МАТЕМАТИКА

УДК: 517.927

ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН АРАЛАШ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА
СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА
A MIXED BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE SECOND ORDER INTEGRAL-DIFFERENTIAL EQUATION

А.Уринов, М.Рахимова

Аннотация

Ушбу мақолада иккинчи тартибли бир интегро-дифференциал тенглама учун икки нуқтали аралаш чегаравий масала ўрганилган. Бу масала ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги исботланган.

Аннотация

В данной статье поставлена двухточечная смешанная краевая задача для одного интегро-дифференциального уравнения второго порядка. Доказано существование и единственность решения поставленной задачи.

Annotation

In the article a two-points mixed boundary-value problem for the second order integral-differential equation is set. The uniqueness and existence of solution of the considered problem is proved.

Таянч сўз ва иборалар: *интегро-дифференциал тенглама, аралаш чегаравий масала, интеграл тенглама, ечим.*

Ключевые слова и выражения: *интегро-дифференциальное уравнение, краевая задача, интегральное уравнение, решение.*

Key words and expressions: *integral-differential equation, mixed boundary-value problem, integral equation, solution.*

Қуйидаги интегро-дифференциал тенгламани кўрайлик:

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int_0^x (x-t)^{-a}\,ch(x+t)\,y(t)\,dt+$$

$$+\delta(x)\int_x^1 (t-x)^{-b}\,ch(x+t)\,y(t)\,dt=f(x),\qquad 0<x<1, \tag{1}$$

бунда $a,b=const\in(0,1)$; $\alpha(x),\beta(x),\gamma(x),\delta(x),f(x)$ - берилган функциялар.

Масала: (1) тенгламанинг $C^1[0,1]\cap C^2(0,1)$ синфга тегишли ва

$$y(0)-y'(0)=k_1,\quad y(1)+y'(1)=k_2 \tag{2}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда k_1, k_2 - берилган сонлар.

Дастлаб қўйилган масаланинг бир қийматли ечилишини текширамиз.

1-теорема. *Агар* $\alpha(x),\,\gamma(x),\,\delta(x)\in C^1[0,1]$, $\alpha(0)\geq 0$, $\alpha(1)\leq 0$, $\gamma(1)\leq 0$, $\gamma'(x)\geq 0$, $\delta(0)\leq 0$, $\delta'(x)\leq 0$, $\alpha'(x)-2\beta(x)\geq 0$, $x\in[0,1]$ *шартлар бажарилса,* $\{(1),(2)\}$ *масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Бу теоремани исботлаш учун қуйидаги тенгламанинг

$$y''(x)+\alpha(x)y'(x)+\beta(x)y(x)+\gamma(x)\int_0^x (x-t)^{-a}\,ch(x+t)\,y(t)\,dt+$$

А.Ўринов *– ФарДУ, физика-математика фанлари доктори, профессор.*

М.Рахимова *– ФарДУ математика ўқитиш методикаси йўналиши 3-курс талабаси.*

$$+\delta(x)\int_x^1 (t-x)^{-b} ch(x+t)\, y(t)\, dt = 0, \qquad 0<x<1 \tag{3}$$

ушбу бир жинсли шартларни

$$y(0)=y'(0), \quad y(1)=-y'(1) \tag{4}$$

қаноатлантирувчи ечими фақат $y(x)\equiv 0$ бўлишини исботлаш етарли. Бунинг учун энергия интеграллари усулидан фойдаланамиз. Аввал (3) тенгликни $y(x)$ га кўпайтирамиз ва *x* бўйича $[0,1]$ сегментда интеграллаймиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликдаги $y''(x)$ ва $y'(x)$ ҳосилалар иштирок этган интегралларни бўлаклаб ва (4) шартларни ҳисобга олиб,

$$\int_0^1 [y'(x)]^2 dx + [y'(1)]^2 + [y'(0)]^2 + \int_0^1 [(1/2)\alpha'(x) - \beta(x)] y^2(x)\, dx -$$

$$-(1/2)\alpha(1)y^2(1) + (1/2)\alpha(0)y^2(0) - \int_0^1 \gamma(x)y(x)\,dx \int_0^x (x-t)^{-a} ch(x+t)\, y(t)\, dt -$$

$$-\int_0^1 \delta(x)y(x)\,dx \int_x^1 (t-x)^{-b} ch(x+t)\, y(t)\, dt = 0 \tag{5}$$

тенгликка эга бўламиз. (5) тенгликдаги учинчи интегрални s_1 билан белгилайлик. $ch(x+t)$ ва $(x-t)^{-a}$ функцияларнинг $ch(x+t) = \left(e^{x+t} + e^{-x-t}\right)/2$,

$(x-t)^{-a} = \left[\Gamma(a)\cos(a\pi/2)\right]^{-1} \int_0^{+\infty} \eta^{a-1} \cos[(x-t)\eta]\, d\eta$ кўринишларидан

фойдаланиб, s_1 ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$s_1 = \left[2\Gamma(a)\cos(a\pi/2)\right]^{-1} \int_0^{+\infty} \eta^{a-1} d\eta \int_0^1 \gamma(x)\left\{ y(x)\int_0^x \left(e^{x+t} + e^{-x-t}\right)\cos[(x-t)\eta]\, y(t)\,dt \right\} dx .$$

Бу тенгликнинг ўнг томонида турган ифодага $\cos(x-t) = \cos x \cos t + \sin x \sin t$,

$e^{x+t} = e^x \cdot e^t$, $\quad f(x)\int_m^x f(t)\,dt = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dx}\left(\int_m^x f(t)\,dt\right)^2$ формулаларни қўллаб, баъзи алмаштиришлардан сўнг қуйидаги тенгликни ҳосил қиламиз:

$$s_1 = \frac{1}{4\Gamma(a)\cos(a\pi/2)} \int_0^{+\infty} \eta^{a-1} d\eta \int_0^1 \gamma(x) \frac{d}{dx}\left[\left(\int_0^x e^t \cos(\eta t)\, y(t)\,dt\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^x e^t \sin(\eta t)\, y(t)\,dt\right)^2 + \left(\int_0^x e^{-t} \cos(\eta t)\, y(t)\,dt\right)^2 + \left(\int_0^x e^{-t} \sin(\eta t)\, y(t)\,dt\right)^2 \right] dx .$$

https://uzjournals.edu.uz/fdu/vol1/iss1/23
DOI: 517.927

Бу ерда x бўйича интегрални бўлаклаб, ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$s_1=\frac{1}{4\Gamma(a)\cos(a\pi/2)}\int_0^{+\infty}\eta^{a-1}d\eta\left\{\gamma(1)\left[\left(\int_0^1 e^t\cos(\eta t)y(t)dt\right)^2+\left(\int_0^1 e^t\sin(\eta t)y(t)dt\right)^2+\right.\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^1 e^{-t}\cos(\eta t)y(t)dt\right)^2+\left(\int_0^1 e^{-t}\sin(\eta t)y(t)dt\right)^2\right]-\int_0^1\gamma'(x)\left[\left(\int_0^x e^t\cos(\eta t)y(t)dt\right)^2+\right.$$
$$\left.\left.+\left(\int_0^x e^t\sin(\eta t)y(t)dt\right)^2+\left(\int_0^x e^{-t}\cos(\eta t)y(t)dt\right)^2+\left(\int_0^x e^{-t}\sin(\eta t)y(t)dt\right)^2\right]dx\right\}. \quad (5)$$

тенгликнинг тўртинчи интегралини s_2 билан белгиласак ва юқоридаги ҳисоблашларни бажарсак, қуйидаги ифода ҳосил бўлади:

$$s_2=\frac{1}{4\Gamma(b)\cos(b\pi/2)}\int_0^{+\infty}\eta^{b-1}d\eta\left\{\delta(0)\left[\left(\int_0^1 e^t\cos(\eta t)y(t)dt\right)^2+\left(\int_0^1 e^t\sin(\eta t)y(t)dt\right)^2+\right.\right.$$
$$\left.+\left(\int_0^1 e^{-t}\cos(\eta t)y(t)dt\right)^2+\left(\int_0^1 e^{-t}\sin(\eta t)y(t)dt\right)^2\right]+\int_0^1\delta'(x)\left[\left(\int_x^1 e^t\cos(\eta t)y(t)dt\right)^2+\right.$$
$$\left.\left.+\left(\int_x^1 e^t\sin(\eta t)y(t)dt\right)^2+\left(\int_x^1 e^{-t}\cos(\eta t)y(t)dt\right)^2+\left(\int_x^1 e^{-t}\sin(\eta t)y(t)dt\right)^2\right]dx\right\}.$$

Масалада ва 1-теоремада қўйилган шартларга асосан $\Gamma(a)>0,\ \cos(a\pi/2)>0,\ \gamma(1)\le 0,\ \gamma'(x)\ge 0$, $\Gamma(b)>0,\ \cos(b\pi/2)>0,\quad \delta(0)\le 0,$ $\delta'(x)\le 0$, демак, $s_1\le 0,\ s_2\le 0$. Буни ва $\alpha'(x)-2\beta(x)\ge 0,\ \alpha(0)\ge 0,\ \alpha(1)\le 0,$ $\forall x\in[0,1]$ тенгсизликларни эътиборга олсак, (5) тенгликдан ва (4) шартлардан $y(x)\equiv 0$, $x\in[0,1]$ эканлиги келиб чиқади. 1-теорема исботланди.

2-теорема. *Агар 1-теорема шартлари бажарилса, қўйилган масаланинг ечими мавжуд ва ягона бўлади.*

Исбот. (1) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиб олайлик:

$$y''(x)=g(x), \quad (6)$$

бу ерда

$$g(x)=f(x)-\alpha(x)y'(x)-$$
$$-\delta(x)\int_x^1(t-x)^{-b}ch(x+t)y(t)dt-\gamma(x)\int_0^x(x-t)^{-a}ch(x+t)y(t)dt-\beta(x)y(x).$$

2-теоремани исботлашда (6) тенгламанинг хусусий ҳоли бўлган $y''(x)=0$ тенглама учун (4) шартлар билан қўйилган масаланинг Грин функциясидан фойдаланиш мумкин [1]. Бу функция қуйидаги кўринишга эга:

$$G(x,t)=(1/3)(t-2)(x+1),\ \ x<t;\ \ G(x,t)=(1/3)(t+1)(x-2),\ \ x>t.$$

$\{(6),(2)\}$ масалани $z(x)=y(x)+(1/3)k_1(x-2)-(1/3)k_2(x+1)$ алмаштириш ёрдамида бир жинсли чегаравий шартли қуйидаги

$$z''(x)=g(x),\qquad z(0)=z'(0),\qquad z(1)=-z'(1) \tag{7}$$

масалага келтириб оламиз. Агар вақтинча $g(x)$ ни маълум функция десак, (7) масаланинг ечими Гильберт теоремасига асосан $z(x)=\int_0^1 G(x,t)g(t)dt$ формула билан аниқланади.

Бу тенгликка $g(x)$ ва $z(x)$ функцияларнинг ифодасини қўямиз. Сўнгра $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ҳамда такрорий интегралларда интеграллаш тартибини алмаштирамиз:

$$y(x)=(1/3)\left[k_1(2-x)+k_2(x+1)+(x+1)\alpha(1)y(1)+(x-2)\alpha(0)y(0)\right]+$$
$$+\int_0^1 G(x,t)f(t)dt+\int_0^1\left\{\left[G(x,t)\alpha(t)\right]'_t-G(x,t)\beta(t)-\right.$$
$$\left.-\int_t^1 G(x,z)\gamma(z)(z-t)^{-a}ch(z+t)dz-\int_0^t G(x,z)\delta(z)(t-z)^{-b}ch(z+t)dz\right\}y(t)dt. \tag{8}$$

(8) тенгликда дастлаб $x=1$, сўнгра $x=0$ десак, $y(1)$ ва $y(0)$ ларга нисбатан

$$\begin{cases}\left[1-(2/3)\alpha(1)\right]y(1)+(1/3)\alpha(0)y(0)=h_1(t),\\ -(1/3)\alpha(1)y(1)+\left[1+(2/3)\alpha(0)\right]y(0)=h_2(t)\end{cases}$$

системага эга бўламиз. Бу ерда $h_1(t)$ ва $h_2(t)$ - (8) ифодага мос равишда $x=1$ ва $x=0$ қийматларни қўйганимизда ҳосил бўлган озод функциялардир. Бу системанинг асосий детерминанти $1+(2/3)\left[\alpha(0)-\alpha(1)\right]-(1/3)\alpha(0)\alpha(1)\neq 0$ бўлгани учун $y(1)$ ва $y(0)$ номаълумлар бир қийматли топилади. Топилган $y(1)$ ва $y(0)$ ларни (8) тенгликка қўйиб, уни

$$y(x)+\int_0^1 K(x,t)y(t)dt=q(x),\ \ x\in[0,1] \tag{9}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда $K(x,t)-\{(x,t):0\le x\le 1,\ 0\le t\le 1\}$ тўртбурчакда чегараланган ва бўлакли узлуксиз маълум функция, $q(x)$ эса $[0,1]$ оралиқда узлуксиз бўлган маълум функция. (9) интеграл тенглама - $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб [1,2], қўйилган масалага эквивалентдир. Шунинг учун бу интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги қўйилган масала ечимининг ягоналигидан, яъни 1-теоремадан келиб чиқади. 2-теорема исботланди.

References:

1. O‘rinov A.Q. Parabolik tipdagi differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar. –T.: Mumtoz so’z, 2015.
2. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. –T.: Yangiyul polygraph service, 2007.

https://uzjournals.edu.uz/fdu/vol1/iss1/23
DOI: 517.927