

3-26-2019

A PROBLEM OF BITSADZE-SAMARSKI FOR AN INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATION

A K. Urinov
Fergana State University

Follow this and additional works at: <https://uzjournals.edu.uz/ferpi>

Recommended Citation

Urinov, A K. (2019) "A PROBLEM OF BITSADZE-SAMARSKI FOR AN INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATION," *Scientific-technical journal*: Vol. 22 : Iss. 1 , Article 56.
Available at: <https://uzjournals.edu.uz/ferpi/vol22/iss1/56>

This Article is brought to you for free and open access by 2030 Uzbekistan Research Online. It has been accepted for inclusion in Scientific-technical journal by an authorized editor of 2030 Uzbekistan Research Online. For more information, please contact sh.erkinov@edu.uz.

УДК 517.927

A PROBLEM OF BITSADZE-SAMARSKI FOR AN INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATION

A.K. Urinov, M.M. Abdumannopov

Fergana State University

ЗАДАЧА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ОДНОГО ИНТЕГРО- ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

A.K. Уринов, M.M. Абдуманнопов

Ферганский государственный университет

БИР ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН БИЦАДЗЕ-САМАРСКИЙ МАСАЛАСИ

A.K. Ўринов, M.M. Абдуманнопов

Фарғона давлат Университети

In the article, a problem with condition of Bitsadze-SamarSKI was investigated for an ordinary differential equation which includes integral operator.

Keywords: differential equation, integral operator, boundary-value problem, Bitsadze-SamarSKI's condition, integral equation.

В этой статье изучена задача Бицадзе-Самарского для одного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, содержащий интегральный оператор.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, краевая задача, интегральное уравнение, условие Бицадзе-Самарского.

Ушбу мақолада интеграл оператор қатнашган иккинчи тартибли интегро-дифференциал тенглама учун Бицадзе-Самарский масаласи ўрганилган.

Таянч сўзлар: дифференциал тенглама, чегаравий масала, Бицадзе-Самарский шарт, интеграл тенглама.

Фараз қилайлик, берилган $a(x), b(x), c(x)$ ва $f(x)$ функциялар $[0,1]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. $(0,1)$ интервалда

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) + c(x) \int_0^x y(t) \bar{J}_s[\lambda(x-t)] dt = f(x), \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

интегро - дифференциал тенгламани қарайлик, бу ерда λ - берилган хақиқий сон, $\bar{J}_s(x) = \Gamma(s+1)(x/2)^{-s} J_s(x)$ -Бессел-Клиффорд функцияси, $J_s(x)$ эса Бессел функцияси [1], $s > (-1/2)$.

BS масала. (1) тенгламининг $[0,1]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$y(0) = \alpha y(\xi) + k_1, \quad y(1) = \beta y(\eta) + k_2, \quad (2)$$

бу ерда α, β, k_1 ва k_2 - берилган хақиқий сонлар, $\xi, \eta \in (0,1)$.

1-теорема. Агар $b(x) < x \ll \lambda$ $x \in (0,1)$ ва $|\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 1$ тенгсизликлар бажарилса, BS масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.

SHORT MESSAGES

Исбот. Фараз қилайлик, BS масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин. У ҳолда $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ функция

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) + c(x) \int_0^x y(t) \bar{J}_s[\lambda(x-t)] dt = 0, \quad x \in (0,1); \quad (3)$$

$$y(0) = \alpha y(\xi), \quad y(1) = \beta y(\eta) \quad (4)$$

шартларни қаноатлантиради.

Фараз қилайлик, $\{(3),(4)\}$ масала $y(x) \neq 0, x \in [0,1]$ ечимга эга бўлсин. У ҳолда Вейерштрасс теоремасига асосан [2] қуйидаги муносабат

$$\sup_{[0,1]} |y(x)| = |y(x_0)| = M > 0$$

ўринли бўлади, бу ерда $x_0 \in [0,1]$ ораликда ётувчи ўзгармас сон. Агар $x_0 = 0$ десак, $|y(\xi)| < |y(0)|$ тенгсизлик ўринли бўлиб, (4) шартларнинг биринчисидан $|y(0)| < |\alpha| |y(0)| \leq |y(\xi)| < |y(0)|$,

яъни, $|y(0)| < |y(0)|$ кўринишдаги нотўғри тенгсизликка келамиз. Демак, $x_0 \neq 0$.

Фараз қилайлик, $x_0 = 1$ бўлсин. У ҳолда $|y(\eta)| < |y(1)|$ тенгсизлик ўринли бўлиб, (4) шартларнинг иккинчисидан қуйидаги

$$|y(1)| < |\beta| |y(1)| \leq |y(\eta)| < |y(1)|$$

тенгсизлик, яъни $|y(1)| < |y(1)|$ кўринишдаги нотўғри тенгсизликка эга бўламиз. Демак, $x_0 \neq 1$.

У ҳолда, $x_0 \in (0,1)$. Шунинг учун қуйидаги тенглик ўринли бўлиши зарур:

$$y''(x_0) + a(x_0)y'(x_0) + b(x_0)y(x_0) + c(x_0) \int_0^{x_0} y(t) \bar{J}_s[\lambda(x_0-t)] dt = 0.$$

Бу тенгликни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$y''(x_0) + a(x_0)y'(x_0) + c(x_0) \int_0^{x_0} \{y(x_0) + y(t) \bar{J}_s[\lambda(x_0-t)]\} dt + [b(x_0) - x_0 c(x_0)] y(x_0) = 0. \quad (5)$$

Агар $x_0 - y(x)$ функциянинг мусбат максимумга эришадиган нуқтаси бўлса, $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) \leq 0$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Бундан ташқари $s > (-1/2)$ бўлгани учун $|\bar{J}_s[\lambda(x_0-t)]| \leq 1$ бўлиб [1], $y(x_0) + y(t) \bar{J}_s[\lambda(x_0-t)] \geq 0$ тенгсизлик ҳам бажарилади. Теорема шартига асосан $b(x_0) - x_0 c(x_0) < 0$. Буларни ва $c(x_0) \leq 0$ шартни эътиборга олсак,

$$y''(x_0) + a(x_0)y'(x_0) + c(x_0) \int_0^{x_0} \{y(x_0) + y(t) \bar{J}_s[\lambda(x_0-t)]\} dt + [b(x_0) - x_0 c(x_0)] y(x_0) < 0$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса (5) тенгликка зид.

Агар $x_0 - y(x)$ функциянинг манфий минимум қабул қиладиган нуқтаси бўлса, яъни $y(x_0) < 0$ бўлса, (5) нинг иккала томонини (-1) га кўпайтириб, юқоридаги мулоҳазаларни

$[-y(x)]$ функцияга нисбатан такрорлаб, (5) тенгликка зид тенгсизликка келамиз. Демак, $x_0 \notin (0,1)$.

Юқорида олинган қарама-қаршиликлардан $y(x) \neq 0, x \in [0,1]$ деган фаразимизнинг нотўғрилиги келиб чиқади. Унда $y(x) \equiv 0$, яъни $y_1(x) = y_2(x), x \in [0,1]$ тенглик ўринли. 1-теорема исботланди.

2-теорема. Агар 1-теорема шартлари ва $a(x) \in C^1[0,1]$, $1 - \alpha + \beta\eta(\alpha - 1) + \alpha\xi(1 - \beta) \neq 0$ шартлар бажарилган бўлса, BS масаланинг ечими мавжуд бўлади.

Исбот. (1) тенгламани

$$y''(x) = f_1(x), x \in (0,1) \tag{6}$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$f_1(x) = f(x) - a(x)y'(x) - b(x)y(x) - c(x) \int_0^x y(t) \bar{J}_s[\lambda(x-t)] dt.$$

Агар $f_1(x)$ функцияни вақтинча маълум деб ҳисобласак, (6) тенгламанинг $y(x)$ ечими учун

$$y(x) = y(0)(1-x) + y(1)x + \int_0^1 G(x,t) f_1(t) dt, x \in [0,1] \tag{7}$$

тенглик ўринли бўлади [3], бу ерда $G(x,t)$ - Грин функцияси:

$$G(x,t) = \begin{cases} x(t-1), & x \leq t; \\ (x-1)t, & x \geq t. \end{cases} \tag{8}$$

(7) тенгликка $f_1(x)$ функциянинг ифодасини қўйиб, сўнгра ҳосил бўлган тенгликда $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлақлаймиз ва $\gamma(t)$ иштирок этган ҳадда эса интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x) = y(0)(1-x) + y(1)x + \int_0^1 f(t)G(x,t) dt + \int_0^1 M_2(x,t) y(t) dt, x \in [0,1] \tag{9}$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M_2(x,t) = [G(x,t)a(t)]'_t - b(t)G(x,t) - G(x,t) \int_t^1 c(\xi) \bar{J}_s[\lambda(\xi-t)] dt.$$

(9) тенгликда $x = \xi$ ва $x = \eta$ деб, $y(\xi)$ ва $y(\eta)$ ларни топамиз. Сўнгра уларни (2) шартларга қўйиб, $y(-1)$ ва $y(1)$ номаълумларга нисбатан қуйидаги кўринишдаги чизиқли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} [1 - \alpha(1 - \xi)]y(0) - \alpha\xi y(1) = m_1 + \alpha \int_0^1 y(t)M_2(\xi,t) dt, \\ \beta(\eta - 1)y(0) + (1 - \beta\eta) y(1) = m_2 + \beta \int_0^1 y(t)M_2(\eta,t) dt, \end{cases} \tag{10}$$

бу ерда

$$m_1 = k_1 + \alpha \int_0^1 G(\xi,t) f(t) dt \quad m_2 = k_2 + \beta \int_0^1 G(\eta,t) f(t) dt,$$

SHORT MESSAGES

$$M_2(x,t) = [G(x,t)a(t)]'_t - b(t)G(x,t) - G(x,t) \int_t^1 c(t) \bar{J}_s[\lambda(x-t)] dt.$$

Теорема шартига асосан бу тенгламалар системасининг асосий детерминанти нолдан фарқли. Шунинг учун унинг ечими мавжуд ва ягона. $y(0)$ ва $y(1)$ ларнинг (10) системадан топилган ифодаларини (9) га қўйиб, баъзи соддалаштиришларни бажарсак, $y(x)$ функцияга нисбатан

$$y(x) + \int_0^1 K_1(x,t)y(t)dt = \Phi_1(x), \quad x \in (0,1) \quad (11)$$

кўринишдаги иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламасига эга бўламиз, бу ерда $K_1(x,t)$ ва $\Phi_1(x)$ - маълум функциялар бўлиб, α, β, k_1, k_2 сонлар ва $a(x), b(x), f(x), G(x,t)$ функциялар орқали ифодаланган.

(11) интеграл тенглама BS масалага эквивалент бўлиб, унга мос биржинсли интеграл тенглама $\{(3), (4)\}$ масалага эквивалентдир. Охириги масала фақат тривиал ечимга эга бўлгани учун (11) га мос биржинсли тенглама ҳам фақат тривиал ечимга эга. У ҳолда, Фредгольм альтернативасига асосан [4], (11) интеграл тенгламанинг ечими мавжуд ва ягона. (11) тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $y(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$. 2-теорема исботланди.

References:

- [1]. O'rinov A.Q. Maxsus funktsiyalar va maxsus operatorlar.-Farg'ona: Farg'ona nashriyoti, 2012. 112 bet.
- [2]. Azlarov T., Mansurov X.. Matematik analiz.-Toshkent: "O'qituvchi", 1994, 416 bet.
- [3]. O'rinov A.Q. Oddiy differentsial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar.-Toshkent: MUMTOZ SO'Z, 2014, 164 bet.
- [4]. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. –Toshkent: Yangiyul polygraph service, 2007, 256 bet.

Адабиётлар

- [1]. Ўринов А.Қ. Махсус функциялар ва махсус операторлар.-Фарғона: Фарғона нашриёти, 2012. 112 бет.
- [2]. Азларов Т., Мансуров Х.. Математик анализ.-Тошкент: "Ўқитувчи", 1994, 416 бет.
- [3]. Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар.-Тошкент: MUMTOZ SO'Z, 2014, 164 бет.
- [4]. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. –Toshkent: Yangiyul polygraph service, 2007, 256 bet.