ тенглама учун (3), (4) ва $u(x,0) = \tau(x)$, $[0,l]$ шартлар билан қўйилган масаланинг ечими сифатида топилади.

Бу масаланинг ечими Ω_1 соҳада $u_{xx} - u_t = 0$ тенглама учун биринчи аралаш чегаравий масаланинг ечими сифатида қидирамиз:

$$u(x,t) = \int_0^l \tau(\xi) G_3(x,t;\xi,0)\,d\xi - \qquad (17)$$
$$-\int_0^l \psi_1(\eta) G_3(x,t;0,\eta)\,d\eta - \int_0^t \psi_2(\eta) G_{3\xi}(x,t;l,\eta)\,d\eta,$$

бу ерда $\psi_1(t) = u_x(0,t)$, $\psi_2(t) = u(l,t)$, $G_3(x,t;\xi,\eta)$- Грин функцияси:

$$G_3(x,t;\xi,\eta) = (1/2)\left[\pi(t-\eta)\right]^{-1/2} \times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi-4nl)^2}{4(t-\eta)}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi-4nl)^2}{4(t-\eta)}\right] - \right.$$
$$\left. -\exp\left[-\frac{(x-\xi-2l-4nl)^2}{4(t-\eta)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi-2l-4nl)^2}{4(t-\eta)}\right] \right\}.$$

(17) функцияни (3) ва (4) шартларга қўйиб ва $\psi_1(t) = u_t(0,t)$, $\psi_2(t) = u(l,t)$ белгилашларни эътиборга олсак,

$$\begin{cases} \psi_1(t) - \int_0^t \psi_1(\eta) K_{11}(t,\eta)\,d\eta - \int_0^t \psi_2(\eta) K_{12}(t,\eta)\,d\eta = F_1(t), \\ \psi_2(t) - \int_0^t \psi_1(\eta) K_{21}(t,\eta)\,d\eta - \int_0^t \psi_2(\eta) K_{22}(t,\eta)\,d\eta = F_2(t), \end{cases} \qquad (18)$$

кўринишдаги тенгламаларга эга бўламиз, бу ерда

$$K_{11}(t,\eta) = \gamma G_3(0,t;0,\eta), \qquad K_{12}(t,\eta) = \gamma G_{3\xi}(0,t;l,\eta),$$

$$K_{21}(t,\eta)=-a(t)\int_0^l G_3(x,t;0,\eta)dx\,,\ K_{22}(t,\eta)=-a(t)\int_0^l G_{3\xi}(x,t;l,\eta)dx\,,$$

$$F_1(t)=\varphi_1(t)-\gamma\int_0^l \tau(\xi)G_3(0,t;\xi,0)d\xi\,, F_2(t)=\varphi_2(t)+a(t)\int_0^l\int_0^l \tau(\xi)G_3(x,t;\xi,0)d\xi dx\,.$$

Аниқки, $F_1(t),F_2(t)\in C[0,T]$; $K_{12}(t,\eta),K_{21}(t,\eta)\in C[0\le t,\,\eta\le T]$. Қолаверса, $G_3(x,t;\xi,\eta)$ - Грин функцияси тузилишидан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки $K_{12}(t,\eta),K_{22}(t,\eta)\in C[0\le t,\,\eta\le T,t\ne\eta]$, $t=\xi$ да эса $1/2$ кўрсаткичли махсусликка эга.

Демак, (18) – ўнг томони узлуксиз, ядролари суст махсусликка эга бўлган иккинчи тур Вольтерра интеграл тенгламалар системасини ташкил қилар экан. У ҳолда, бу системадан $\psi_1(t)$ ва $\psi_2(t)$ номаълум функциялар бир қийматли топилади.

Шундай қилиб, қуйидаги теорема исботланди:

2-теорема. Агар $|a(0)|l\le 1$, $2-a(0)l\ne 0$; $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $a(t)\in C[0,T]$; $\alpha(x),\ \beta(x)\in C^1[0,l]\cap C^2(0,l)$; $\alpha'(x)>0$, $x\in(0,l)$ шартлар бажарилса, 2-нолокал масала ягона ечимга эга бўлади.

References:

1. O'rinov A.Q. Parabolik tipdagi differentsial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar. –T.: Mumtoz so'z, 2015.
2. O'rinov A.Q. Parabolo-giperbolik tipdagi differentsial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar.-T.: Navro'z, 2016.
3. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. –T.: Yangiyul polygraph service, 2007.

(Тақризчи: А.Ўринов – физика-математика фанлари доктори, профессор).