Chemical Technology, Control and Management

Volume 2020 | Issue 1 Article 4

2-28-2020

INVESTIGATING THE SOLUTION PROPERTIES OF POPULATION MODEL OF CROSS-DIFFUSION MODEL WITH DOUBLE NONLINEARITY AND WITH VARIABLE DENSITY

Dildora Kabilovna Muhamediyeva
Scientific and Innovation Center of Information and Communication Technologies at Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, Address: Amir Temur street, 108, 100200, Tashkent city, Republic of Uzbekistan, matematichka@inbox.ru

ISSN 1815-4840
CHEMICAL TECHNOLOGY.
CONTROL AND MANAGEMENT
2020, №1 (91) pp.45-50
International scientific and technical journal
journal homepage: https://uzjournals.edu.uz/ijctcm/
Since 2005

UDC 519.71(575.1)

INVESTIGATING THE SOLUTION PROPERTIES OF POPULATION MODEL OF CROSS-DIFFUSION MODEL WITH DOUBLE NONLINEARITY AND WITH VARIABLE DENSITY

Dildora Kabilovna Muhamediyeva

Scientific and Innovation Center of Information and Communication Technologies at Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi,
Address: Amir Temur street, 108, 100200, Tashkent city, Republic of Uzbekistan
E-mail: matematichka@inbox.ru, Phone:+998-97-945-89-39

Abstract: *The models of two competing populations with double nonlinear diffusion and three types of functional dependencies are considered. The first dependence corresponds to the Malthusian type, the second to the Verhühlst type (logistic population), and the third to Olli-type populations. A common element of this kind of description is the presence of a linear source. Nonlinear sinks are also present in descriptions of populations of the Verhulst and Ollie type. Suitable initial approximations for a rapidly converging iterative process are proposed. Based on a self-similar analysis and comparison of the solutions of the Cauchy problem in the domain for an equation with double nonlinearity, the properties of the solution of the self-similar equation are investigated. The above properties are established on the basis of the solution comparison theorem, and the asymptotics of self-similar solutions are obtained.*
Keywords: *biological population, nonlinear system of differential equations, initial approximation, numerically, iterative process, self-similar solutions.*

Аннотация: *Икки карра ночизиқли диффузия ва уч турдаги функционал боғлиқликка эга рақобатлашувчи популяция модели кўриб чиқилган. Биринчи боғлиқлик Малтус турига, иккинчиси Ферхьюльст турига (логистик популяция) ва учинчиси Олли туридаги популяцияларга тўғри келади. Ушбу турдаги тавсифнинг умумий элементи чизиқли манбанинг мавжудлиги. Ферхьюльст ва Олли туридаги популяцияларни тавсифлашда чизиқли бўлмаган манбалар мавжуд ва дастлабки яқинлашишлар таклиф этилган. Икки карра ночизиқли тенглама учун автомоделли таҳлил ва Коши масаласини ечимларини таққослаш асосида автомоделли тенглама ечимининг хусусиятлари ўрганилган. Юқоридаги хусусиятлар ечимларни таққослаш теоремаси асосида аниқланди ва автомоделли ечимларнинг асимптоталари аниқланган.*
Таянч сўзлар: *биологик популяция, дифференциал тенгламаларнинг ночизиқли тизими, дастлабки яқинлашиш, итерацион жараён, автомоделли ечимлар.*

Аннотация: *Рассмотрены модели двух конкурирующих популяций с двойной нелинейной диффузией и тремя типами функциональных зависимостей. Первая зависимость соответствовала мальтузианскому типу, вторая –ферхьюльстовскому (логистическая популяция), а третья - популяции типа "Олли". Общим элементом такого рода описания является наличие линейного источника. В описаниях же популяций типа Ферхьюльста и Олли присутствуют также нелинейные стоки. Предложены подходящие начальные приближения для быстро сходимого итерационного процесса. На основе автомодельного анализа и сравнения решений задачи Коши в области для уравнения с двойной нелинейностью исследованы свойства решения автомодельного уравнения. Установлены указанные выше свойства на основе теоремы сравнении решения, получены асимптотики автомодельных решений.*
Ключевые слова: *биологическая популяция, нелинейная система дифференциальных уравнений, начальное приближение, итерационный процесс, автомодельные решения.*

Введение

Режимы с обострением в пространственной локализации в открытых диссипативных системах описываются моделями с нелинейной диффузией [1-2].

В последние годы стали обращать особое внимание на неограниченные решения, являющиеся причиной наличия энерговыделения, химической реакции и др. Именно такие решения возникают во многих физических процессах (например, горение). В связи с этим в последние годы сильно развивается теория blowup решений; этому вопросу посвящено много работ А.А.Самарского, С.П.Курдюмова, А.П.Михайлова, В.А.Галактионова, С.Н.Димовой и многих зарубежных ученых. Blowup решения были названы решениями с режимом обострения. Были развиты специальные методы исследования нелинейных параболических уравнений, которые позволяют провести достаточно подробное исследование blowup решений уравнения теплопроводности с источником [1, 2, 3]. Для исследования нелинейных задач интенсивно стали заниматься автомодельными и приближенно автомодельными решениями, так как исследование автомодельных уравнений относительно проще по сравнению с уравнениями в частных производных. Поэтому удается изучить качественные свойства решений исходных уравнений в частных производных посредством построения различных автомодельных уравнений. Используя их на примере нелинейной теплопроводности, фильтрации и диффузии, были установлены новые нелинейные эффекты.

Рассмотрим следующую систему двух уравнений в частных производных для одномерного случая:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial t} &= f(u_1,u_2) + D_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + h_1\frac{\partial}{\partial x}\left(Q_1(u_1,u_2)\frac{\partial u_2}{\partial x}\right),\\ \frac{\partial u_2}{\partial t} &= g(u_1,u_2) + D_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + h_2\frac{\partial}{\partial x}\left(Q_2(u_1,u_2)\frac{\partial u_1}{\partial x}\right).\end{aligned} \tag{1}$$

При $h_1 = h_2 = 0$ математическая модель (1) представляет собой систему типа реакция-диффузия с коэффициентами диффузии $D_1 \geq 0, D_2 \geq 0$ (по крайней мере, один $D_i \neq 0$). В случае, когда хотя бы один из коэффициентов $h_i \neq 0$ (знак может быть любым), система (1) является кросс-диффузионной. Линейной кросс-диффузии соответствует $Q_i(u,v) = const$ для i=1,2; нелинейной кросс-диффузии – $Q_i(u,v) \neq const$ хотя бы для одного i.

Уравнение (1) является обобщением простейшей диффузионной модели для логистической модели роста популяции [7-11] типа Мальтуса ($f_1(u_1,u_2)=u_1$, $f_1(u_1,u_2)=u_2$, $f_2(u_1,u_2)=u_1$, $f_2(u_1,u_2)=u_2$), типа Фёрсхюльста ($f_1(u_1,u_2)=u_1(1-u_2)$, $f_1(u_1,u_2)=u_2(1-u_1)$, $f_2(u_1,u_2)=u_1(1-u_2)$, $f_2(u_1,u_2)=u_2(1-u_1)$) и типа Олли ($f_1(u_1,u_2)=u_1(1-u_2^{\beta_1})$, $f_1(u_1,u_2)=u_2(1-u_1^{\beta_2})$, $f_2(u_1,u_2)=u_1(1-u_2^{\beta_1})$, $f_2(u_1,u_2)=u_2(1-u_1^{\beta_2})$, $\beta_1>1, \beta_2>1$) для случая двойной нелинейной диффузии. В случае , когда $\beta_1 \geq 1, \beta_2 \geq 1$, его можно рассматривать также, как уравнение нелинейной фильтрации, теплопроводности при одновременном воздействии источника и поглощения, мощности которых равны соответственно $u_1, -u_2^{\beta_1}, u_2, -u_1^{\beta_2}$, под воздействием конвективного переноса со скоростью $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ и $\frac{\partial u_2}{\partial x}$.

Кросс диффузионная система (1) возникает в различных прижатиях [1-3]. Известно, что многокомпонентные системы физики, биологии, химии и т.д. могут моделироваться уравнениями реакции-диффузии, когда градиент плотности одного вида индуцирует поток другого вида, происходит перекрестная диффузия.

В частности в [2] обсуждены некоторые результаты по кросс-диффузионным системам с энтропийной структурой

$$\partial_t u_i - \sum_{j=1}^{n} \mathrm{div}\left(A_{ij}(u)\nabla u_j\right) = f_i(u)\partial\Omega,\ t>0,\ i=1,\dots,n, \tag{2}$$

где $u_i(x, t)$ представляет собой плотность, концентрацию или объемную долю i-го вида многокомпонентной смеси, $u = (u_1 \dots, u_n)$, $A_{ij}(u)$ коэффициенты диффузии, $f(u)$ является реакционным членом i-го вида и $\Omega \subset R^N (N \geq 1)$ является ограниченной областью с гладкой границей.

В последние годы задача биологической популяции типа Колмогорова-Фишера к которой относится рассматриваемая задача (3) интенсивно изучается разными авторами ([2-5] и приведенные там ссылки).

В данной работе исследуется свойства решений задачи биологической популяции (3) с двойной нелинейностью. Основным методом исследования является автомодельный и численный подход. Доказывается, что система допускает автомодельный анализ решения, благодаря которому устанавливаются новые феномены – такие, как конечная скорость распространение возмущения, пространственная локализация решений.

Методы исследования и полученные результаты

В данной работе исследуется свойства решений задачи Коши с переменной плотностью. Основным методом исследования является автомодельный подход. Рассмотрим в области Q={(t,x): 0<t<∞, x∈R} параболическую систему двух квазилинейных уравнений реакции-диффузии задачи биологической популяции типа Колмогорова-Фишера

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\rho(x)u_1)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_1|x|^n u_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right) + \rho(x)k_1u_1\left(1-u_1^{\beta_1}\right), \\ \dfrac{\partial(\rho(x)u_2)}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_2|x|^n u_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right) + \rho(x)k_2u_2\left(1-u_2^{\beta_2}\right), \end{cases} \tag{3}$$

$$u_1|_{t=0} = u_{10}(x), \quad u_2|_{t=0} = u_{20}(x),$$

которое описывает процесс биологической популяции в нелинейной двухкомпонентной среде, коэффициент диффузии которого равен $D_1|x|^n u_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right|^{p-2}$, $D_2|x|^n u_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right|^{p-2}$ $m_1, m_2, n, p, \beta_1, \beta_2$, D_1, D_2 - положительные вещественные числа, $\beta_1, \beta_2 \geq 0$, $\rho(x) = |x|^{-l}$, $l > 0$; $u_1 = u_1(t,x) \geq 0$, $u_2 = u_2(t,x) \geq 0$ - искомые решения.

Автомодельную систему уравнений построим методом нелинейного расщепления [6].

Замена в (3)

$$u_1(t,x) = e^{-\int_0^t k_1(\zeta)d\zeta} v_1(\tau(t),x), \quad u_2(t,x) = e^{-\int_0^t k_2(\zeta)d\zeta} v_2(\tau(t),x)$$

приведёт (3) к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\rho(x)v_1)}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_1|x|^n v_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\right) - \rho(x)k_1e^{[(\beta_1-p+2)k_1-(m_1-1)k_2]t}v_1^{\beta_1+1}, \\ \dfrac{\partial(\rho(x)v_2)}{\partial \tau} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_2|x|^n v_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial v_2}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial v_2}{\partial x}\right) - \rho(x)k_2e^{[(\beta_2-p+2)k_2+(m_2-1)k_1]t}v_2^{\beta_2+1}, \end{cases} \tag{4}$$

$$v_1|_{t=0} = v_{10}(x), \quad v_2|_{t=0} = v_{20}(x).$$

Если $k_1(p-(m_1+1)) = k_2(p-(m_2+1))$, то, выбирая $\tau(t) = \dfrac{e^{[(m_1-1)k_2+(p-2)k_1]t}}{(m_1-1)k_2+(p-2)k_1} = \dfrac{e^{[(m_2-1)k_1+(p-2)k_2]t}}{(m_2-1)k_1+(p-2)k_2}$, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\rho(x)v_1)}{\partial\tau} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_1|x|^n v_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\right) - a_1\tau^{b_1}v_1^{\beta_1+1}, \\ \dfrac{\partial(\rho(x)v_2)}{\partial\tau} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_2|x|^n v_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial v_2}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial v_2}{\partial x}\right) - a_2\tau^{b_2}v_2^{\beta_2+1}, \end{cases} \tag{5}$$

где $a_1 = \rho(x)k_1\big((p-2)k_1 + (m_1-1)k_2\big)^{b_1}$, $b_1 = \dfrac{(\beta_1-(p-2))k_1-(m_1-1)k_2}{(p-2)k_1+(m_1-1)k_2}$, $a_2 = \rho(x)k_2\big((m_2-1)k_1 + (p-2)k_2\big)^{b_2}$, $b_2 = \dfrac{(\beta_2-(p-2))k_2-(m_2-1)k_1}{(m_2-1)k_1+(p-2)k_2}$.

Если $b_i = 0$, и $a_i(t) = const$, $i = 1,2$, то система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(\rho(x)v_1)}{\partial\tau} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_1|x|^n v_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\right) - a_1 v_1^{\beta_1+1}, \\ \dfrac{\partial(\rho(x)v_2)}{\partial\tau} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(D_2|x|^n v_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial v_2}{\partial x}\right|^{p-2}\dfrac{\partial v_2}{\partial x}\right) - a_2 v_2^{\beta_2+1}. \end{cases}$$

Ниже мы опишем один из способов получения автомодельной системы для системы уравнений (5). Он состоит в следующем. Найдём сначала решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{v}_1}{d\tau} = -a_1\bar{v}_1^{\beta_1+1}, \\ \dfrac{d\bar{v}_2}{d\tau} = -a_2\bar{v}_2^{\beta_2+1}, \end{cases}$$

вида

$$\bar{v}_1(\tau) = (T_0+\tau)^{-\gamma_1},\ \bar{v}_2(\tau) = (T_0+\tau)^{-\gamma_2},\ T_0 > 0,$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{\beta_1},\quad \gamma_2 = \frac{1}{\beta_2}$$

для случая $b_i = 0$, и $a_i(t) = const$, $i = 1,2$. В случае же $b_i \neq 0$, и $a_i(t) = const$, $i = 1,2$ найдём решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{v}_1}{d\tau} = -a_1\tau^{b_1}v_1^{\beta_1+1}, \\ \dfrac{d\bar{v}_2}{d\tau} = -a_2\tau^{b_2}v_2^{\beta_2+1}, \end{cases}$$

вида

$$\bar{v}_1(\tau) = (T_0+\tau)^{-\gamma_1},\ \bar{v}_2(\tau) = (T_0+\tau)^{-\gamma_2},\ T_0 > 0,$$

где

$$\gamma_1 = \frac{b_1+1}{\beta_1},\quad \gamma_2 = \frac{b_2+1}{\beta_2}$$

затем решение системы (5) ищется в виде

$$\begin{aligned} v_1(t,x) &= \bar{v}_1(\tau)w_1(\tau(t),\varphi(|x|)), \\ v_2(t,x) &= \bar{v}_2(\tau)w_2(\tau(t),\varphi(|x|)), \end{aligned} \tag{6}$$

а $\tau = \tau(t)$ выбирается так

$$\tau_1(\tau)=\int_0^\tau \bar{v}_1^{(p-2)}(t)\bar{v}_2^{(m_1-1)}(t)dt=\begin{cases}\dfrac{1}{1-[\gamma_1(p-2)+\gamma_2(m_1-1)]}(T+\tau)^{1-[\gamma_1(p-2)+\gamma_2(m_1-1)]}, & если\ 1-[\gamma_1(p-2)+\gamma_2(m_1-1)]\neq 0,\\ \ln(T+\tau), & если\ 1-[\gamma_1(p-2)+\gamma_2(m_1-1)]=0,\\ (T+\tau), & если\ p=2\ и\ m_1=1,\end{cases}$$

если $\gamma_1(p-2)+\gamma_2(m_1-1)=\gamma_2(p-2)+\gamma_1(m_2-1)$.

Тогда для $w_i(\tau,\varphi(|x|)),\ i=1,2$ получим систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w_1}{\partial\tau}=\varphi^{1-s}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\varphi^{s-1}D_1 w_2^{m_1-1}\left|\dfrac{\partial w_1}{\partial\varphi}\right|^{p-2}\dfrac{\partial w_1}{\partial\varphi}\right)+\psi_1(w_1^{\beta_1+1}-w_1),\\ \dfrac{\partial w_2}{\partial\tau}=\varphi^{1-s}\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\varphi^{s-1}D_2 w_1^{m_2-1}\left|\dfrac{\partial w_2}{\partial\varphi}\right|^{p-2}\dfrac{\partial w_2}{\partial\varphi}\right)+\psi_2(w_2^{\beta_2+1}-w_2),\end{cases} \tag{7}$$

где

$$\varphi(x)=|x|^{p_1}/p_1,\qquad p_1=(p-(n+l))/p,\ s=p/(p-(n+l)),$$

$$\psi_1=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-[\gamma_1(p-2)+\gamma_2(m_1-1)])\tau}, & если\ 1-[\gamma_1(p-2)+\gamma_2(m_1-1)>0,\\ \gamma_1 c_1^{-(1-[\gamma_1(p-2)+\gamma_2(m_1-1)])}, & если\ 1-[\gamma_1(p-2)+\gamma_2(m_1-1)=0,\end{cases} \tag{8}$$

$$\psi_2=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-[\gamma_2(p-2)+\gamma_1(m_2-1)])\tau}, & если\ 1-[\gamma_2(p-2)+\gamma_1(m_2-1)]>0,\\ \gamma_2 c_1^{-(1-[\gamma_2(p-2)+\gamma_1(m_2-1)])}, & если\ 1-[\gamma_2(p-2)+\gamma_1(m_2-1)]=0.\end{cases}$$

Если $1-[\gamma_1(p-2)+\gamma_2(m_1-1)=0$, автомодельное решение системы (8) имеет вид

$$w_i(\tau(t),\phi)=f_i(\xi),\quad \xi=\varphi(|x|)/\sqrt{\tau}. \tag{9}$$

Тогда подставляя (9) в (7) относительно $f_i(\xi)$ получим систему автомодельных уравнений

$$\begin{cases}\xi^{1-s}\dfrac{d}{d\xi}(\xi^{s-1}f_2^{m_1-1}\left|\dfrac{df_1}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_1}{d\xi})+\dfrac{\xi}{2}\dfrac{df_1}{d\xi}+\mu_1 f_1(1-f_1^{\beta_1})=0,\\ \xi^{1-s}\dfrac{d}{d\xi}(\xi^{s-1}f_1^{m_2-1}\left|\dfrac{df_2}{d\xi}\right|^{p-2}\dfrac{df_2}{d\xi})+\dfrac{\xi}{2}\dfrac{df_2}{d\xi}+\mu_2 f_2(1-f_2^{\beta_2})=0.\end{cases} \tag{10}$$

где $\mu_1=\dfrac{1}{(1-[\gamma_1(p-2)+\gamma_2(m_1-1)])}$ и $\mu_2=\dfrac{1}{(1-[\gamma_2(p-2)+\gamma_1(m_2-1)])}$.

Система (10) имеет приближенное решение вида:

$$\bar{f}_1=A(a-\xi)^{\gamma_1},\ \bar{f}_2=B(a-\xi)^{\gamma_2},$$

где

$$n_1=\frac{(p-1)(p-(m_1+1))}{(p-2)^2-(m_1-1)(m_2-1)},\ n_2=\frac{(p-1)(p-(m_2+1))}{(p-2)^2-(m_1-1)(m_2-1)}.$$

Исследование качественных свойств системы (3) позволило, выполнить численный эксперимент в зависимости от значений, входящих в систему числовых параметров. Для этой цели как начальное приближение использовались построенные асимптотические решения. При численном решении задачи для линеаризации системы (3) использовались линеаризации по методам Ньютона и Пикара. Для построения автомодельной системы уравнений биологической популяции использован метод нелинейного расщепления [6].

Заключение

Отличительной особенностью рассматриваемой задачи является вырождение системы, что приведет к значительным трудностям при численном решение обобщенного решения из имеющего физический смысл класса. Решена проблема подходящего начального приближения для итерационного процесса, сохраняющая свойство конечной скорости распространения возмущения, пространственной локализации решения при численном решение с заданной точностью [12-17]. На основе численного эксперимента показана эффективность данного подхода. Можно ожидать, что дальнейшие теоретические и экспериментальные исследования возбудимых систем с кросс-диффузией внесут существенный вклад в исследования явлений самоорганизации во всех нелинейных системах от микро- и астрофизических систем до общественных социальных систем.

References:

1. Ansgar Jungel. Cross-diffusion systems with entropy structure. Proceedings of EQUADIFF. 2017. – pp. 1–10.
2. Aripov Mersaid. The Fujita and Secondary Type Critical Exponents in Nonlinear Parabolic Equations and Systems. Differential Equations and Dynamical Systems. 2018. –pp. 9-25.
3. Sh.A.Sadullaeva, M.B.Khojimurodova. Properties of Solutions of the Cauchy Problem for Degenerate Nonlinear Cross Systems with Convective Transfer and Absorption. Algebra, complex analysis and Pluripotential theory.2 USUZCAMP, Urgench, Uzbekistan, August 8–12, 2017. –pp 183-190.
4. Murray J.D. Mathematical Biology. I. An Introduction (Third Edition). – N.Y., Berlin, Heidelberg: Springer Verlag, 2001. – 551 p.
5. M. Aripov. «Approximate Self-similar Approach tu Solve Quasilinear Parabolic Equation» Experimentation, Modeling and Computation in Flow Turbulence and Combustion. vol. 2. 1997. – pp. 19- 26.
6. Aripov M. Metod e`talonny'h uravneniy dlya resheniya nelineyny'h kraevy'h zadach. -T.: Fan, 1988, - 137 s.
7. Belotelov N.V., Lobanov A.I. Populyacionny'e modeli s nelineynoy diffuziey. // Matematicheskoe modelirovanie. -M.; 1997, №12, -s. 43-56.
8. V. Vol'terra. Matematicheskaya teoriya bor'by' za susch'estvovanie -M.: Nauka, 1976, - 288 s.
9. Gauze G.F. O processah unichtojeniya odnogo vida drugim v populyaciyah infuzoriy // Zoologicheskiy jurnal, 1934, t.13, №1.
10. Aripov M., Muhammadiev J. Asymptotic behaviour of automodel solutions for one system of quasilinear equations of parabolic type. Buletin Stiintific-Universitate a din Pitesti, Seria Matematicasi Informatica. N 3. 1999. –pp. 19-40.
11. Aripov M.M. Muhamediyeva D.K. To the numerical modeling of self-similar solutions of reaction-diffusion system of the one task of biological population of Kolmogorov-Fisher type. International Journal of Engineering and Technology. Vol-02, Iss-11, Nov-2013. India. 2013.
12. Aripov M.M. Muhamedieva D.K. Podhody' k resheniyu odnoy zadachi biologicheskoy populyacii. Voprosy' vy'chislitel'noy i prikladnoy matematiki. -Tashkent. 2013. Vy'p.129. -S.22-31.
13. Muxamediyeva D.K. Properties of self similar solutions of reaction-diffusion systems of quasilinear equations // International Journal of Mechanical and production engineering research and development (IJMPERD) ISSN(P): 2249-6890; ISSN(E): 2249-8001 Vol. 8, Issue 2, USA. 2018, 555-565 pp. Impact Factor (JCC): 6.8765. DOI:10.24247/ijmperdapr201864.
14. Muhamediyeva D.K. Solving of the Task of Kolmogorov-Fisher Type Biological Population in the Regime with Aggravation // International Journal of Applied Engineering Research ISSN 0973-4562 Volume 13, Number 6 (2018) pp. 4291-4298.
15. Muhamediyeva D.K. Some exact and numerical solution of the problem of Kolmogorov-Fisher type biological population task with double nonlinear diffusion //International Journal of Research in Engineering and Technology, Vol.6, №9, 2017, p.37-45.
16. Mukhamediyeva D.K. Population model with cross-diffusion with double nonlinearity //International Journal of Management, Information Technology and Engineering, Vol. 5, № 9, 2017, p.43-52.
17. Muhamediyeva D. K. Invariance properties and estimating task solution of biological population in the two-dimensional case//International Journal of Applied Mathematics & Statistical Sciences (IJAMSS) ISSN(P): 2319-3972; ISSN(E): 2319-3980 Vol. 6, Issue 6, Oct – Nov 2017. – pp 1-8.