

4-26-2020

RESEARCH OF vt-92 TURBULENCE MODEL FOR CALCULATING AN AXISYMMETRIC SOUND JET

Murodil Erkinjon oglu Madaliev

doctoral student in the laboratory of fluid and gas mechanics Institute of Mechanics and seismic resistance of structures named after M.T. Urazboeva AS RUz

Dilshod Primkulovich Navruzov

doctoral student in the laboratory of fluid and gas mechanics Institute of Mechanics and seismic resistance of structures named after M.T. Urazboeva AS RUz

Follow this and additional works at: <https://uzjournals.edu.uz/buxdu>



Part of the [Life Sciences Commons](#)

Recommended Citation

Madaliev, Murodil Erkinjon oglu and Navruzov, Dilshod Primkulovich (2020) "RESEARCH OF vt-92 TURBULENCE MODEL FOR CALCULATING AN AXISYMMETRIC SOUND JET," *Scientific reports of Bukhara State University*. Vol. 4 : Iss. 2 , Article 12.

DOI: 10.52297/2181-1466/2020/4/2/1

Available at: <https://uzjournals.edu.uz/buxdu/vol4/iss2/12>

This Article is brought to you for free and open access by 2030 Uzbekistan Research Online. It has been accepted for inclusion in Scientific reports of Bukhara State University by an authorized editor of 2030 Uzbekistan Research Online. For more information, please contact sh.erkinov@edu.uz.

ЛИТЕРАТУРА

1. Vakulov B. G. *Operatori tipa potentsiala v obobshennix klassax Geldera.* // *Izv. vuz. Matematika.* 1986. № 11. S. 66-69.
2. Karapetyants N.K., Murdaev X.M., Yakubov A.Ya. *Ob izomorfizme, osushestvlyаемom drobnimi integralami v obobshennix klassax Geldera.* // *Dokl. AN SSSR.* 1990. T. 314. №2. S. 288-291.
3. Karapetyants N.K., Murdaev X.M., Yakubov A.Ya. *Ob izomorfizme, osushestvlyаемom drobnimi integralami v obobshennix klassax Nikolskogo.* // *Izv.vuzov.Matem.* 1992. №9. S. 49-58
4. Murdaev X.M. *Otsenka modulya neprerivnosti integralov i proizvodnix drobnogo poryadka.* Dep. V VINITI 14.0435. №4209. - Grozny, 1985.
5. Rubin B.S. *Drobnie integrali v prostranstvax Geldera s vesom i operatori tipa potentsiala.* // *Izv.AN ArmSSR. Matem.* 1974. T.3. №4. S.308-324.
6. Rubin B.S. *Drobnie integrali i rissovi potentsiali s radialnoy plotnostyu v prostranstvax so stepennim vesom.* // *Izv. AN ArmSSR. Mat.* 1986. T.21. №5. S. 488-503
7. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integrali i proizvodnie drobnogo poryadka i nekotorie ix prilozheniya.* - Minsk: Nauka i Texnika, 1987.
8. Samko S.G., Murdaev X.M. *Vesovie otsenki moduley neprerivnosti drobnix integralov ot funktsiy, imeyushix s vesom zadanniy modul neprerivnosti.* Rostov n/D, 1986. S. 42. Dep. VINITI 11.05.86, № 3351-V.
9. Samko S.G., Murdaev X.M. *Deystvie drobnogo integrodifferentsirovaniya v vesovix obobshennix prostranstvax Geldera.* // *Voprosi vichisleniy i prikladnoy matematiki.* - Tashkent, 1986. Vip. 80. s. 116-117.
10. Samko S.G., Murdaev X.M. *Operatori drobnogo integrodifferentsirovaniya v vesovix obobshennix prostranstvax Geldera s vesom.* Rostov n/D, 1986. S. 25. Dep. VINITI 11.05.86, № 3350-V.
11. Hardy H.G. and Littelwood J.E. *Some properties of fractional integrals. I.* // *Math. Z.* 1928, Bd 27, N 4, 565-606.
12. Karapetyants N.K. and Samko N.G.. *Weighted theorems on fractional integrals in the generalized Hölder spaces $H_0^\omega(\rho)$ via the indices m_ω and M_ω .* *Frac. Calc. Appl. Anal.* 7, N 4 (2004), pp. 437-458.
13. Karapetyants N.K. and Shankishvili L. D. *A short proof of Hardy— Littlewood — Type theorem for fractional integrals in Holder spaces.* *Fractional Calculus and Applied Analysis.* 1999. V. 2, № 2. P. 177-192.
14. Karapetyants N.K. and Shankishvili L. *Fractional integro-differentiation of the complex order in generalized Hölder spaces $H_0^\omega([0,1],\rho)$* // *Integral Transforms Spec.Funct.* 13, N 3 (2002), 199-209.
15. Samko S.G., Musalaeva Z.U. *Fractional type operators in weighted generalized Holder spaces* // *Proc. of Georgian Acad. Sci. encens. Math.* 1993. V. 1, № 5. P. 601-626.

УДК: 696.11

**ТОВУШ ТЕЗЛИГИДАН ПАСТ, ЎҚҚА НИСБАТАН СИММЕТРИК БЎЛГАН
СТРУЯНИ ν_t -92 ТУРБУЛЕНТ МОДЕЛЬ ОРҚАЛИ ТАДҚИҚ ҚИЛИШ**

**ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ ν_t -92 ДЛЯ РАСЧЕТА
ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДОЗВУКОВОЙ СТРУИ**

**RESEARCH OF ν_t -92 TURBULENCE MODEL FOR CALCULATING AN
AXISYMMETRIC SOUND JET**

Мадалиев Муродил Эркинжон угли

*PHD III года обучения в лаборатории механика жидкости и газа
института МИСС им М.Т. Уразбоева АН зУз,*

Наврузов Дилшод Примкулович

*PHD I года обучения в лаборатории механика жидкости и газа
института МИСС им М.Т. Уразбоева АН зУз*

Madaliev Murodil Erkinjon oglu

doctoral student in the laboratory of fluid and gas mechanics

Institute of Mechanics and seismic resistance of structures named after M.T. Urazboeva AS RUz

Navruzov Dilshod Primkulovich

doctoral student in the laboratory of fluid and gas mechanics

Institute of Mechanics and seismic resistance of structures named after M.T. Urazboeva AS RUz

Аннотация. Бир параметрли турбулент ν_t -92 Секундов моделини товуш тезлигидан паст, ўққа нисбатан симметрик бўлган струяни тадқиқ этиш. Сонли натижалар

эксперимент натижалари тезлик, кучланиш, температураларни тарқалиши билан таққослаш. Оқим турбулент характерга эга бўлгани учун, Рейнольдс сони бўйича ўрта қиймати олинган Навье-Стокс тенгламалар системаси қўлланилган (RANS). Қўйилган масала учун соплогача бўлган масофанинг умумлашган ψ оқим функцияси киритилган.

Таянч сўзлар: секундов v_t -92, Навье-Стокс тенгламаси, оқим функцияси, ошкормас схема, турбулент оқим.

Аннотация. Проведен сравнительный анализ использования модель турбулентности: однопараметрическая модель Секундова v_t -92 на задаче осесимметричной дозвуковой струи. Проведено сравнение результатов расчёта с результатами экспериментов распространение скорости, напряжения и температуры. Течение имеет турбулентный характер, поэтому в качестве математической модели используется система уравнений Навье-Стокса осредненных по Рейнольдсу (RANS). Для поставленной задачи введена обобщенная функция тока ψ . Было выведено сравнение результатов модели v_t -92 с опытными данными из [5] безразмерной осевой скорости от расстояния до сопла.

Ключевые слова: v_t -92 секундова, уравнение Навье-Стокса, функция тока, неявная схема, турбулентная струя.

Abstract. A comparative analysis of the use of the turbulence model is carried out: the one-parameter Secundov v_t -92 model on the problem of an axisymmetric subsonic jet. The calculation results are compared with experimental results on the propagation of speed, voltage, and temperature. The flow is turbulent, therefore, as a mathematical model, the system of Navier-Stokes equations averaged by Reynolds (RANS) is used. For the posed problem, a generalized stream function ψ is introduced. A comparison was made of the results of the v_t -92 model with experimental data from [5] the dimensionless axial velocity from the distance to the nozzle.

Key words: secundov v_t -92, Navier-Stokes equations, stream function, implicit scheme, turbulent jet.

Введение. Во многих случаях движения жидкости и газа возникают так называемые поверхности тангенциального разрыва; течение жидкости в окрестности такой поверхности называется струей. В зависимости от относительного направления движения струи могут быть спутными или встречными. Тангенциальный разрыв терпят такие, например, параметры, как скорость течения, температура, концентрация примеси; распределение же статического давления оказывается непрерывным. Как известно, на поверхности тангенциального разрыва в связи с ее неустойчивостью возникают вихри, беспорядочно движущиеся вдоль и поперек потока; вследствие этого между соседними струями происходит обмен конечными массами (молями), т.е. поперечный перенос количества движения, тепла и примесей.

В результате на границе двух струй формируется область конечной толщины с непрерывным распределением скорости, температуры и концентрации примеси; эта область называется струйным турбулентным пограничным слоем. При очень малых значениях числа Рейнольдса струйный пограничный слой может быть ламинарным, но на этих сравнительно редких случаях течениях. Наиболее изученным видом турбулентной струи является струя, распространяющаяся в покоящейся среде; такая струя называется затопленной. При равномерном поле скорости в начальном сечении затопленной струи границы ее пограничного слоя представляют собой расходящиеся поверхности, которые пересекаются у кромки сопла.

С внешней стороны пограничный слой струи соприкасается с неподвижной жидкостью, причем под внешней границей понимают поверхность, во всех точках которой составляющая скорости по оси x равна нулю ($u = 0$). С внутренней стороны пограничный слой переходит в ядро постоянной скорости, поэтому на внутренней границе пограничного слоя скорость потока равна скорости истечения $u = u_0$. Многочисленные опыты показывают, что профили

избыточных значений скорости, температуры в турбулентной струе, распространяющейся в спутном потоке жидкости, имеют такой же характер, как и в затопленной струе [1].

В настоящей работе проведено сравнительное тестирование модель Секундова (ν_t -92) на задаче осесимметричной дозвуковой струи. Эта задача имеет два положительных свойства. Во-первых, она очень близка к реальным задачам расчета дозвуковой струи в турбинах авиационных двигателей, а во-вторых, для нее существуют очень подробные экспериментальные данные [1,5].

Математическая модель. Так как течение имеет турбулентный характер, в качестве математической модели будем использовать систему уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу (RANS). Уравнения стационарного переноса импульса и температуры в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial rv}{r\partial r} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r(v + \nu_t) \frac{\partial u}{\partial r} \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \frac{\partial T}{\partial r} \right), \end{cases} \quad (1)$$

здесь: ν , ν_t – молекулярная и турбулентная вязкость, Pr , Pr_t – молекулярное и турбулентное числа Прандтля. Начальные и граничные условия для системы уравнений (1) ставятся стандартным образом [6].

Моделирование турбулентности. Модель Секундова ν_t -92 [4]. Эта модель относится к классу однопараметрических моделей турбулентности. Здесь появляется только одно дополнительное уравнение для расчета кинематического коэффициента вихревой вязкости. Это низкорейнольдсовая модель, которая описывает всю область течения, включая пристеночные слои. Эта модель была усовершенствована за прошедшие годы, включая модель под названием ν_t -90. Ссылка для модели с одним уравнением ν_t -92 [5]:

$$\frac{\partial \rho \nu_t}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u_j \nu_t)}{\partial x_j} = \rho (P_\nu - D_\nu) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho (\nu + C_0 \nu_t) \frac{\partial \nu_t}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\rho (-\nu + (C_1 - C_0) \nu_t) \frac{\partial \nu_t}{\partial x_j} \right]. \quad (2)$$

где

$$P_\nu = \rho C_2 A_2 (\nu_t \Gamma_1 + A_1 \nu_t^{4/3} \Gamma_2^{2/3}) + \rho C_2 F_2 A_2 N_1 \sqrt{(\nu + \nu_t) \Gamma_1} + \rho C_3 \nu_t \left(\frac{\partial^2 \nu_t}{\partial x_j \partial x_j} + N_2 \right),$$

$$D_\nu = \rho C_5 \nu_t^2 \Gamma_1^2 / a^2 + \rho C_4 \nu_t \left(\frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j} + \left| \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_j} \right| \right) + \rho [C_6 \nu_t (N_1 d_\omega + \nu_{t,\omega}) + C_7 F_1 \nu \nu_t] / d^2.$$

Здесь: a - скорость звука, а угловые скобки $\langle \rangle$ представляют собой среднее по времени. Турбулентная вихревая вязкость: $\mu_t = \rho \nu_t$.

Другие термины, встречающиеся в приведенных выше уравнениях, определяются как:

$$F_1 = \frac{N_1 d_w + 0.4 C_8 \nu}{\nu_t + C_8 \nu + \nu_{t,w}}, F_2 = \frac{\chi^2 + 1.3 \chi + 0.2}{\chi^2 - 1.3 \chi + 1.0}, \chi = \frac{\nu_t}{7\nu}, \Gamma_1 = \sqrt{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)},$$

$$\Gamma_2 = \sqrt{\sum_i \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} \right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_n \partial x_n} \right) + \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_m \partial x_m} \right)}, N_1 = \sqrt{\frac{\partial \nu_t}{\partial x_j} \frac{\partial \nu_t}{\partial x_j}}, N_2 = \sqrt{\frac{\partial N_1}{\partial x_j} \frac{\partial N_1}{\partial x_j}}.$$

Термин d_w расстояние до ближайшей стены, и $d = d_w + 0.01 k_s$. и k_s является высотой

шкалы шероховатости Никурадзе (0 для гладких стен).

Константы: $A_1=-0.5$, $A_2=4.0$, $C_0=0.8$, $C_1=1.6$, $C_2=0.1$, $C_3=4.0$, $C_4=0.35$, $C_5=3.5$, $C_6=2.9$, $C_7=31.5$, $C_8=0.1$.

Численный метод. В большинстве случаев для численного исследования системы (1,2) использовались методы в двумерной постановке. Более того, для достижения необходимой точности вблизи стенки расчетная сетка в поперечном направлении сгущалась. Все это приводило к увеличению памяти программы и замедлению скорости расчета. Поэтому разработать численный алгоритм не требующих больших вычислительных ресурсов является актуальной задачей.

Для поставленной задачи введем обобщенную функцию тока ψ , для которой справедливы соотношения:

$$U = \frac{\psi^n \partial \psi}{r \partial r}, V = -\frac{\psi^n \partial \psi}{r \partial x}.$$

Тогда уравнение неразрывности системы (1) будет удовлетворяться автоматически. Запишем систему (1) в переменных Мизеса [7] (ξ, ψ) , где $\xi=x$.

n – показатель сгущенности расчетных точек вблизи стеки. С увеличением данного показателя увеличивается и сгущенность точек. Далее, для расчетов авторами было использовано значение $n=1$.

В новых переменных, производные определяются по известной формуле:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \psi},$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \psi}.$$

В новых переменных система уравнений (1) приобретает вид

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\psi \partial \psi} \left[(v + v_t) \frac{u \partial u}{\psi \partial \psi} \right],$$

$$\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\psi \partial \psi} \left[\frac{u \partial T}{\psi \partial \psi} \left(\frac{v}{Pr} + \frac{v_t}{Pr_t} \right) \right],$$

$$\frac{\partial v_t}{\partial \xi} = (P_v - D_v) + \frac{\partial}{\psi \partial \psi} \left[(v + C_0 v_t) \frac{u \partial v_t}{\psi \partial \psi} \right] + \frac{\partial}{\psi \partial \psi} \left[(-v + (C_1 - C_0) v_t) \frac{u \partial v_t}{\psi \partial \psi} \right],$$
(3)

Таким образом, новые переменные позволяют привести все уравнения системы к параболическому виду и данную систему можно записать в векторном виде:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\psi \partial \psi} \left(q \frac{u \partial \Phi}{\psi \partial \psi} \right) + w. \quad (4)$$

В этом уравнении:

$$\Phi = \begin{bmatrix} u \\ T \\ v_t \end{bmatrix} \quad q = \begin{bmatrix} v + v_t \\ \frac{v}{Pr} + \frac{v_t}{Pr_t} \\ (v + C_0 v_t) \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (P_v - D_v) + \frac{\partial}{\psi \partial \psi} \left[(-v + (C_1 - C_0) v_t) \frac{u \partial v_t}{\psi \partial \psi} \right] \end{bmatrix}$$

Для численной реализации уравнения (4) была использована неявная схема

$$\frac{\Phi_{i,j} - \Phi_{i-1,j}}{\Delta \xi} = \frac{0.5}{\psi_j \Delta \psi^2} \left[(q_{j+1} + q_j) (\Phi_{i,j+1} - \Phi_{i,j}) - (q_j + q_{j-1}) (\Phi_{i,j} - \Phi_{i,j-1}) \right] + w_j.$$

Данная схема является абсолютно устойчивой и неизвестные на новом слое находились методом прогонки. Для интегрирования были использованы $\Delta \xi = 0.001$, $\Delta \psi = 0.01$. Количество узлов в радиальном направлении было 600. Система (3) решалась для $Re=5600$. Хорошее соответствие с экспериментальными данными дают следующие начальные условия: $U=1$, $v_t=0.0005$. Численные результаты оказались не чувствительными к изменениям шага как по

ζ , так и по ψ .

Результаты расчетов. Приведем некоторые конкретные примеры, иллюстрирующие кратко описанные выше свойства ν_t -92 модель.

На рис. 1 выведено сравнение результатов модель ν_t -92 с опытными данными из [5] безразмерной осевой скорости от расстояния до сопла.

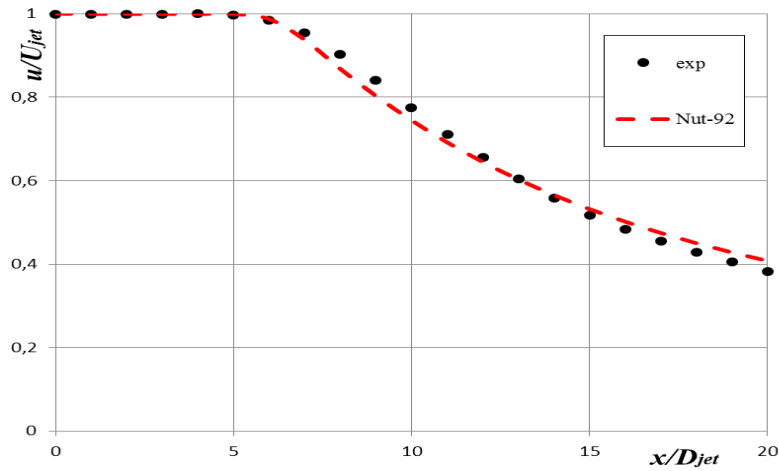
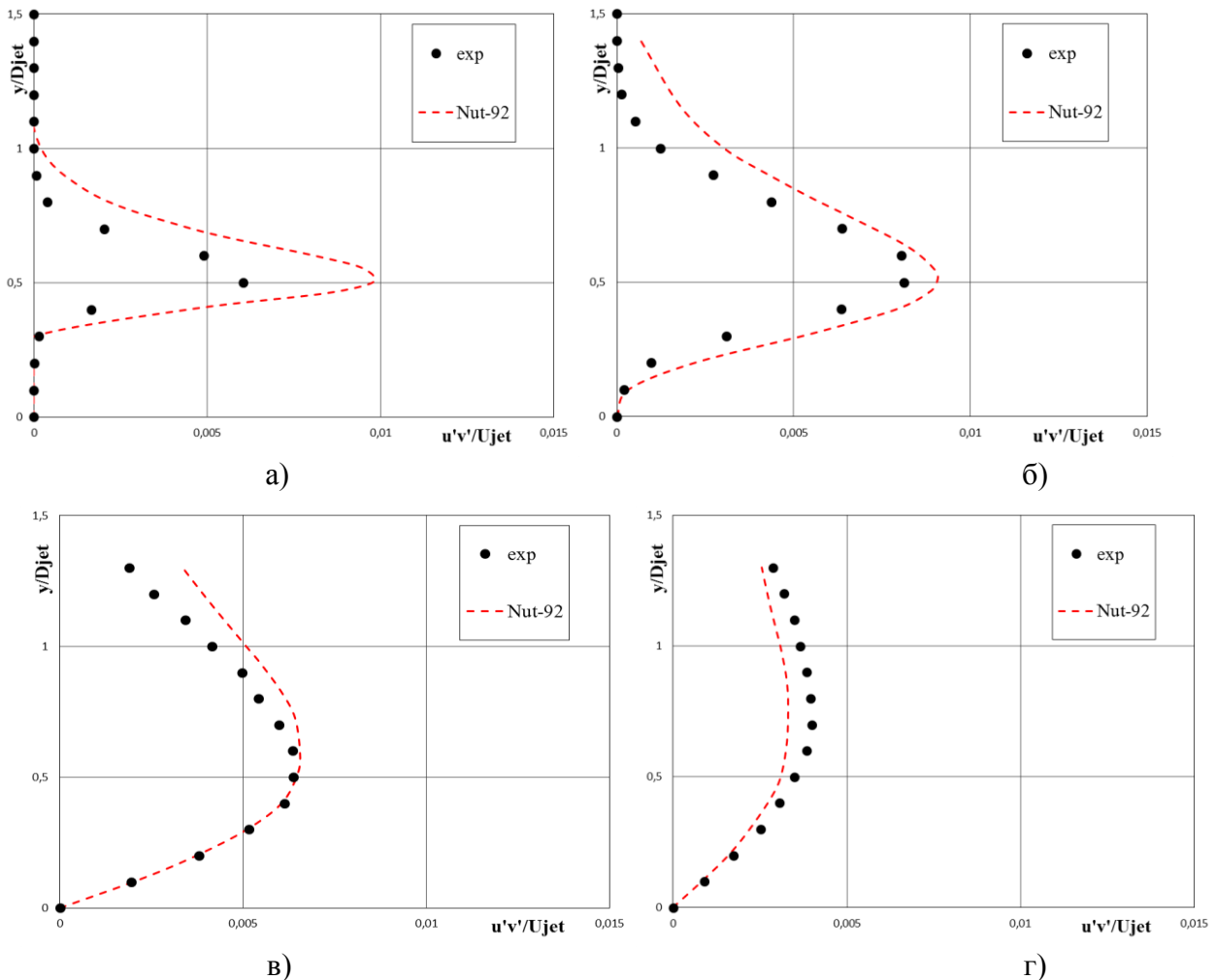
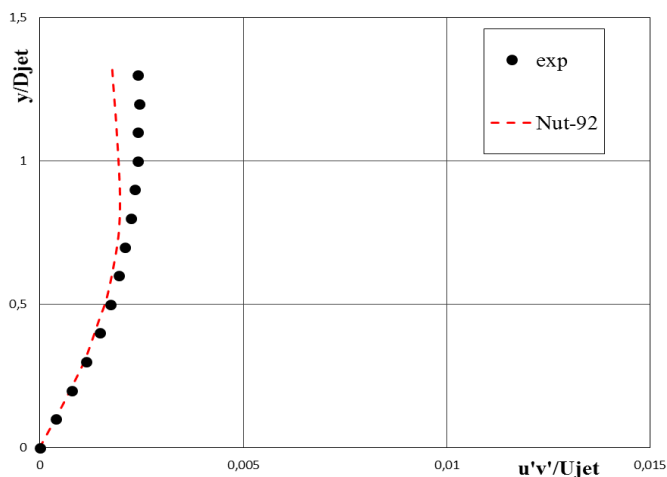


Рис. 1. Сравнение модель ν_t -92 с опытными данными для безразмерной осевой скорости от расстояния до сопла

На рис. 2 а, б, в, г, д выведено сравнение результатов модель ν_t -92 с опытными данными [5] для профилей турбулентного напряжения для различных сечений.

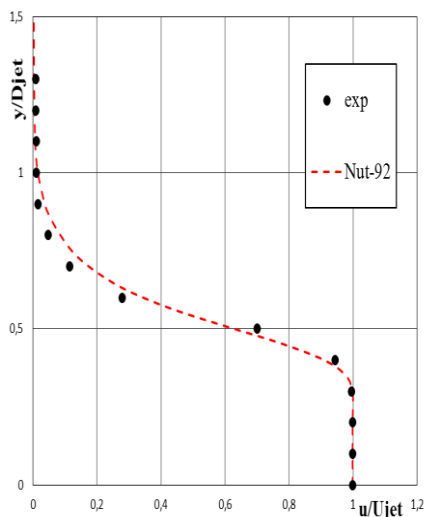




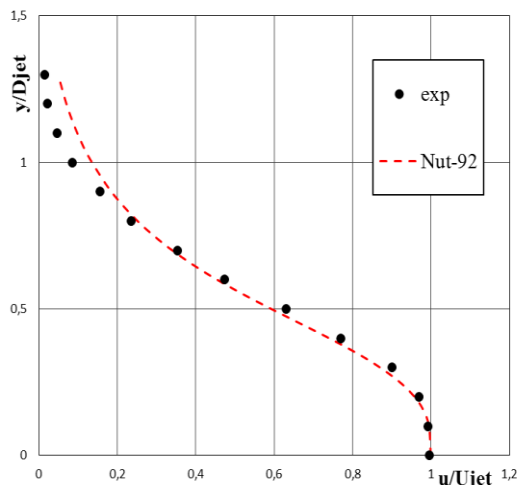
д)

Рис. 2. Сравнение результатов модель ν_t -92 с опытными данными [5] профили турбулентного напряжения для различных сечений с условий экспериментов, а) $x / D_{jet} = 2$, б) $x / D_{jet} = 5$, в) $x / D_{jet} = 10$, г) $x / D_{jet} = 15$, д) $x / D_{jet} = 20$ соответственно

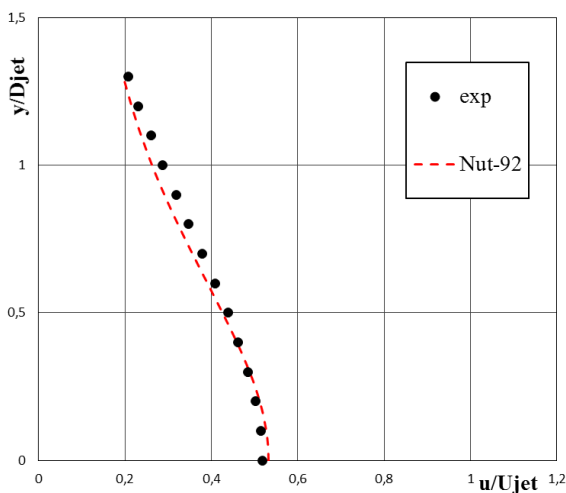
На рис. 3 а, б, в, г, д показано сравнение результатов модель ν_t -92 с опытными данными [5] для профилей безразмерных продольных скоростей в различных расстояниях от сопла.



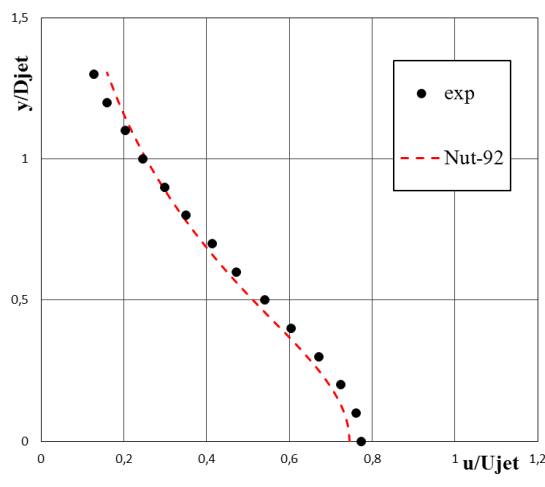
а)



б)



в)



г)

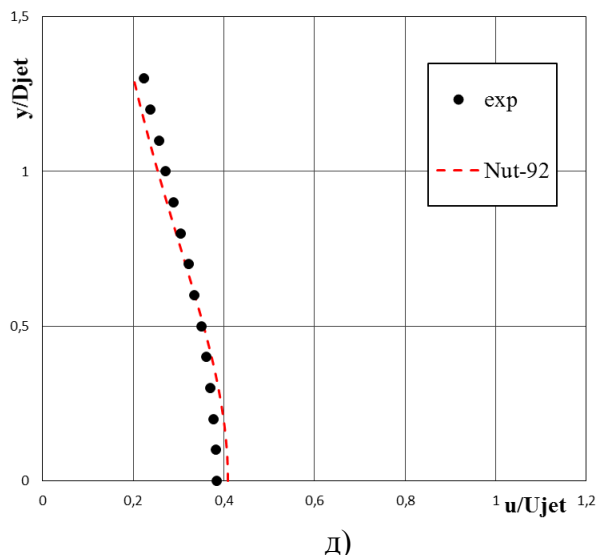
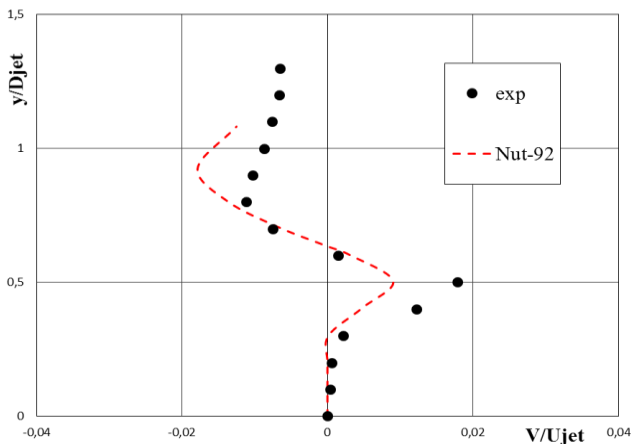
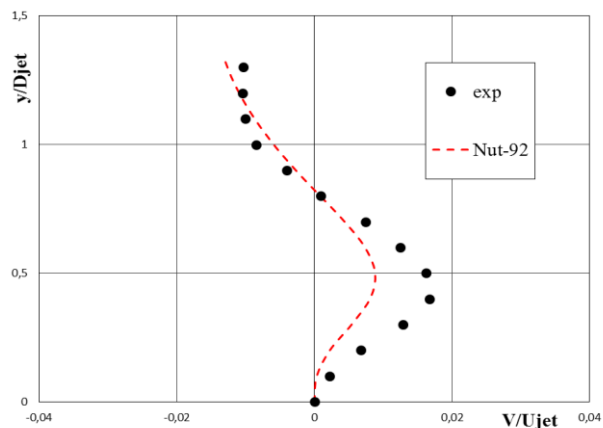


Рис. 3. Сравнение результатов модель ν_t -92 с опытными данными [5] профили продольных скоростей для различных сечений с условий экспериментов, а) $x / D_{jet} = 2$, б) $x / D_{jet} = 5$, в) $x / D_{jet} = 10$, г) $x / D_{jet} = 15$, д) $x / D_{jet} = 20$ соответственно

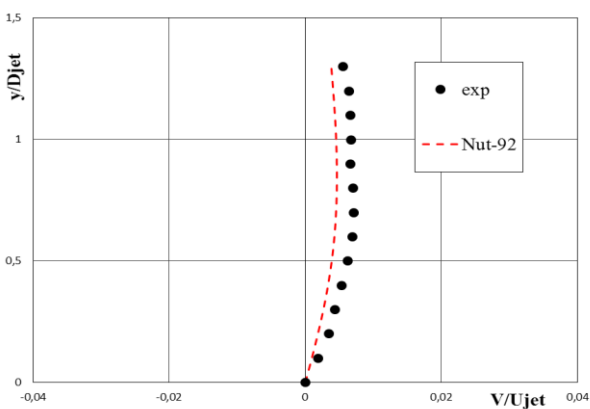
На рис. 4 а, б, в, г, д показано сравнение модель ν_t -92 с опытными данными [5] иллюстрируются для профилей безразмерной поперечной скорости в различных расстояниях от сопла.



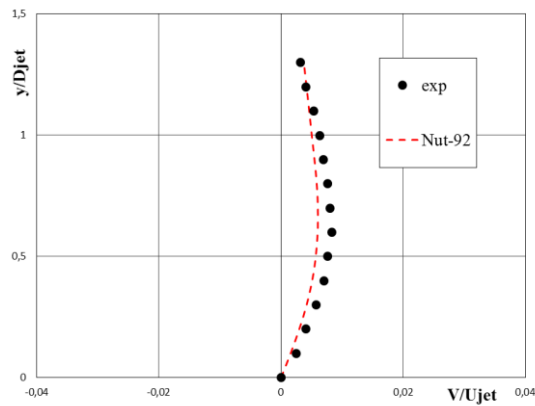
а)



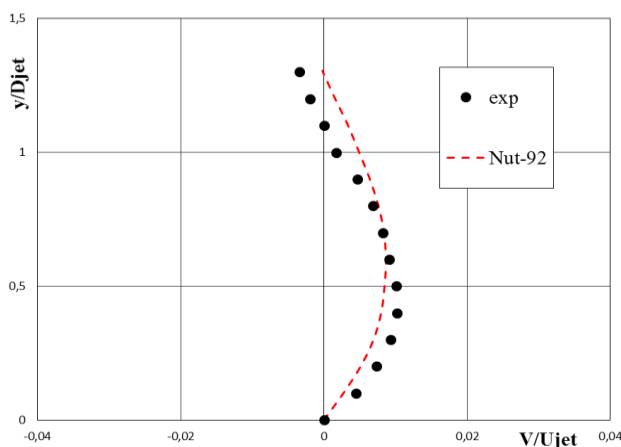
б)



в)



г)



д)

Рис. 4. Сравнение результатов модель ν_t -92 с опытными данными [5] профили поперечной скорости для различных сечений, а) $x / D_{jet} = 2$, б) $x / D_{jet} = 5$, в) $x / D_{jet} = 10$, г) $x / D_{jet} = 15$, д) $x / D_{jet} = 20$ соответственно

На рис. 5 приведен универсальный профиль скорости, полученный в опытах [1] и результаты расчета на ν_t -92 в основном участке осесимметричной струи воздуха, вытекающей в воздушный поток того же направления и той же температуры; безразмерные избыточные значения скорости построены в зависимости от безразмерных ординат:

$$\frac{u - u_{\delta}}{u_m - u_{\delta}} = f\left(\frac{y}{y_{0,5}}\right), \quad \frac{T - T_{\delta}}{T_m - T_{\delta}} = f\left(\frac{y}{y_{0,5}}\right).$$

Где: u_{δ} – скорость спутного потока; $y_{0,5}$ – расстояние от оси струи до места, в котором избыточная скорость вдвое меньше своего максимального значения:

$$u_c - u_{\delta} = 0.5(u_m - u_{\delta}).$$

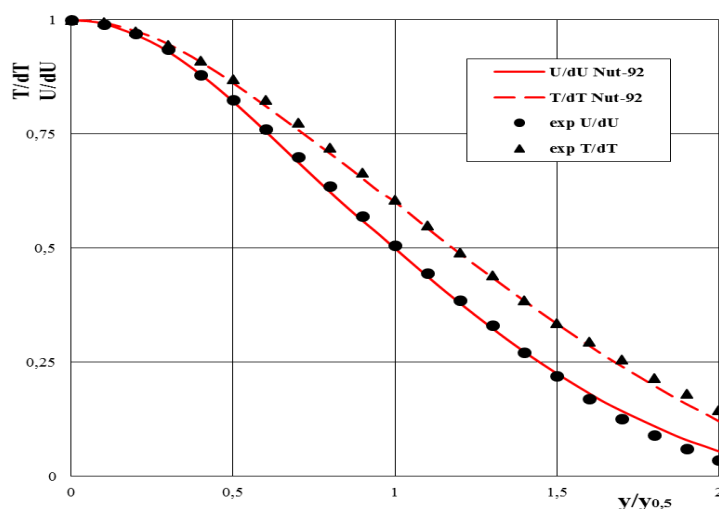


Рис. 5. Безразмерный профиль-избыточной скорости и температуры в основном участке осесимметричной воздушной струи, распространяющейся в спутном потоке воздуха, по опытными данными [1]

Заключение. Проведено сравнительное тестирование модель ν_t -92 Секундова [4] на задаче о осесимметричной дозвуковой струи.

Проведено сравнение результатов расчёта с результатами экспериментов из [1,5]. Получено, что это модель турбулентности дают очень близкие расчетные результаты для струйных течений. В целом наблюдается удовлетворительное совпадение расчетных и экспериментальных данных.

Поскольку многие модели турбулентности показали практически идентичные результаты см [4], как для струйных течений типа осесимметричной дозвуковой струи рекомендуется применять модель ν_t -92 Секундова [4]. Она показала меньшую чувствительность к величине шага по времени, а также требует меньших затрат машинного времени и памяти, поскольку является однопараметрической моделью с одним дифференциальным уравнением и результаты очень близки к экспериментальным данным чем результаты моделей Спаларта-Аллараса [2] и Ментера [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Abramovich G.N., *Teoriya turbulentnix strui*. - Moskva: Nauka, 1984 g. - 716 s.
2. Spalart P.R., Allmaras S.R. *A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows*. AIAA-92-0439.
3. Menter F.R. *Two-equation eddy viscosity turbulence models for engineering applications*. //AIAA J. 1994.32, № 11. P.1299-1310.
4. Shur M., Strelets M., Zaykov L., Gulyaev A., Kozlov V., Sekundov A. *Sravnitelnoe chislennoe testirovanie odno i dvux viravnivayushix modeley turbulentnosti dlya techeniy s razdeleniem i prisoedineniem*, -AIAA Paper 95-0863, yanvar 1995 g.
5. "Turbulence modeling Resource. NASA Langley Research Center", <http://turbmodels.larc.nasa.gov>.
6. Bradshaw P., Ferriss D.H., Atwell N.P. "Calculation of boundary layer development using the turbulent energy equation", *J. Fluid Mech.*, 1967.
7. Mises R., *Zs. angew. Math. u. Mech.*, 7, 425(1927).