

8-15-2018

Problem with Bitsadze-Samarski and integral conditions for an ordinary differential equation

M. ABDUMANNOPOV

Ferghana State University, Ferghana, Murabbiylar 19, fdujournal@fdu.uz

Follow this and additional works at: <https://uzjournals.edu.uz/fdu>



Part of the [Mathematics Commons](#)

Recommended Citation

ABDUMANNOPOV, M. (2018) "Problem with Bitsadze-Samarski and integral conditions for an ordinary differential equation," *Scientific journal of the Fergana State University*. Vol. 1 , Article 26.

DOI: 517.927

Available at: <https://uzjournals.edu.uz/fdu/vol1/iss3/26>

This Article is brought to you for free and open access by 2030 Uzbekistan Research Online. It has been accepted for inclusion in Scientific journal of the Fergana State University by an authorized editor of 2030 Uzbekistan Research Online. For more information, please contact sh.erkinov@edu.uz.

УДК 517.927

**ИККИНСИ ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УСНУН БИТСАДЗЕ-САМАРСКИЙ ВА БИРИНСИ ТУР ИНТЕГРАЛ ШАРТЛИ МАСАЛА
ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРВОГО РОДА И УСЛОВИЕМ БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА
PROBLEM WITH BITSADZE-SAMARSKI AND INTEGRAL CONDITIONS FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION**

М. Абдуманнопов**Аннотация**

Ushbu maqolada ikkinchi tartibli oddiy differentsial tenglama ushunchi Bitsadze-SamarSKI shartli va birinchi tur integral shartli masala yrganilgan.

Аннотация

V nastoyashchey rabote izuchena zadacha s integral'nyim uslovием первого рода i uslovием Bitsadze-SamarSKI dlya prostogo differentsial'nogo uravneniуа второго porуадка.

Annotation

In the paper, a problem with Bitsadze-SamarSKI condition and first-type integral condition for the second order ordinary differential equation is studied.

Тауанш сўз ва иборалар: *дифференциал тенглама, chegaraviy масала, Bitsadze-SamarSKI shartli, integral shartli, integral tenglama.*

Ключевые слова и выражения: *дифференциальное уравнение, краевая задача, условие Bitsadze-SamarSKI, интегральное условие, интегральное уравнение.*

Keywords and expressions: *differential equation, boundary-value problem, Bitsadze-SamarSKI condition, integral condition, integral equation.*

Иккинчи тартибли шизикли ушбу

$$y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = f(x), \quad x \in (-1, 1) \quad (1)$$

дифференциал тенгламани қарайлик, бу ерда $b(x), c(x), f(x)$ - берилган узлуксиз функсиуалар, $y = y(x)$ - номаълум функсиуа.

BSI масала. (1) тенгламанинг $C[-1, 1] \cap C^2(-1, 1)$ синфга тегишли шундай ешими топилсинки, у

$$y(-1) = \alpha y(\eta) + k_1, \quad (2)$$

$$\int_{\beta}^1 y(\xi) d\xi = k_2 \quad (3)$$

шартларни қаноатлантисин, бу ерда η, α, k_1 ва k_2 - берилган ҳақиқий сонлар бўлиб, $\eta, \beta \in (-1, 1), \eta < \beta$.

$\eta \in (-1, 1)$ бўлганлиги ушун $\alpha \neq 0$ бўлганда (1.11)-Битсадзе-Самарский шартли бўлади. Одатда (3) кўринишдаги тенглик 1-тур интеграл шарт, дейилади [1.164].

1-лемма. Агар (x_0, x_1) оралиқда $c(x) < 0$ тенгсизлик бажарилса,

$$y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0 \quad x \in (x_0, x_1) \quad (1')$$

бир жинсли тенгламанинг ешими (x_0, x_1) оралиқда мусбат максимум ва манфий минимумга эришмайди.

Исбот. Фараз қилайлик (1') тенгламанинг $y(x)$ ешими $x = z \in (x_0, x_1)$ нуқтада

мусбат максимумга (манфий минимумга) эришсин. У ҳолда

МАТЕМАТИКА

$y''(z) \leq 0 (\geq 0)$, $y'(z) = 0$, $c(z)y(z) < 0 (> 0)$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Булардан қуйидаги тенгсизликнинг ҳам ўринли эканлиги келиб чиқади:

$$y''(z) + b(z)y'(z) + c(z)y(z) < 0 (> 0).$$

Бу эса (1') тенгламага зиддир. Демак, фаразимиз нотўғри. 1-лемма исботланди.

2-лемма. Агар $g(x)$ функция $[x_0, x_1]$ сегментда узлуксиз бўлиб,

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x) dx = 0 \quad (4)$$

тенгликни қаноатлантурса, у ҳолда шундай $z \in (x_0, x_1)$ сон мавжудки, $g(z) = 0$ тенглик ўринли бўлади.

Исбот. Агар $[x_0, x_1]$ сегментда $g(x) \geq 0$ ёки $g(x) \leq 0$ бўлса, (4) тенглик ўринли бўлмайди. Фараз қилайлик, (4) тенглик бажарилсин. Унда 2 та ҳол бўлиши мумкин: 1) $g(x) \equiv 0$, $x \in [x_0, x_1]$. Бунда теорема исбот бўлади ва z сифатида (x_0, x_1) ораликдаги ихтиёрий сонни олиш мумкин. 2) $g(x)$ - $[x_0, x_1]$ сегментда ишораси алмашинувчи функция. Унда $g(x) \in C[x_0, x_1]$ бўлганлиги учун шундай $z \in (x_0, x_1)$ сон мавжуд бўладики, бунда $g(z) = 0$ тенглик ўринли бўлади. 2-лемма исботланди.

3-лемма. Агар $c(x) < 0$, $x \in (-1, x_0)$ ва $|\alpha| \leq 1$ тенгсизликлар ўринли бўлса,

$$y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0, \quad x \in (-1, x_0); \quad (5)$$

$$y(-1) = \alpha y(\eta), \quad y(x_0) = 0 \quad (6)$$

масала фақат тривиал ечимга эга бўлади.

Исбот. Тескаридан фараз қилайлик: $\{(5), (6)\}$ масала $y(x) \neq 0$, $x \in [-1, x_0]$ ечимга эга бўлсин, у ҳолда, Вейерштрасс теоремасига асосан [2], шундай $z \in [-1, x_0]$ сон мавжудки, қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади:

$$\sup_{[-1, x_0]} |y(x)| = |y(z)| > 0.$$

1-леммага кўра $z \notin (-1, x_0)$. (6) тенгликларнинг иккинчисига асосан эса $z \neq x_0$. Демак, $z = -1$. У ҳолда $|y(\eta)| < |y(-1)|$ бўлиб, (6) дан $|y(-1)| = |\alpha y(\eta)| \leq |y(\eta)| < |y(-1)|$ кўринишдаги нотўғри тенгсизлик келиб чиқади. Бу қарама-қаршиликдан эса фаразимизнинг нотўғрилиги келиб чиқади. Демак, $y(x) \equiv 0$, $x \in [-1, x_0]$. 3-лемма исботланди.

4-лемма. Агар $c(x) < 0$, $x \in (x_0, x_1)$ ва $|\alpha| \leq 1$ тенгсизликлар ўринли бўлса,

$$y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0, \quad x \in (x_0, x_1); \quad (7)$$

$$y(x_0) = 0, \quad y(x_1) = 0 \quad (8)$$

масала фақат тривиал ечимга эга бўлади.

Исбот. Тескаридан фараз қилайлик: $\{(7), (8)\}$ масала $y(x) \neq 0$, $x \in [x_0, x_1]$ ечимга эга бўлсин, у ҳолда шундай $z \in [x_0, x_1]$ сон мавжудки, қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлади [2.416]:

$$\sup_{[x_0, x_1]} |y(x)| = |y(z)| > 0.$$

(8) тенгликларга асосан $z \neq x_0$, $z \neq x_1$, демак, $z_1 \in (x_0, x_1)$. Буни эътиборга олсак, $x = z$ бўлганда $y(x)$ функсиуа мусбат максимумга ёки манфий минимумга эга бўлади. 1-леммага асосан эса бундай бўлиши мумкин эмас. Бу қарама-қаршиликлардан фаразимизнинг нотўғрилиги келиб чиқади. Демак, $y(x) \equiv 0$, $x \in [x_0, x_1]$. 4 - лемма исботланди.

1-теорема. Агар $c(x) < 0$, $x \in (-1, 1)$ ва $|\alpha| \leq 1$ тенгсизликлар бажарилса, BSI масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.

Исбот. BSI масаланинг $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимлари мавжуд деб, тескаридан фараз қилайлик. Унда $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ функсиуа

$$y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0, \quad x \in (-1, 1); \quad (9)$$

$$y(-1) = \alpha y(\eta), \quad \int_{\beta}^1 y(x) dx = 0 \quad (10)$$

шартларни қаноатлантиради.

(10) тенгликларнинг иккинчисини эътиборга олсак, 2-леммага асосан $\tau_1 \in (\beta, 1)$ сон мавжудки, $y(\tau_1) = 0$ тенглик ўринли бўлади.

У ҳолда 3-леммага асосан (9) тенгламанинг $[-1, \tau_1]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ва қуйидаги шартларни

$$y(-1) = \alpha y(\eta), \quad y(\tau_1) = 0 \quad (11)$$

демак, (10) шартларни қаноатлантирувчи ечим $y(x) \equiv 0$, $x \in [-1, \tau_1]$.

Буни эътиборга олсак, $\{(9), (10)\}$ масаладан

$$y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = 0, \quad x \in (\tau_1, 1);$$

$$y(\tau_1) = 0, \quad \int_{\tau_1}^1 y(x) dx = 0$$

масала келиб чиқади.

Юқоридаги мулоҳазани бу масалага қўлласак, уана шундай $\tau_2 \in (\tau_1, 1)$ сонлар мавжудки, $[\tau_1, \tau_2]$ сегментда $y(x) \equiv 0$ деган хулосага эга бўламиз.

Шу жараёни кетма-кет такрорлаб, $[-1, 1]$ ораликда ётувчи шундай $[-1, \tau_1], [\tau_1, \tau_2], [\tau_3, \tau_4], \dots, [\tau_{n-1}, \tau_n], \dots$ сегментлар кетма-кетлигига эга бўламизки, бунда $y(x) \equiv 0$, $x \in [\tau_{n-1}, \tau_n]$ $n = 1, 2, \dots$ (бу ерда $\tau_0 = -1$) ва $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = 1$ тенгликлар ўринли бўлади.

Булардан эса, $y(x)$ функсиуанинг $[-1, 1]$ сегментда узлуксизлигига асосан, $y(x) \equiv 0$, $x \in [-1, 1]$ эканлиги келиб чиқади. Демак, $y_1(x) \equiv y_2(x)$, $x \in [-1, 1]$. 1-теорема исботланди.

2-теорема. Агар 1-теорема шартлари ва $b(x) \in C^1[-1, 1]$, $3 - \beta(2 + \beta) + \alpha(\beta^2 - 1) + 2\alpha\eta(1 - \beta) \neq 0$ шартлар бажарилган бўлса, BSI масаланинг ечим мавжуд бўлади.

Исбот. (1) тенгламани

$$y''(x) = f_1(x), \quad x \in (-1, 1) \quad (12)$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда $f_1(x) = f(x) - b(x)y'(x) - c(x)y(x)$.

Маълумки [1], (12) тенгламанинг ечим u шун,

$$y(x) = \frac{1}{2}y(-1)(1-x) + \frac{1}{2}y(1)(1+x) + \int_{-1}^1 G(x,t)f_1(t)dt, \quad x \in [-1, 1] \quad (13)$$

МАТЕМАТИКА

тенглик ўринли бўлади.

(13) тенгликка $f_1(x)$ функциянинг ифодасини қўйиб, сўнгра $y'(t)$ иштирок этган ҳадни бўлаклар интегралласак,

$$y(x) = \frac{1}{2}y(-1)(1-x) + \frac{1}{2}y(1)(1+x) + \int_{-1}^1 G(x,t)f(t)dt + \int_{-1}^1 y(t) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [b(t)G(x,t)] - c(t)G(x,t) \right\} dt \quad (14)$$

тенгликка эга бўламиз.

$y(x)$ функциянинг бу ифодасини (2) ва (3) шартларга қўуамиз. Натижада $y(-1)$ ва $y(1)$ номаълумларга нисбатан қуйидаги

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha\eta}{2} \right) y(-1) - \frac{\alpha}{2} (1 + \eta) y(1) = k_1 + \\ & + \alpha \left[\int_{-1}^1 G(\eta,t)f(t)dt + \int_{-1}^1 y(t) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [b(t)G(\eta,t)] - c(t)G(\eta,t) \right\} dt \right], \\ & \frac{1}{4} (1 - \beta)^2 y(-1) + \frac{1}{4} (3 - 2\beta - \beta^2) y(1) = k_2 - \\ & - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 G(\xi,t)f(t) d\xi dt - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 y(t) \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [b(t)G(\xi,t)] - c(t)G(\xi,t) \right\} d\xi dt \quad (15) \end{aligned}$$

алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз. Теорема шартига асосан (15) тенгламалар системасининг асосий детерминанти нолдан фарқли. Шунинг учун унинг ечими мавжуд ва уагона. $y(-1)$ ва $y(1)$ ларнинг (15) дан топилган қийматларини (14) тенгликка қўйиб, баъзи шакл алмаштиришлардан сўнг, $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан

$$y(x) - \int_{-1}^1 K_2(x,t)y(t)dt = \Phi_2(x), \quad x \in (-1,1) \quad (16)$$

қўринишдаги иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламасига [3] эга бўламиз, бу ерда $K_2(x,t)$ - бўлакчи узлуксиз ва chegarаланган маълум функция, $\Phi_2(x)$ эса $C^2[-1,1]$ синфга тегишли маълум функция.

(16) интеграл тенглама қўйилган BSI масалага эквивалент бўлиб, унга мос бир жинсли интеграл тенглама $\{(9), (10)\}$ масалага эквивалентдир. Охириги масала фақат тривиал ешимга эга бўлгани учун (16) интеграл тенгламага мос бир жинсли тенглама ҳам фақат тривиал ешимга эга. У ҳолда, Фредгольм алг'тернативасига асосан [3.256], интеграл тенгламанинг ечими мавжуд ва уагона. 2-теорема исботланди.

References:

1. O'rinov A.Q. Oddiy differentsial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar. – T.: "MUMTOZ SO'Z", 2014.
2. Azlarov T., Mansurov X.. Matematik analiz. – T.: "O'qituvchi", 1994.
3. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. – T.: "Yangiyul polygraph service", 2007.

(Тақризчи: А.Ўринов, физика-математика фанлари доктори, профессор).