Scientific-technical journal

Volume 23 | Issue 1 Article 5

3-26-2019

A PROBLEM OF BITSADZE-SAMARSKI FOR AN INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATION

A K. Urinov
Fergana State University

УДК 517.927

A PROBLEM OF BITSADZE-SAMARSKI FOR AN INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATION

A.K. Urinov, M.M. Abdumannopov

Fergana State University

ЗАДАЧА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ОДНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

А.К. Уринов, М.М. Абдуманнопов

Ферганский государственный университет

БИР ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН БИЦАДЗЕ-САМАРСКИЙ МАСАЛАСИ

А.К. Ўринов, М.М. Абдуманнопов

Фарғона давлат Университети

In the article, a problem with condition of Bitsadze-Samarski was investigated for an ordinary differential equation which includes integral operator.

Keywords: differential equation, integral operator, boundary-value problem, Bitsadze-Samarski's condition, integral equation.

В этой статье изучена задача Бицадзе-Самарского для одного интегро-дифференциального уравнения второго порядка, содержащий интегральный оператор.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, краевая задача, интегральное уравнение, условие Бицадзе-Самарского.

Ушбу мақолада интеграл оператор қатнашган иккинчи тартибли интегро-дифференциал тенглама учун Бицадзе-Самарский масаласи ўрганилган.

Таянч сўзлар: дифференциал тенглама, чегаравий масала, Бицадзе-Самарский шарти, интеграл тенглама.

Фараз қилайлик, берилган $a(x), b(x), c(x)$ ва $f(x)$ функциялар $[0,1]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлсин. $(0,1)$ интервалда

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) + c(x)\int_0^x y(t)\bar{J}_s[\lambda(x-t)]dt = f(x), \quad 0 < x < 1 \qquad (1)$$

интегро - дифференциал тенгламани қарайлик, бу ерда λ- берилган ҳақиқий сон, $\bar{J}_s(x) = \Gamma(s+1)(x/2)^{-s} J_s(x)$-Бессел-Клиффорд функцияси, $J_s(x)$ эса Бессел функцияси [1], $s > (-1/2)$.

BS масала. (1) тенгламанинг $[0,1]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ва қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин:

$$y(0) = \alpha y(\xi) + k_1, \quad y(1) = \beta y(\eta) + k_2, \qquad (2)$$

бу ерда α, β, k_1 ва k_2- берилган ҳақиқий сонлар, $\xi, \eta \in (0,1)$.

1-теорема. *Агар* $b(x) < x\,c(\le x)$ $x \in (0,1)$ *ва* $|\alpha| \le 1, |\beta| \le 1$ *тенгсизликлар бажарилса, BS масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Фараз қилайлик, BS масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин. У ҳолда $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ функция

$$y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x) + c(x)\int_0^x y(t)\bar{J}_s[\lambda(x-t)]dt = 0,\ x \in (0,1); \quad (3)$$

$$y(0) = \alpha y(\xi), \qquad y(1) = \beta y(\eta) \quad (4)$$

шартларни қаноатлантиради.

Фараз қилайлик, $\{(3),(4)\}$ масала $y(x) \not\equiv 0,\ x \in [0,1]$ ечимга эга бўлсин. У ҳолда Вейерштрасс теоремасига асосан $[2]$ қуйидаги муносабат

$$\sup_{[0,1]} |y(x)| = |y(x_0)| = M > 0$$

ўринли бўлади, бу ерда $x_0 - [0,1]$ оралиқда ётувчи ўзгармас сон. Агар $x_0 = 0$ десак, $|y(\xi)| < |y(0)|$ тенгсизлик ўринли бўлиб, (4) шартларнинг биринчисидан $|y(0)| < |\alpha||y(0)| \le |y(\xi)| < |y(0)|$,

яъни, $|y(0)| < |y(0)|$ кўринишдаги нотўғри тенгсизликка келамиз. Демак, $x_0 \ne 0$.

Фараз қилайлик, $x_0 = 1$ бўлсин. У ҳолда $|y(\eta)| < |y(1)|$ тенгсизлик ўринли бўлиб, (4) шартларнинг иккинчисидан қуйидаги

$$|y(1)| < |\beta||y(1)| \le |y(\eta)| < |y(1)|$$

тенгсизлик, яьни $|y(1)| < |y(1)|$ кўринишидаги нотўғри тенгсизликка эга бўламиз. Демак, $x_0 \ne 1$.

У ҳолда, $x_0 \in (0,1)$. Шунинг учун қуйидаги тенглик ўринли бўлиши зарур:

$$y''(x_0) + a(x_0)y'(x_0) + b(x_0)y(x_0) + c(x_0)\int_0^{x_0} y(t)\bar{J}_s[\lambda(x_0-t)]dt = 0.$$

Бу тенгликни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$y''(x_0) + a(x_0)y'(x_0) + c(x_0)\int_0^{x_0} \left\{y(x_0) + y(t)\bar{J}_s[\lambda(x_0-t)]\right\}dt +$$
$$+\left[b(x_0) - x_0c(x_0)\right]y(x_0) = 0. \quad (5)$$

Агар x_0 - $y(x)$ функциянинг мусбат максимумга эришадиган нуқтаси бўлса, $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) = 0,\ y''(x_0) \le 0$ тенгсизликлар ўринли бўлади. Бундан ташқари $s > (-1/2)$ бўлгани учун $\left|\bar{J}_s\left[\lambda(x_0-t)\right]\right| \le 1$ бўлиб [1], $y(x_0) + y(t)\bar{J}_s\left[\lambda(x_0-t)\right] \ge 0$ тенгсизлик ҳам бажарилади. Теорема шартига асосан $b(x_0) - x_0c(x_0) < 0$. Буларни ва $c(x_0) \le 0$ шартни эътиборга олсак,

$$y''(x_0) + a(x_0)y'(x_0) + c(x_0)\int_0^{x_0} \left\{y(x_0) + y(t)\bar{J}_s[\lambda(x_0-t)]\right\}dt +$$
$$+\left[b(x_0) - x_0c(x_0)\right]y(x_0) < 0$$

тенгсизлик ўринли бўлади. Бу эса (5) тенгликка зид.

Агар x_0 - $y(x)$ функциянинг манфий минимум қабул қиладиган нуқтаси бўлса, яъни $y(x_0) < 0$ бўлса, (5) нинг иккала томонини (-1) га кўпайтириб, юқоридаги мулоҳазаларни

$\left[-y(x)\right]$ функцияга нисбатан такрорлаб, (5) тенгликка зид тенгсизликка келамиз. Демак, $x_0 \notin (0,1)$.

Юқорида олинган қарама-қаршиликлардан $y(x)\not\equiv 0, x\in[0,1]$ деган фаразимизнинг нотўғрилиги келиб чиқади. Унда $y(x)\equiv 0$, яъни $y_1(x)=y_2(x), x\in[0,1]$ тенглик ўринли. 1-теорема исботланди.

2-теорема. *Агар 1-теорема шартлари ва* $a(x)\in C^1[0,1]$, $1-\alpha+\beta\eta(\alpha-1)+\alpha\xi(1-\beta)\neq 0$ *шартлар бажарилган бўлса, BS масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

Исбот. (1) тенгламани

$$y''(x)=f_1(x),\ x\in(0,1) \tag{6}$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$f_1(x)=f(x)-a(x)y'(x)-b(x)y(x)-c(x)\int_0^x y(t)\bar{J}_s\left[\lambda(x-t)\right]dt.$$

Агар $f_1(x)$ функцияни вақтинча маълум деб ҳисобласак, (6) тенгламанинг $y(x)$ ечими учун

$$y(x)=y(0)(1-x)+y(1)x+\int_0^1 G(x,t)f_1(t)dt,\ x\in[0,1] \tag{7}$$

тенглик ўринли бўлади $[3]$, бу ерда $G(x,t)$ - Грин функцияси:

$$G(x,t)=\begin{cases} x(t-1), & x\le t; \\ (x-1)t, & x\ge t. \end{cases} \tag{8}$$

(7) тенгликка $f_1(x)$ функциянинг ифодасини қўйиб, сўнгра ҳосил бўлган тенгликда $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ва $\gamma(t)$ иштирок этган ҳадда эса интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x)=y(0)(1-x)+y(1)x+\int_0^1 f(t)G(x,t)dt+\int_0^1 M_2(x,t)y(t)dt,\ x\in[0,1] \tag{9}$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M_2(x,t)=[G(x,t)a(t)]'_t-b(t)G(x,t)-G(x,t)\int_t^1 c(\xi)\bar{J}_s[\lambda(\xi-t)]dt.$$

(9) тенгликда $x=\xi$ ва $x=\eta$ деб, $y(\xi)$ ва $y(\eta)$ ларни топамиз. Сўнгра уларни (2) шартларга қўйиб, $y(-1)$ ва $y(1)$ номаълумларга нисбатан қуйидаги кўринишдаги чизиқли алгебраик тенгламалар системасига эга бўламиз:

$$\begin{cases} \left[1-\alpha(1-\xi)\right]y(0)-\alpha\xi y(1)=m_1+\alpha\int_0^1 y(t)M_2(\xi,t)\,dt, \\ \beta(\eta-1)y(0)+\left(1-\beta\eta\right)y(1)=m_2+\beta\int_0^1 y(t)M_2(\eta,t)\,dt, \end{cases} \tag{10}$$

бу ерда

$$m_1=k_1+\alpha\int_0^1 G(\xi,t)f(t)dt \quad m_2=k_2+\beta\int_0^1 G(\eta,t)f(t)dt,$$

$$M_2(x,t)=[G(x,t)a(t)]_t'-b(t)G(x,t)-G(x,t)\int_t^1 c(t)\bar{J}_s[\lambda(x-t)]dt.$$

Теорема шартига асосан бу тенгламалар системасининг асосий детерминанти нолдан фарқли. Шунинг учун унинг ечими мавжуд ва ягона. $y(0)$ ва $y(1)$ ларнинг (10) системадан топилган ифодаларини (9) га қўйиб, баъзи соддалаштиришларни бажарсак, $y(x)$ функцияга нисбатан

$$y(x)+\int_0^1 K_1(x,t)y(t)dt=\Phi_1(x),\quad x\in(0,1) \tag{11}$$

кўринишдаги иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламасига эга бўламиз, бу ерда $K_1(x,t)$ ва $\Phi_1(x)$- маълум функциялар бўлиб, α,β,k_1,k_2 сонлар ва $a(x),\ b(x),\ f(x),G(x,t)$ функциялар орқали ифодаланади.

(11) интеграл тенглама BS масалага эквивалент бўлиб, унга мос биржинсли интеграл тенглама $\{(3),(4)\}$ масалага эквивалентдир. Оҳирги масала фақат тривиал ечимга эга бўлгани учун (11) га мос биржинсли тенглама ҳам фақат тривиал ечимга эга. У ҳолда, Фредгольм альтернативасига асосан $[4]$, (11) интеграл тенгламанинг ечими мавжуд ва ягона. (11) тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $y(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$. 2-теорема исботланди.

References:

[1]. O’rinov A.Q. Maxsus funktsiyalar va maxsus operatorlar.-Farg’ona: Farg’ona nashriyoti, 2012. 112 bet.
[2]. Azlarov T., Mansurov X.. Matematik analiz.-Toshkent: “O’qituvchi”, 1994, 416 bet.
[3]. O’rinov A.Q. Oddiy differentsial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar.-Toshkent: MUMTOZ SO’Z, 2014, 164 bet.
[4]. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. –Toshkent: Yangiyul polygraph service, 2007, 256 bet.

Адабиётлар

[1]. Ўринов А.Қ. Махсус функциялар ва махсус операторлар.-Фарғона: Фарғона нашриёти, 2012. 112 бет.
[2]. Азларов Т., Мансуров Х.. Математик анализ.-Тошкент: “Ўқитувчи”, 1994, 416 бет.
[3]. Ўринов А.Қ. Оддий дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалалар.-Тошкент: MUMTOZ SO’Z, 2014, 164 бет.
[4]. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. –Toshkent: Yangiyul polygraph service, 2007, 256 bet.