[Scientific journal of the Fergana State University](https://uzjournals.edu.uz/fdu)

Volume 2 *Scientific journal of the Fergana State University № 2/2019*

Article 1

6-12-2019

Constructing general solution of an hyperbolic equation with two singular coefficients

A O’rinov
Ferghana State University, Ferghana, Murabbiylar 19, fdujournal@fdu.uz

A. Rafiqov
Ferghana State University, Ferghana, Murabbiylar 19, fdujournal@fdu.uz

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.956

ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А.К.Ўринов, А.Н.Рафиков

Аннотация

Мақолада иккита сингуляр коэффициентга эга бўлган гиперболик типдаги тенгламанинг умумий ечими қурилган.

Аннотация

В статье построено общее решение одного гиперболического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами.

Annotation

In the article the general solution of an hyperbolic equation with two singular coefficients was constructed.

Калит сўз ва иборалар: *гиперболик типдаги тенглама, сингуляр коэффициент, умумий ечим.*

Ключевые слова и выражения: *гиперболические уравнение, сингулярный коэффициент, общее решение.*

Key words and word expressions: *equation of hyperbolic type, singular coefficient, general solution.*

Рассмотрим уравнение

$$u_{ss} - u_{\zeta\zeta} + \frac{2\alpha}{s} u_s - \frac{2\beta}{\zeta} u_\zeta = 0 \qquad (1)$$

в область $G = \{(s,\zeta) : 0 < \zeta < s\}$ плоскости $sO\zeta$, причем здесь $\alpha > 0,\ 0 < \beta < 1/2$. Нетрудно убедиться в том, что общее решение уравнения (1) в области G имеет вид

$$u(s,\zeta) = s^{-\alpha} \int_0^1 [z(1-z)]^{\beta-1} \varphi\left[s + (2z-1)\zeta\right] F(\alpha, 1-\alpha,\ \beta; \rho) dz +$$

$$+ s^{-\alpha} \zeta^{1-2\beta} \int_0^1 [z(1-z)]^{-\beta} \phi\left[s + (2z-1)\zeta\right] F(\alpha, 1-\alpha, 1-\beta; \rho) dz, \qquad (2)$$

где $\rho = \zeta^2 z(1-z) \big/ \left[s(s + (2z-1)\zeta)\right]$, а $\varphi(z),\ \phi(z)$ - произвольные дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Предположим, что $\beta = (1/2)$, тогда (2) содержит только одну произвольную функцию. Поэтому она не является общим решением уравнения (1) при $\beta = 1/2$. Естественно, представляет интерес нахождение в области G общего решения уравнения (1) при $\beta = 1/2$. Потому что с помощью представления общего решения того или иного уравнения, можно найти информацию о начальных и краевых задачах, корректно поставленных для этого уравнения.

С этой целью в области G рассмотрим более общее уравнение

$$u_{ss} - u_{\zeta\zeta} + \frac{2\alpha}{s} u_s - \frac{2\beta}{\zeta} u_\zeta - \lambda^2 u = 0, \qquad (3)$$

из которого при $\lambda = 0$ следует уравнение (1). Здесь λ - произвольное действительное заданное число.

Из результатов работ [1], [2] следует, что при $0 < \beta < 1,\ \beta \neq (1/2)$ общее решение уравнения (3) имеет вид

$$u(s,\zeta) = s^{-\alpha} \int_0^1 \varphi(z) [t(1-t)]^{\beta-1} \Xi_2(\alpha, 1-\alpha, \beta; \omega, \sigma) dt +$$

А.К.Ўринов - ФерГУ, доктор физико-математических наук, профессор.
А.Н.Рафиков - ФерГУ, кандидат физико-математических наука.

$$+\zeta^{1-2\beta}s^{-\alpha}\int_0^1\phi(z)[t(1-t)]^{-\beta}\,\Xi_2(\alpha,1-\alpha,1-\beta;\,\omega,\,\sigma)dt\,, \qquad (4)$$

где

$$\Xi_2(a,b,c;x,y)=\sum_{j,k=0}^{\infty}\frac{(a)_j(b)_j}{(c)_{j+k}\,j!k!}x^j y^k \text{ -}$$

-гипергеометрическая функция Гумберта [3], $z=s+(2t-1)\zeta$, $\omega=\zeta^2 t(1-t)(sz)^{-1}$, $\sigma=-\lambda^2\zeta^2 t(1-t)$, $(a)_j=a(a+1)....(a+j-1)$.

Но при $\beta=(1/2)$ выражение (4) содержит только одну произвольную функцию и, поэтому, оно не является общим решением уравнения (3).

Найдем общее решение уравнения (3) при $\beta=(1/2)$. С этой целью, следуя [4], положив $\beta=(1/2)-\varepsilon$ и заменив функции $\varphi(z)$, $\phi(z)$ на

$$\frac{\varphi(z)}{2}+\frac{\phi(z)}{2\varepsilon}, \qquad \frac{\varphi(z)}{2}-\frac{\phi(z)}{2\varepsilon}$$

соответственно (где ε - достаточно малое положительное число), получим

$$u_\varepsilon(s,\zeta)=s^{-\alpha}\int_0^1\varphi(z)K_1(s,\zeta,t;\varepsilon)dt+s^{-\alpha}\int_0^1\phi(z)K_2(s,\zeta,t;\varepsilon)dt\,, \qquad (5)$$

где

$$K_1(s,\zeta,t;\varepsilon)=\frac{1}{2}\left\{[t(1-t)]^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\,\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha,\frac{1}{2}-\varepsilon;\omega,\sigma\right)+\right.$$

$$\left.+\zeta^{2\varepsilon}[t(1-t)]^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\,\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha,\frac{1}{2}+\varepsilon;\omega,\sigma\right)\right\},$$

$$K_2(s,\zeta,t;\varepsilon)=\frac{1}{2\varepsilon}\left\{[t(1-t)]^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}\,\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha,\frac{1}{2}-\varepsilon;\omega,\sigma\right)-\right.$$

$$\left.-\zeta^{2\varepsilon}[t(1-t)]^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\,\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha,\frac{1}{2}+\varepsilon;\omega,\sigma\right)\right\}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}K_1(s,\zeta,t;\varepsilon)=[t(1-t)]^{-\frac{1}{2}}\,\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha,\frac{1}{2};\omega,\sigma\right). \qquad (6)$$

Вычислим $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}K_2(s,\zeta,t;\varepsilon)$. Для этого, пользуясь равенством [5]

$$\Xi_2(a,b,c;x,y)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(a)_j(b)_j}{(c)_j\,j!}x^j\,\overline{J}_{c+j-1}(2i\sqrt{y})$$

(здесь $\overline{J}_j(z)=\Gamma(j+1)\left(z/2\right)^{-j}J_j(z)$, а $J_j(z)$-функция Бесселя первого рода порядка j [6]) и четностью функции $\overline{J}_j(z)$, функцию $K_2(s,\zeta,t;\varepsilon)$ перепишем в виде

$$K_2(s,\zeta,t;\varepsilon)=[t(1-t)]^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_j(1-\alpha)_j}{j!}K_3(s,\zeta,t;\varepsilon), \qquad (7)$$

где

$$K_3(s,\zeta,t;\varepsilon)=\frac{1}{2\varepsilon}\left\{\overline{J}_{j-\varepsilon+1/2}(\sigma_1)\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)_j\right]^{-1}-\right.$$

$$\left.-[\zeta t(1-t)]^{2\varepsilon}\overline{J}_{j-\varepsilon+1/2}(\sigma_1)\left[\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)_j\right]^{-1}\right\},\ \sigma_1=2\lambda\zeta\sqrt{t(1-t)}\,.$$

Функцию $K_3(s,\zeta,t;\varepsilon)$ представим в виде

$$K_3(s,\zeta,t;\varepsilon)=K_{31}(s,\zeta,t;\varepsilon)+K_{32}(s,\zeta,t;\varepsilon)+K_{33}(s,\zeta,t;\varepsilon), \qquad (8)$$

где
$$K_{31}(s,\zeta,t;\varepsilon)=\frac{1}{2\varepsilon}\left\{1-[\zeta t(1-t)]^{2\varepsilon}\right\}\overline{J}_{j-\varepsilon+1/2}(\sigma_1)\left[\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)_j\right]^{-1},$$

$$K_{32}(s,\zeta,t;\varepsilon)=\frac{1}{2\varepsilon}\left\{\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)_j\right]^{-1}-\left[\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)_j\right]^{-1}\right\}\overline{J}_{j-\varepsilon-1/2}(\sigma_1),$$

$$K_{33}(s,\zeta,t;\varepsilon)=\frac{1}{2\varepsilon}\left\{\overline{J}_{j-\varepsilon-1/2}(\sigma_1)-\overline{J}_{j+\varepsilon-1/2}(\sigma_1)\right\}\left[\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)_j\right]^{-1}.$$

В силу $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}(a^x-1)=\ln a$, справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0}K_{31}(s,\zeta,t;\varepsilon)=-\ln[\zeta t(1-t)]\overline{J}_{j-1/2}(\sigma_1)\left[\left(\frac{1}{2}\right)_j\right]^{-1}. \qquad (9)$$

Принимая во внимание равенство

$$\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)_j\right]^{-1}-\left[\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)_j\right]^{-1}=\Gamma\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\left[\frac{1}{\Gamma\left(j-\varepsilon+1/2\right)}-\frac{1}{\Gamma\left(j+\varepsilon+1/2\right)}\right]+$$

$$+\frac{1}{\Gamma\left(j+\varepsilon+1/2\right)}\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)-\Gamma\left(\frac{1}{2}+\varepsilon\right)\right],$$

нетрудно убедиться, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}K_{32}(s,\zeta,t;\varepsilon)=\frac{\sqrt{\pi}\overline{J}_{j-1/2}(\sigma_1)}{\Gamma(j+1/2)}\left[\psi\left(j+\frac{1}{2}\right)-\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right], \qquad (10)$$

где $\psi(z)$ - логарифмическая производная функции $\Gamma(z)$ [3].

Далее, согласно определению производной,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K_{33}(s,\zeta,t;\varepsilon) = -\left[\left(\frac{1}{2}\right)_j\right]^{-1} \frac{\partial}{\partial z}\bar{J}_z(\sigma_1)\Big|_{z=j-1/2}.$$

Отсюда, пользуясь разложением

$$\bar{J}_z(\sigma_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(z+1)}{k!\Gamma(k+z+1)}\left(\frac{\sigma_1}{2}\right)^{2k}$$

и легко проверяемым равенством

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(k+z+1)}\right] = \frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(k+z+1)}\left[\psi(z+1)-\psi(k+z+1)\right],$$

находим

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K_{33}(s,\zeta,t;\varepsilon) = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)_j\right]^{-1} \times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(j+1/2)}{k!\Gamma(j+k+1/2)}\left(\frac{\sigma_1}{2}\right)^{2k}\left[\psi\left(\frac{1}{2}+j+k\right)-\psi\left(\frac{1}{2}+j\right)\right]. \qquad (11)$$

Теперь, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в (5) и принимая во внимание (6)- (11), получим формулу для общего решения уравнения (3) при $\beta = (1/2)$:

$$u(s,\zeta) = s^{-\alpha}\int_0^1 \varphi(z)[t(1-t)]^{-1/2}\,\Xi_2(\alpha,1-\alpha,1/2;\,\omega,\sigma)dt +$$

$$+s^{-\alpha}\int_0^1 \phi(z)[t(1-t)]^{-1/2}\left\{\ln\left[\zeta t(1-t)\right]\Xi_2(\alpha,1-\alpha,1/2;\,\omega,\sigma)dt - \right. \qquad (12)$$

$$\left. -\sum_{j,k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_j(1-\alpha)_j}{(1/2)_{j+k}\, j!k!}\left[\psi\left(\frac{1}{2}+j+k\right)-\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]\omega^j\sigma^k\right\}dt.$$

Полагая в (12) $\lambda = 0$ и учитывая $\Xi_2(a,b,c;x,0) = F(a,b,c;x)$ получим, что общее решение уравнения

$$u_{ss} - u_{\zeta\zeta} + \frac{2\alpha}{s}u_s - \frac{1}{\zeta}u_\zeta = 0$$

имеет вид

$$u(s,\zeta) = s^{-\alpha}\int_0^1 \varphi(z)[t(1-t)]^{-1/2}\,F(\alpha,1-\alpha,1/2;\,\omega)dt +$$

$$+s^{-\alpha}\int_0^1 \phi(z)[t(1-t)]^{-1/2}\left\{\ln\left[\zeta t(1-t)\right]F(\alpha,1-\alpha,1/2;\,\omega) - \right.$$

$$-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_j(1-\alpha)_j}{(1/2)_j\, j!}\left[\psi\left(\frac{1}{2}+j\right)-\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]\omega^j\Big\}dt\,.$$

Из формулы (12) следует, что задача Коши для уравнения

$$u_{ss}-u_{\zeta\zeta}+\frac{2\alpha}{s}u_s-\frac{1}{\zeta}u_\zeta-\lambda^2u=0$$

с начальными данными на линии $\zeta=0$ в обычной постановке некорректна. В этом случае корректно поставлена задача с начальными условиями

$$\lim_{\zeta\to 0}\frac{u(s,\zeta)}{\ln\zeta}=\tau(s)\,,\qquad \lim_{\zeta\to 0}\zeta\ln^2\zeta\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{u(s,\zeta)-A(\tau)}{\ln\zeta}\right]=\nu(s)\,,$$

где

$$A[\tau]=\frac{1}{\pi}\int_0^1\tau(z)[t(1-t)]^{-1/2}\left(z/s\right)^{\alpha}\Big\{\ln[\zeta t(1-t)]\Xi_2(\alpha,1-\alpha,1/2;\omega,\sigma)-$$

$$-\sum_{j,k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_j(1-\alpha)_j}{(1/2)_{j+k}\, j!k!}\left[\psi\left(\frac{1}{2}+j+k\right)-\psi\left(\frac{1}{2}\right)\right]\omega^j\sigma^k\Big\}dt\,,$$

а $\tau(s)\in C[0,+\infty)\cap C^2(0,+\infty)$, $\nu(s)\in C^2(0,+\infty)$ - заданные функции.

Нетрудно убедиться, что решение этой задачи дается формулой

$$u(s,\zeta)=A[\tau]+\frac{1}{\pi}\int_0^1\nu(z)[t(1-t)]^{-1/2}\left(z/s\right)^{\alpha}\,\Xi_2(\alpha,1-\alpha,1/2;\omega,\sigma)dt\,.$$

Литература:

1. Капилевич М.Б. Об одном уравнении смешаного эллиптико-гиперболического типа // Математический сборник. -Т. -1952 -№1.30(72).
2. Уринов А.К., Каримов Ш.Т. Краевые задачи со смещением для вырождающегося гиперболического уравнения // Труды института математики и компьютерных технологии. Выпуск IV. –Ашхабад,1995.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. -Т. I. -М.: Наука, 1965,.
4. G.Darboux Leçons sur la theorie generale des surfaces.// 2-e ed. Paris, Gauthier-Villars, 1915.
5. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. -Минск: «Наука и техника», 1987.
6. Кузнецов Д.С. Специальные функции. -М. : Высшая школа.-1965.