

УДК:378.14+51(077)

**МАТЕМАТИК МОДЕЛЛАШТИРИШ КЎНИКМАСИНИ ШАКЛЛАНТИРИШ АСОСИДА  
ТАЛАБАЛАРНИ КАСБГА ЙЎНАЛТИРИШ  
ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОРИЕНТАЦИЯ УЧАЩИХСЯ НА ОСНОВЕ НАВЫКОВ  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
PROFESSIONAL ORIENTATION OF STUDENTS BASED ON THE SKILLS OF  
MATHEMATICAL MODELING**

**З.Сиддиқов**

**Аннотация**

*Мақолада олий таълим муассасаларида таълим олаётган талабаларга математикани ўқитишда махсус фанларни ўргатилиши ва бўлғусидаги касбий фаолиятни амалга оширилиши учун талаб қилинадиган математик тайёргарлик даражасининг шакллантирилишида зарур бўладиган математик моделлаштириш кўникмалари баён қилинган.*

**Аннотация**

*В статье излагаются навыки математического моделирования, необходимые для формирования у студентов высших учебных заведений, в процессе обучения математике, уровня математической подготовленности, требуемого для изучения ими специальных предметов и осуществления в будущем профессиональной деятельности.*

**Annotation**

*This article is about several mediums and methods how to develop High Education students' competence in further teaching mathematics according to demands. Moreover it includes essential mathematic preparation in modeling competence.*

**Таянч сўз ва иборалар:** математик модель, минимум, максимум, методика, функция, функционал боғлиқлик, компонент, оптимизация, мақсадли функция.

**Ключевые слова и выражения:** математическая модель, минимум, максимум, методика, функция, функциональная зависимость, компонент, оптимизация, целевая функция.

**Key words and expressions:** mathematic model, minimum, maximum, method, function, functional dependence, component, optimizing, objective function.

Олий таълим муассасаларида таълим олаётган талабаларда махсус фанларни ўргатилиши ва бўлғусидаги касбий фаолиятни амалга оширилиши учун зарур бўлган математик тайёргарлик даражасининг шакллантирилиши талаб этилади.

Унда таълим олиш учун зарур бўлган билим ва сифатларнинг ривожланиши уларнинг бўлғуси касбий фаолияти билан боғлиқ бўлган реал масалалар ва ҳолатларнинг математик моделларини шакллантириш ва тадқиқот қилиш орқали амалга оширилади [1.214].

Биз қуйидаги математик моделларни ўрганиб чиқамиз:

– берилган критерияларга нисбатан жараённинг ўтиб бориши ёки мавжуд ресурслардан фойдаланишнинг оптимал вариантыни излаб топишга имконият яратувчи **оптимизацион моделлар**;

– мавқелари диаметрал қарама-қарши бўлган икки томон учун имкони борича йўқотувларини камайтириш билан боғлиқ бўлган низоли вазиятларни бартараф қиладиган ноль суммали **йўин моделлари**;

**З.Сиддиқов** – ФарДУ ҳузуридаги ХТХҚТМОҲМ табиий ва аниқ фанлар таълими кафедраси ўқитувчиси.

– бетайин, мужмал вазиятлар, ҳолатларда теран қарорларнинг қабул қилишни ривожлантирадиган **табиат билан ўйинлар**.

Кўрсатилган моделларнинг ўрганилиши, афсуски техника йўналишидаги олий таълим муассасаларидаги математика асосий курсларига кирмаган. Асосий диққат эса масалалар ечишни ўргатилиши ва амалий негизга эга бўлган вазиятларни кўриб чиқилишига қаратилади. Шу каби бўлғуси мутахассис фаолияти давомида практик услубларнинг эгалланилишига асосланган ўргатувлар, бизнинг фикримизга кўра, математикага ўргатилишнинг операцион компоненти сифатида ифодаланиб, талабаларда бошқарув кўникмалари ва билимларини шакллантиради ва уларни ишлаб чиқариш – бошқариш фаолиятини бажаришга тайёрлайди.

**Оптимизацион** деб ном олган моделлаштириш усулларини ўргатиш методикасини кўриб чиқайлик.

Бу методлар билан таништираётиб, талабаларга, кўп ҳолатларда, қайси бир жараён ёки вазиятларни мақсадга мувофиқ равишда бошқараётган пайтида, қайси ҳаракат яхши натижаларга, қайси бири ёмонга

етақлаб боришлигини, таққосланишига эса имконият мавжуд бўлишига ва ҳар бир ҳаракат натижасига баҳо бериш мумкинлиги ҳақида тушунтириш зарур.

Оптимизация амалга оширилиши зарур бўлган маълум бир жараён, умумий кўринишда, жараён ўтишини белгилаб берувчи бир неча параметрларни боғлаб турган муносабатларнинг мажмуаси кўринишига эга бўлади.

Ушбу кўп сонли  $x$  параметрлардан биз бошқарувнинг кўп сонли  $u$  ўзгарувчиларини, яъни жараённи бошқараётган шахснинг ҳукмига қарашли бу ўзгарувчиларнинг қийматларини ажратиш оламиз.

Агар бошқарув ҳар бир ҳаракатининг натижасини миқдорий кўринишда аниқлаш мумкин бўлса, демак, мазкур моделдаги мумкин бўлган  $u \subset U$  бошқарувига  $\Phi(u)$  қийматини таққослаб беришнинг имкониятига эга бўлган  $\Phi$  мақсадли функция маълумдир.

Энг яхши қўлланиш, қоидага кўра, топилиши оптимал  $u$  бошқарилишни таъминловчи мақсадли  $\Phi(u)$  функциянинг максимал ёки минимал қийматини топишдан иборат бўлади.

Бу типдаги масалалар “оптимизациялашган” деган номга эгадир. Худди шу номга, уларни тасвирлаб берувчи ва ушбу моделларнинг қурилишига имкон берувчи методлар киради.

Оптимизационлилар орасидан, чизиқли программалаштириш масалалари номини олган моделларни ажратиш олиш мумкин. Ушбу моделларни қура билишлигини шакллантираётиб, чизиқли программалаштириш турли хил ишлаб чиқариш масалаларининг ечилиши сабабидан пайдо бўлганлигини талабаларга алоҳида тушунтириш керак [2.67].

Умумий ҳолда бу масалалар қуйидаги кўринишда ифодаланади. Айтайлик, тегишли равишда  $b_1, b_2, \dots, b_m$  га тенг миқдорда мавжуд бўлган (умуман олганда ҳаммаси билан  $m$  хил хомашё) хомашёдан  $n$  хил маҳсулот ишлаб чиқарилиши мумкин. Маҳсулот  $g$  турининг бир донаси баҳоси  $c_g$  га тенг. Бир дона  $g$  маҳсулотни ишлаб чиқарилиши учун  $a_{ig}$  га тенг бўлган миқдордаги хомашёнинг  $i$  турини сарфлаш зарур. Қайси турдаги маҳсулотни ишлаб чиқариш энг фойдалироқ бўлади?

Гап ўта тор маънодаги вазият ҳақида кетаётганлиги учун “энг фойдали” сўзлари остида, мавжуд бўлган хомашё нисбатан қўйилган чекловларни инобатга олган ҳолда, ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг энг катта қийматини тушунамиз.  $x_g$  орқали  $g$  маҳсулотнинг ишлаб чиқарилаётган ҳажмини белгилаймиз. Бу

ҳолда, биз максимуми ахтарилаётган, мақсадли функция  $\sum_{g=1}^n c_g x_g$  кўринишда ёзилиши мумкин.

Чекловларни ҳисоблашга ўтаммиз:

аввало, ишлаб чиқарилаётган маҳсулотларнинг миқдорлари манфий бўла олмасликлари, яъни:  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$ . эканлиги тушунарлидир. Сўнгра, бир дона  $g$  маҳсулотни чиқарилиши учун  $i$  хомашёнинг  $a_{ig}$  миқдорида сарфлаш керак эканлиги сабабли, шу нарса аниқки, ушбу маҳсулотнинг  $x_g$  миқдори учун  $i$  хомашёнинг  $a_{ig} x_g$  миқдори талаб этилар экан. Модомики, хомашёнинг бир турининг ўзи бир қанча маҳсулот турларини тайёрлашга ишлатилиши мумкин экан, унда ҳар бир турдаги хомашёнинг умумий сарфлари мавжуд бўлган ресурслардан ошмаслиги зарур бўлади:

$$\sum_{g=1}^n a_{ig} x_g \leq b_i, i=1,2,\dots,m.$$

Мутлақ равишда қейинги масалага ўтаммиз: Шартланишига кўра:

$$1. x_g \geq 0, g = 1, 2, \dots, n.$$

$$2. \sum_{g=1}^n a_{ig} x_g \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$$

бўлган  $\max_{\{x_g\}} \sum_{g=1}^n c_g x_g$  топилсин.

Ҳар қандай 1- ва 2-шартларни қаноатлантирувчи  $x_1, x_2, \dots, x_n$  қийматларнинг йиғиндисини эҳтимолга яқин режа, деб қабул қилайлик. Мақсадли функциянинг максимумига эга бўлган эҳтимолга яқин режанинг ўзи оптимал режа бўлиб ҳисобланади.

Келтирилган масалада мақсадли функция ва барча чекланмалар чизиқлидир, шунинг учун бу масалалар “чизиқли программалаштириш масалалари”, деган номни олган.

Қуйида чизиқли программалаштириш масалаларини ечишни ўргатиш методикасини кўриб чиқамиз.

**Масала.** Цехдаги токаръ, чилангар, пайвандловчи ва бўяш – қадоқлаш участкаларни қўшимча иш билан тегишли равишда 16, 18, 12 ва 10 соатга юклатилишнинг имконияти мавжуд. Бунинг учун винтли домкрат ва кран йўлининг таянч асосини ишлаб чиқариш таклиф этилмоқда. 1- жадвалда ҳар бир участкада таклиф этилаётган маҳсулотлар тури учун зарур бўладиган вақт (соатларда) кўрсатилган. О қиймати – мазкур участка ишлаб чиқаришда қатнашмайди, деганидир. Агар бир дона домкратни ишлаб чиқарилиши учун энг катта фойданинг 4 бирлиги, таянч нуқтасини ишлаб

## МАТЕМАТИКА

чиқарилиши учун эса энг катта фойданинг 3 бирлигини ташкил этса, тахмин этилаётган

маҳсулотларни ишлаб чиқариш режасини тузиш талаб қилинади.

## 1- жадвал

Маҳсулотлар	Участкалар			
	Токаръ	Слесаръ	Пайванд-ловчи	Бўяш-қадоқлаш
Винтли домкрат	4	3	0	1
Кран йўлининг таянч нуқтаси	0	2	3	2
Мумкин бўлган қўшимча чеклатилиш (соатларда)	16	18	12	8

**Ечиш.** Бу каби бир хил хомашёдан турли хил қийматларга эга бўлган маҳсулотни ишлаб чиқариш ҳолатлари, ишлаб чиқариш амалиётида жуда ҳам кўп учрайди. Мазкур ҳолатда хомашё сифатида вақт олинган.

Масаланинг математик моделини тузайлик.  $x$  орқали тайёрланган домкратлар сонини,  $y$  орқали эса таянч нуқталар сонини белгилайлик. Биринчи участкада домкратлар ишлаб чиқарилиши учун  $4x$  га ва таянч нуқталарини ишлаб чиқарилиши учун  $0y$  га тенг вақт сарфланади.

Ушбу участкадаги иш вақти 16 соатдан ошиши мумкин эмаслиги сабабидан  $4x + 0y \leq 16$ ,  $4x \leq 16$ . деб ёзишимиз мумкин. Худди шу тарзда фикр юритиб, қолган участкалар учун белгиланган чекловларни ҳам  $3x + 2y \leq 18$ ,  $3y \leq 12$ ,  $x + 2y \leq 8$ . деб ёзишимиз мумкин. Бунда  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ . чиқарилаётган маҳсулотларнинг миқдори манфий бўлмаган рақам билан ифодаланади, демак қабул қилинган чекловларнинг йиғиндисини шартлари билан тўлдирилади.  $x$  ва

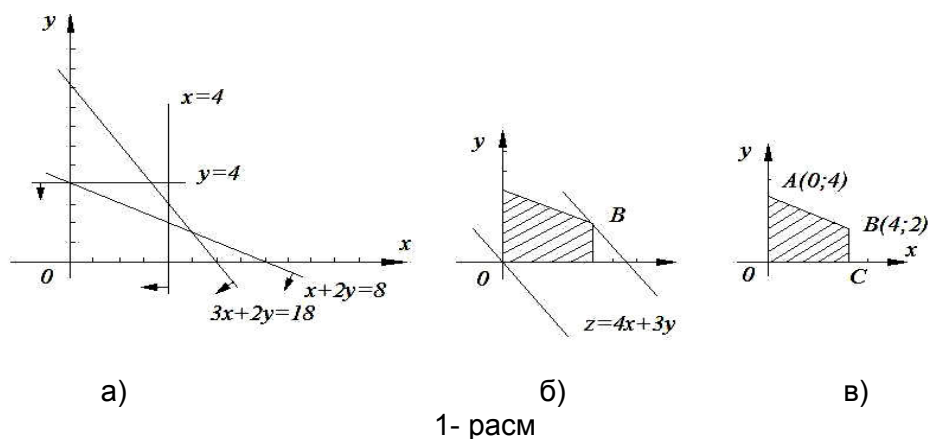
$y$  қийматлар барча тузилган тенгсизликларни қаноатлантиришлари керак ва шу сабабли

$$\begin{cases} x \leq 4, \\ 3x + 2y \leq 18, \\ x + 2y \leq 8, \\ y \leq 4, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

системани ёзишимиз мумкин бўлади.

Масала шартига биноан,  $x$  домкратларни сотилишидан цех фойданинг 4 бирлигини, таянч нуқталарини сотилишидан эса 3 бирлигини киритиши мумкин бўлиб, демак умумий фойда  $z = 4x + 3y$ . (3) кўринишдаги мақсадли функция орқали ифодаланиши мумкин.

Демак, масала (2) соҳадаги (3) максимал қийматни излаб топилиши билан чекланади. Чеклов худудини кўрамиз (1- расм).



1- расм

Ёпиқ  $OABC$  тўртбурчакка эга бўламиз (1-а) расм). Кейин мақсадли функциянинг графигини кўриб (1-б) расм), унинг юқорига ва ўнгга ҳаракатланаётган пайтдаги  $OABC$  чекланган худудидан чиқиб кетиш нуқтасини топамиз.  $B(4;2)$  нуқтасига эга бўламиз (1-в) расм).

Бошқача йўл тутиш ҳам мумкин:  $OABC$  тўртбурчак учларининг координаталарини мақсадли функция ичига киритиб, максимал қийматни топиш мумкин:

$$Z_A = 4 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12 \text{ (бирлик)},$$

$$Z_B = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 22 \text{ (бирлик)},$$

$$Z_C = 4 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 16 \text{ (бирлик)}.$$

га эга бўламиз.

0 нуқта (0;0) режаси билан бирга текширув пайтида ҳисобга олинмаслиги мумкинлиги тушунарлидир.

Бу ҳолатда энг катта фойда яна В нуқтанинг координаталарига, яъни 4 та домкрат ва 2 таянч нуқтасининг ишлаб чиқарилишига тўғри келади. Шу билан бирга цех миқдори 22 бирликка тенг бўлган мумкин қадар максимал даражадаги фойдага эга бўлади.

Низоли вазиятлар бартараф этилишининг амалий мисолида қуйидаги ўйинни кўриб чиқишни талабаларга таклиф қилайлик.

**Масала.** Машиналар сақланадиган омборнинг ҳовлисида 12 нафар бугдой ўрувчи комбайн (4 машинадан 3 қатор) лар жойлашган. Уларни талабалардан тузилган икки нафар бригада орасида тақсимлаш керак. Комбайнларнинг техник ҳолати матрица кўринишида келтирилган:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & -3 & 7 \\ -3 & -1 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Бу ерда рақамлар воситасида: комбайннинг йиғим-теримга тайёрлиги; йиғим-теримни жиддий бузилишларсиз (носозликларсиз) ўтказа олишнинг гарантияси (кафолати); техник кўриқдан ўтишнинг яқинлиги, яъни, одатда “машинанинг эскириб кетиши”, деб айтилиши билан ифодаланади.

**Ечиш.** Комбайнларни уларнинг техник ҳаракатларига қараб тенг қилиб бўлиб берилиши энг осон иш бўлар эди. Аммо, талабалар ёш ва демак иззатталаб, яхши техникага эга бўлишга интилади ва бунинг учун унча катта бўлмаса-да, таваккалчилик қилишга тайёрдир, негаки катта ютқазилда қолмоқчи эмаслар. Бу шароитда ёрдамга ноль суммага эга бўлган ўйин модели қўл келиши мумкин. Биз А деб белгиланган биринчи бригадага сатрни танлаш таклиф этилади, иккинчи бригадага эса уни В деб белгилайлик, бу пайтда А гуруҳга ўтиб кетадиган комбайнни танлайди. Тўғри, албатта, бу энг ёмон ҳолатга эга бўлган комбайн бўлиб чиқади. Бу машина рўйхатдан ўчирилади ва гуруҳлар ўрин алмашадилар.

Биз томондан ўйинчиларнинг эҳтиёткорлиги (хўжалик юритувчилар учун оддий ҳолат) инобатга олинади. Демак, ўйиннинг мақсади сифатида кафолатланган ютқунинг максимизацияси туради.

Ҳар бир ўйинчи учун энг яхши ўйин усули бормикин? – деган савол гавдаланади ва оптимал равишда ўйнаётган бир ўйинчи бошқа оптимал равишдаги ўйинчи билан ўйнаётган пайтда қандай ютқуққа эга бўлиши мумкин. Бу ютқуқ эса ўйин қиймати (нархи) деб аталади.

Маълум бўлишича, агар минимал ютқуқларнинг энг каттаси мумкин бўлган максимал ютқазилларнинг энг кичкинасига аниқ равишда тенг бўлса, унда айнан шу сатр ва устун ўйнаётганларнинг оптимал стратегиялари ва танловлари бўлиб чиқади. Уларнинг кесишган жойлари *эгар нуқтаси* деб аталади.

Бизнинг мисолимизда, А гуруҳ биринчи сатрни танласин, негаки бу ҳолда у техник ҳолати – 2 бўлган машинага эга бўлади, бошқа стратегияни танлаганлари чоғида, у 3-ҳолатдаги машинага эга бўлади. В командаси ҳам худди шу сатрни танлайди, – ахир унда ижобий қийматга эга бўлган машиналар қолган-ку.

Унинг ютуғи 1 дан иборат бўлади. Иккала команда учун биринчи сатрдан чиқиб кетиш номаъқул иш бўлади ва улар тегишли равишда 3 ва 4 ларга эга бўладилар. Вариантларнинг кейинги стратегияларидан А командаси учинчисини танлаши жоиздир, 3- ни қўлга киритиб, унинг рақиби эса 1- сига эга бўлади, акс ҳолда В 2 машинага эгалик қилиши мумкин. Учунчи сатрни ўйнаб, А ва В лар 7 ва 8 ларни тегишли равишда олади.

Қолган машиналар қуйидагича ўйналади: – 3 ва 6 машиналар А гуруҳига, 1 ва 7- машиналар В гуруҳига ўтади. Ўйиннинг натижаси қуйидаги кўринишга келади:

$$A \text{ гуруҳи: } -3, -3, -2, 3, 6, 7;$$

$$B \text{ гуруҳи: } -1, 1, 1, 4, 7, 8.$$

А гуруҳи энг ёмон ҳолатга тушганлиги аниқдир. Оралиқни қисқартиришнинг иложи бормиди? Ҳа, бор. Бунинг учун ўйиннинг бошига қайтамиз.

А ва В гуруҳлари орасида, тегишли равишда икки нафар дастлабки комбайнларни – 2 ва 1 деб ўйнаб, А гуруҳи иккинчи сатрга ўтиб – 3 комбайнни эгаллайди.

## МАТЕМАТИКА

Агар В гуруҳи биринчи сатрга қайтса, унда 4 А га ва 3 – В га ўтадиган алмашув амалга ошади. Кейин 1 В га ўтиб кетади, ундан сўнг А га 6, –3 ва 7 ўтади.

В гуруҳ тегишли равишда – 1, 7 ва 8 ларга эга бўлади. Бундай ўйин натижасида А гуруҳ суммар кўринишда олдинги ҳолатдагидан 1 та ортиқ машинага эга бўлади.

Аммо, ушбу гуруҳга техник ҳолатлари – 3, –3 ва –2 машиналари тегди ва бу йиғим-терим ишларида жиддий қийинчиликларни келтириши аниқдир. Таваккал қилиш шунчалик зарурмиди ўзи? Буни ҳал қилиш, албатта, талабаларга боғлиқ.

Агар тўловчи матрица эгарли нуқтага эга бўлмаса, нима қилиш керак?

Масалан,  $\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$  матрицаси. Эгарли

нуқтага эга эмас. Бу ҳолатда муваффақиятнинг гарови маълум бир частотага эга бўлган стратегияни танлаш сингари яккаю-ягона матрица билан кўп сонли ўйнаш пайтида аниқланиши мумкин.

Оддий стратегиядан ҳоли бўлган бу каби стратегиялар *аралаш* деб аталади. Ноль суммали ҳар қандай ўйин учун доимий равишда оптимал кўринишдаги аралаш стратегиялари мавжуд эканлиги исботланган.

Агар ўйин бир маротаба ўтказиладиган бўлса, унда, тегишли частотага пропорционал бўлган танлов эҳтимоллигини ҳар қандай оддий стратегияга солиштириб кўриладиган тасодифий танловнинг ҳолатига мос келувчи қоидадан фойдаланган ҳолда стратегияларни танлаб олиниши, ўйинчилар учун маъқулроқ бўлар эди. Аралаш стратегияларни топишликка ўргатиш амалга ошириладиган, *амалий негизга эга бўлган масалани* ечиш мисолини кўриб чиқамиз.

**Масала.** Комбайн бункерини тўлдиргандан сўнг ўз вақтида автомобилга юкланилиши керак. Агар автомобиль бункернинг тўлиш вақтидан олдинроқ келадиган бўлса, унга кутишга тўғри келади ва бу ҳолда машинанинг бекор тўхтаб туриши, – 1 рақам билан белгиланган йўқотишларга олиб келади. Агарда,

автомобиль кеч қолиб қелса, унда комбайннинг тўхтаб туриб қолиши анча жиддийроқ, – 4 деб баҳоланган йўқотишларга дучор бўлади. Автомобилнинг комбайн олдига келишининг оптимал вақти аниқлансин.

**Ечиш.** Рўпарамизда икки шахснинг ноль суммали ўйини кетаяпти, деб фараз қилиб, тўлов матрицасини тузамиз:

Бункернинг тўлиши эрта кеч

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Машинанинг келиши эрта кеч

Оптимал режимни стратегия деб атайлик. Матрицада ўйин нархи (қиймати) мавжуд эмас – ҳар бир сатрдаги минимум манфий кўринишга эга, устунлардаги максимумлар эса нолга тенг. Мазкур вазиятда маълум бир частотага эга бўлган стратегиянинг танланилиши зарур.

Автомобиль ҳайдовчиси  $x$  частотасига эга бўлган биринчи стратегияни танлаган бўлсин, унда иккинчисини  $1-x$  частота билан қўллаш шарт бўлади. Худди шу йўл билан комбайнчининг стратегиясини  $y$  ва  $1-y$  деб қабул қиламиз. Автомобиль ҳайдовчиси эга бўладиган ўртача ютуқ

$$\varepsilon(x, y) = -4y(1-x) - x(1-y) = 5xy - x - 4y$$

ни ташкил этади. Мазкур функциянинг максимумини аниқлайлик:

$$\varepsilon'_x(x, y) = 5y - 1, \quad \varepsilon'_y(x, y) = 5x - 4.$$

бу ердан  $x = \frac{4}{5}$  ва  $y = \frac{1}{5}$  бўлади. Ҳосил

бўлган натижа қуйидагича тушунтирилади: автомобиль ҳайдовчиси беш ҳолатдан тўрттасида, яъни, деярли ҳар сафар бункер тўлдирилиши вақтидан олдинроқ келишга мажбур бўлади.

Демак, бу каби тўхтаб туришлар эвазига келиб чиқадиган йўқотишлар пайтида комбайнларга хизмат кўрсатиш учун зарур бўлган автомобиллар сонини ҳисоблаб аниқланиши ўзининг ичига уларни комбайннинг бункери тўлгунигача етиб бориш заруратининг мутлақ равишда киритилиши шартдир.

## References:

1. Tojiev M., Ziyomhammadov B. Milliy pedagogik texnologiyaning ta'lim-tarbiya jarayoniga tatbig'i va uning yoshlar intellektual salohiyatini yuksaltirishdagi o'imi. Monografiya. – T.: «MUMTOZ SO'Z», 2010.
2. Novikov D.A. Statisticheskie metody v pedagogicheskix issledovaniyax (tipovye sluchai). – M.: MZ – Press, 2004.