Scientific Journal of Samarkand University

Volume 2020 Article 41

1-23-2020

# Uniqueness and stability problem of integral geometry with indignation

Akram Begmatov
*Samarkand State University, Uzbekistan*, akrambegmatov@mail.ru

Zarifjon Ochilov
*Samarkand State University, Uzbekistan*, zarifjonochilov@mail.ru

Abduroziq Xusanov
*Samarkand State University, Uzbekistan*

**УДК: 517.946**

# ЕДИНСТВЕННОСТЬ И УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С ВОЗМУЩЕНИЕМ

**А.Х.Бегматов, З.Х.Очилов, А.З.Хусанов**
*Самаркандский государственный университет*
*akrambegmatov@mail.ru*

**Аннотация.** В работе рассматривается новый класс задач интегральной геометрии вольтерровского типа с весовой функцией специального вида. Доказаны теоремы единственности и существования решения, получены оценки устойчивости и формула обращения в пространствах Соболева, тем самым показана слабая некорректность решения задачи интегральной геометрии. Рассмотрено постановка задачи интегральной геометрии с возмущением на семействе параболах в полосе. Доказано теорема единственности ее решения в классе дважды непрерывно дифференцируемых и финитных функций, а также получены оценки устойчивости в пространствах конечной гладкости.

**Ключевые слова.** Задача интегральной геометрии, слабая и сильная некорректность, единственность и устойчивость.

**Uniqueness and stability problem of integral geometry with indignation**

**Annotation.** A new class of Volterra type integral geometry problems with a special-weight function is considered. Theorems of uniqueness and the existence of a solution are proved, stability estimates and the inversion formula in Sobolev spaces are obtained, thereby showing the weak incorrectness of the solution of the integral geometry problem. The statement of the problem of integral geometry with a perturbation on the parabola family in the strip is considered. The uniqueness theorem of its solution is proved in the class of twice continuously differentiable and compactly supported functions, and stability estimates are obtained in spaces of finite smoothness.

**Keywords.** The problem of integral geometry, weak and strong incorrectness, uniqueness and stability

**Qo‘zg‘alishli integral geometriya masalasi yechimining yagonaligi va turg‘unligi**

**Annotatsiya.** Bu ishda maxsus ko‘rinishdagi vazn funksiyali volterra tipidagi integral geometriya masalalarining yangi sinfi qaralgan. Integral geometriya masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi teoremalari isbotlangan, Sobolev fazolarida turg‘unlik bahosi va teskarilanish formulalari olingan bo‘lib, integral geometriya masalasi kuchsiz nokorrekt masala ekanligi ko‘rsatilgan. Polosada (yo‘lakda) parabolalar oilasi bo‘yicha qo‘zg‘alishli integral geometriya masalasining qo‘yilishi qaralgan. Ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi va finit funksiyalar sinfida yechimning yagonaligi teoremasi isbotlangan, shuningdek, chekli silliq fazolarda turg‘unlik bahosi olingan.

**Kalit so‘zlar:** integral, geometriya masalalari, kuchli va kuchsiz nokorrektlik, yagonalik va turg‘unlik.

## Введение

Интегральная геометрия – это интенсивно развивающая область современной математики. Она является одним из крупных направлений в теории некорректных задач математической физики и анализа.

Приведем общую постановку задачи интегральной геометрии [1].

Пусть $u(x)$ - достаточно гладкая функция, определенная в $R^n$ и $\{S(y)\}$ – семейство кусочно – гладких многообразий в этом пространстве, зависящих от параметра $y=(y_1,y_2,...,y_n)$.

Пусть, далее, от функции $u(x)$ известны интегралы

$$\int\limits_{S(y)} g(x,y)u(x)ds = f(y), \tag{1}$$

где $g(x,y)$ - заданная весовая функция, $ds$ - элемент меры на $S(y)$. Требуется по функции $f(y)$ восстановить функцию $u(x)$.

Основные вопросы, возникающие при исследовании этой задачи следующие. Первый и самый принципиальный вопрос, определяет ли однозначно задание функции $f(y)$ функцию $u(x)$ ? Далее, как найти по функции $f(y)$ функцию $u(x)$ ? При этом важен вопрос: как получить аналитическую формулу, выражающую $u(x)$ через $f(y)$ ? Здесь следует отметить, что это возможно не во всех случаях. И, наконец, вопрос естественным образом связанный с теоремой существования решения задачи: каковы необходимые и достаточные условия принадлежности $f(y)$ классу функций, представимых через интеграл (1)?

Задачами интегральной геометрии вольтерровского типа называются задачи, которые могут быть сведены к исследованию операторных уравнений вольтерра в смысле определения, данного М.М. Лаврентьевым [1].

Достаточно общие результаты по единственности и устойчивости решения задач интегральной геометрии в случае, когда многообразия, по которым ведется интегрирование, имеют вид параболоидов, весовые функции и многообразия инвариантны относительно группы всех движений вдоль фиксированной гиперплоскости, получены В.Г. Романовым [3]. Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа с весовыми функциями, имеющими особенность исследовались в работах [9-14]. Теоремы единственности, оценки устойчивости и формулы обращения слабо некорректных задач интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями вершинах получены в [15-18].

Единственность решения значительно более широких классов задач интегральной геометрии в полосе, рассматриваемых как сильно некорректные, была установлена В.Г. Романовым (см.[4]). В работах А.Л. Бухгейма [5,6] получены формулы обращения для задачи восстановления функции через интегралы от неё по параболоидам в полупространстве $y>0$, причем формула обращения, приведенная в [5], содержит только конечное число производных от данных. В [6] с помощью техники шкал банаховых пространств доказана теорема единственности решения задачи интегральной геометрии в полосе на параболах с весовой функцией, аналитической по части переменных.

В своей работе [2] М.М. Лаврентьев показал единственность решения сильно некорректной задачи интегральной геометрии в полосе на параболах с возмущением достаточно общего вида.

В работах [7-8] рассматриваются некоторые классы возмущенных полусингулярных интегральных уравнений в трехмерном пространстве, возникающие при исследовании ряда задач интегральной геометрии. Здесь доказаны теоремы единственности и в слабо некорректном случае теорема существования решения таких уравнений.

В статье рассматривается задача интегральной геометрии с весовой функцией специального вида по полуплоскости $y>0$. Доказаны теоремы единственности и существования решения в классе гладких финитных функций, получены оценки устойчивости решения задачи в пространствах Соболева, что показывает её слабую некорректность, а также формулы обращения.

**Основная часть**

Введем обозначения, которые будем использовать в этом пункте:

$$(x,y)\in R^2,\ (\xi,\eta)\in R^2,\ \lambda\in R^1, \mu\in R^1,$$
$$\Omega=\{(x,y): x\in R^1, y\in(0,l), l<\infty\}$$
$$\overline{\Omega}=\{(x,y): x\in R^1, y\in[0,l]\}$$

Постановка задачи.

В полосе $\overline{\Omega}$ рассмотрим семейство кривых, которое однозначно параметризуются с помощью координат своих вершин $(x,y)$, произвольная кривая семейства $P(x,y)$ определяется соотношениями

$$\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y})=\{(\xi,\eta): \eta=\left(\xi-x+\sqrt{y}\right)^2, 0\le\eta\le y, x-\sqrt{y}\le\xi\le x\}\cup$$
$$\cup\{(\xi,\eta): \eta=(x+\sqrt{y}-\xi)^2, 0\le\eta\le y, x\le\xi\le x+\sqrt{y}\}.$$

З**адача 1**. Определить функцию двух переменных $u(x,y)$, если для всех $(x,y)$ из полосы $\overline{\Omega}$ известны интегралы от функции $u(\bullet)$ по кривым $P(x,y)$ :

$$\int_{x-\sqrt{y}}^{x} g(x-\xi)u\left(\xi,\left(\xi-x+\sqrt{y}\right)^2\right)d\xi+\int_{x}^{x+\sqrt{y}} g(x-\xi)u\left(\xi,\left(x+\sqrt{y}-\xi\right)^2\right)d\xi=f\left(x,y\right) \quad (2)$$

где

$$g(x-\xi)=\left(1\pm\frac{x-\xi}{\sqrt{y}}\right)\cdot\chi(x-\xi), \quad (3)$$

$\chi(x-\xi)=\begin{cases}1, & если \quad x-\xi>0,\\ 0, & если \quad x-\xi<0.\end{cases}$ - функция Хэвисайда.

Функция $u(x,y)$ – функция из класса u, которые имеют все непрерывные частные производные до второго порядка включительно и финитны с носителем в $R_+^2$:

$$\text{supp } u\subset D=\{(x,y):-a<x<a,\,0<a<\infty,\,0<y<l,\quad l<\infty\}$$

Доопределим правую часть уравнения (2) при $y<0$.

Введем функцию

$$f^*(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & y\geq 0,\\ 0, & y<0.\end{cases} \quad (4)$$

Как следует из постановки задачи 1 и условий, наложенных на функцию $u(\bullet)$, к функции $f^*(x,y)$ можно применить преобразование Фурье по $y$. Рассмотрим преобразование Фурье по переменной $y$ функции $f^*(\lambda,y)$. Учитывая, что

$$f^*(x,y)\equiv 0\text{, при } y<0,$$

Имеем

$$\varphi(\lambda,\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\mu y}\hat{f}^*(\lambda,y)dy,$$

а интеграл в правой части последнего соотношения равен

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i\mu y}\hat{f}(\lambda,y)dy=\int_{0}^{+\infty}e^{i\mu y}\hat{f}(\lambda,y)dy..$$

Таким образом, доопределив $f(x,y)$ в нижней полуплоскости нулём, к обеим частям уравнения (2) можно применять преобразование Фурье по $y$ и интеграл Фурье будет иметь вид:

$$\int_{0}^{+\infty}e^{i\mu y}\hat{f}(\lambda,y)dy.$$

Введем следующие функции

$$I(\lambda,\mu)=\int_{0}^{\infty}e^{i\left(\mu h^2+h(2\mu\sqrt{\eta}+\lambda)\right)}dh, \quad (5)$$

$$I_1(\lambda,\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\mu y}\frac{d\mu}{\left(1+\mu^2\right)I(\lambda,\mu)}, \quad (6)$$

$$I_2(\lambda,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\lambda x}I_1(\lambda,y)d\lambda. \quad (7)$$

Справедлива следующая теорема:

**Теорема 1**.Пусть функция $f(x,y)$ известна для всех $(x,y)$ из полосы $\overline{\Omega}$. Тогда решение задачи 1 в классе u единственно, имеет место представление

$$u(x,y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}I_2(x-\xi,y-\eta)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\eta^2}\right)f(\xi,\eta)d\xi d\eta \quad (8)$$

и выполняется неравенство

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \le C_1 \|f\|_{W_2^{2,2}(\Omega)}$$

где $C_1$ – некоторая постоянная.

Ответ на вопрос о существовании решения задачи интегральной геометрии дает следующая теорема:

**Теорема 2.** Пусть правая часть уравнения (2) удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x,y)$ финитна по переменной $x$;

2) $f(x,y)$ имеет все непрерывные частные производные до второго порядка включительно;

3) $\frac{\partial^m}{\partial y^m} f(x,y)\Big|_{y=0} = \frac{\partial^m}{\partial y^m} f(x,y)\Big|_{y=l} = 0 \quad (m=0,1,2)$.

Тогда существует решение уравнения (2) в классе непрерывных функций, финитных по аргументу $x$, определенное формулой (8).

Теперь исследуем задачу интегральную геометрии с возмущением. Через $S(x,y)$ обозначим часть $R_+^2$, ограниченную кривой $P(x,y)$ и осью $y=0$. $\bar{\Omega}$ есть полоса:

$$\bar{\Omega} = \left\{(x,y): x \in R^1,\ y \in [0,l]\right\}.$$

**Задача 2**.Определить функцию $u(x,y)$, если для всех $(x,y) \in \bar{\Omega}$ известны интегралы от неё по кривым $P(x,y)$ и площадям $S(x,y)$ с весовой функцией $k(x,y;\xi,\eta)$

$$\frac{1}{2}\int_0^y u(x-h,\eta)\frac{d\eta}{h+\sqrt{\eta}} + \int_0^y \int_{x-h}^{x+h} k(x,y;\xi,\eta)u(\xi,\eta)d\xi d\eta = F(x,y), \quad (9)$$

где $h = \sqrt{y} - \sqrt{\eta}$.

Функция $k(x,y;\xi,\eta)$ – функция финитна, имеет все непрерывные частные производные до второго порядка включительно и вместе своими производными обращается в ноль на параболах

$$\mathrm{P}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \left\{(\xi,\eta): \eta = \left(\xi - x + \sqrt{y}\right)^2, 0 \le \eta \le y, x - \sqrt{y} \le \xi \le x\right\} \cup$$
$$\cup \left\{(\xi,\eta): \eta = (x + \sqrt{y} - \xi)^2, 0 \le \eta \le y, x \le \xi \le x + \sqrt{y}\right\}$$

Функция $F(x,y)$ считается известной во всей полуплоскости.

Уравнение (9) соответствует задачу интегральную геометрии с возмущением. Первое слагаемое в левой части (9)

$$\frac{1}{2}\int_0^y u(x-h,\eta)\frac{d\eta}{h+\sqrt{\eta}} = f(x,y),$$

где $h = \sqrt{y} - \sqrt{\eta}$, представляет собой совокупность интегралов от искомой функции по семейству половинок парабол с вершинами в точках $(x,y)$.

Второе слагаемое $f_0(x,y) = F(x,y) - f(x,y)$- интеграл с весом $k(x,y;\xi,\eta)$ по частям полуплоскости, ограниченными параболами.

**Теорема 3**. Пусть функция $F(x,y)$ известна в полосе $\Omega$. Весовая функция $k(x,y;\xi,\eta) \in C_0^2(\Omega\times\Omega)$ вместе со своими производными до второго порядка включительно обращается в ноль на параболах $P(x,y)$. Тогда решение задачи 2 в классе дважды непрерывно дифференцируемых и финитных функций единственно в полосе $\Omega$ и выполняется неравенство

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \le C_3 \|F\|_{W_2^2(\Omega)},$$

где $C_3$ – некоторая постоянная.

Из условий, наложенных на функции $u(x,y)$ и $k(x,y;\xi,\eta)$ вытекает, что функции $f(x,y)$ и $F(x,y)$ будут иметь все непрерывные производные до второго порядка включительно.

**Литература**

1. Лаврентьев М.М., Савельев Л.Я. Теория операторов и некорректные задачи. – Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1999. – 702 с.

2. Лаврентьев А.М., Шабат Б.В.Методы теории функций комплексного переменного. –М.: Наука, 1986. – С.749

3. Романов В.Г.О восстановлении функции через интегралы по эллипсоидам вращения, у которых фокус неподвижен // Докл. АН СССР.– Москва, 1967. Т. 173.– № 4.– С. 766-769.

4. Романов В.Г.О восстановлении функции через интегралы по семейству кривых // Сиб. мат. журн., 1967. Т. 8.– № 5.– С. 1206-1208.

5. Бухгейм А.Л.О некоторых задачах интегральной геометрии // Сиб. мат. журн., 1972. Т. 13.–№ 1.–С. 34- 42.

6. Бухгейм А.Л.Об одной задаче интегральной геометрии // Мат. проблемы геофизики. –Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1973. Вып. 4.–С. 69-73.

7. Бегматов Акбар Х.О некоторых классах полисингулярных интегральных уравнений // Сиб.мат.журн., 1994. Т. 35.– № 3.– С. 515-519.

8. Бегматов Акбар Х. О единственности решения задачи интегральной геометрии вольтерровского типа на плоскости // Докл. РАН.– Москва, 2009. Т. 427.– № 4.– С. 439–441.

9. Бегматов Акрам Х.Слабо некорректные задачи интегральной геометрии вольтерровского типа // Доклады РАН.– Москва, 1996. Т. 349.–№ 3.–С. 297-298.

10. Бегматов АкрамХ.Задачи интегральной геометрии для семейства конусов в n-мерном пространстве // Сиб. мат. журн., 1996. Т. 37.–№ 3.–С. 500-505.

11. Бегматов АкрамХ.Новые классы слабо и сильно некорректных задач интегральной геометрии // Второй Сиб. конгресс по прикл. и инд. математике. Тез. докл., ч. III.–Новосибирск: Институт математики СО РАН, 1996.–С. 298.

12. Бегматов Акрам Х.Некоторые новые классы задач интегральной геометрии. –Новосибирск, 1997. Препринт / РАН. Сибирское отделение. Институт математики.–№ 40, 30 с.

13. Бегматов АкрамХ.Вольтерровские задачи интегральной геометрии на плоскости для кривых с особенностями // Сиб. мат. журн., 1997. Т. 38.–№ 4.–С. 723-737.

14. Бегматов Акрам Х. Задачи интегральной геометрии по специальным кривым и поверхностям с особенностями в вершине // Доклады РАН.– Москва, 1998. Т. 358.– № 2.– С. 151-153.

15. Бегматов Акрам Х. Теоремы существования решения двух слабо некорректных задач интегральной геометрии// Доклады РАН. – Москва, 2002. Т. 386.– № 1.– С. 1-3.

16. Бегматов Акрам Х., Очилов З.Х.Задачи интегральной геометрии с разрывной весовой функцией //Доклады РАН.– Москва, 2009.429.–№ 3.–С. 295-297.

17. Begmatov Akram H., Ochilov Z.H. Recovering of function set by integrals along a curve in the plane // Ill-Pozed and Non-Classical Problems of Mathematical Physics and Analysis, M.M. Lavrent'ev et al., Eds., Proceedings of International Converence, VSP.–Utrecht-Boston, 2003.–C. 191-197.

18. Бегматов Акрам Х., Очилов З.Х. Задачи интегральной геометрии вольтеровского типа с весовой функцией специального вида. Журнал Continuum: Математика. Информатика. Образование. Россия 2017 г., № 2., С. 11-15.