Karakalpak Scientific Journal

Volume 3
Issue 1 *Issue 1*

Article 10

3-3-2020

SMOOTHNESS OF RIESZ POTENTIAL OUT OF THE SET OF SMALL LEBESGUE MEASURE

A. Daujanov
Karakalpak State University, aynazard@mail.ru

SMOOTHNESS OF RIESZ POTENTIAL OUT OF THE SET OF SMALL LEBESGUE MEASURE

Ainazar Daujanov Shinnazarovich

Karakalpak State University

E-mail: aynazard@mail.ru

ABSTRACT

We deals with the differential properties of the potential $U_\alpha^\mu(x) = \int\limits_{R^n} K_\alpha(x-y)d\mu(y)$, $0<\alpha<n$, to some Borel measure μ of order α, where $K_\alpha(x) = \dfrac{1}{|x|^{n-\alpha}}$ – Riesz kernel. The smoothness of Riesz potential out of some set of small Lebesgue measure is proved. The method of proof is based on the representation theorem of subharmonic function with the help of potential $U_\alpha^\mu(x)$ associated with a Borel measure μ. The result complements the well-known theorem of Cartan.

Keywords: a potential of Riesz; C – property of Luzin; smoothness; measure of Lebesgue; measure of Borel; capacity.

ГЛАДКОСТИ ПОТЕНЦИАЛА РИССА ВНЕ МНОЖЕСТВА МАЛОЙ ЛЕБЕГОВОЙ МЕРЫ

Даужанов А.Ш.

Каракалпакский государственный университет имени БердахаE-mail:

aynazard@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В работе рассматриваются дифференциальные свойства потенциала $U_\alpha^\mu(x)$ по некоторой борелевской мере μ порядка α

$U_\alpha^\mu(x) = \int\limits_{R^n} K_\alpha(x-y)d\mu(y),\ 0 < \alpha < n,$ где $K_\alpha(x) = \dfrac{1}{|x|^{n-\alpha}}$ – ядро Рисса. Доказывается гладкость потенциала Рисса вне некоторого множества с малой мерой Лебега. Метод доказательства основан на теореме Рисса о представлении субгармонической функции при помощи потенциала $U_\alpha^\mu(x)$ ассоциированного с борелевской мерой $\mu = \Delta u$. Полученный результат дополняет известную теорему Картана.

Ключевые слова: потенциал Рисса; C – свойство Лузина; гладкость; мера Лебега; борелевская мера; емкость.

Известно, что класс субгармонических функций (Sh) является одним из основных аппаратов исследования аналитических функций одного переменного. Одной из особенности субгармонических функций является отсутствия у них свойства гладкости, так как (Sh) функция может не принадлежать классу C^2.

Тесная связь субгармонических функции с зарядами (мерами) и их потенциалами, основанная на теореме Рисса является одной из фундаментальных в теории потенциала.

Имеет место следующая важная теорема о представлении субгармонической функции в виде суммы гармонической функции и потенциала $U_\alpha^\mu(x)$ по некоторой борелевской мере μ порядка α.

Теорема А (Ф.Рисс, см., например, [5],[7])**.** *Пусть* $u(x)-$ *субгармоническая функция в области* $G \subset R^n$ *и* $u(x) \neq -\infty$*. Тогда для любой компактной подобласти* $\Omega \subseteq G$ *существует положительная мера* μ *и гармоническая в* Ω *функция* $H(x)$*, что имеет место равенство*

$$u(x) = U_\alpha^\mu(x) + H(x).$$

Эта теорема позволяет сводить вопрос о гладкости субгармонических функций к вопросу изучения гладкости потенциалов борелевских мер μ в R^n.

Из классической теоремы Лузина (см. ниже) следует, что всякая измеримая функция непрерывна почти всюду.

Теорема Б ($C-$свойства Лузина). *Если* $f(x)$ *измерима в области* $G \subset R^n$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует открытое множество* $U_\varepsilon \subset G$ *такое, что* $m(U_\varepsilon) < \varepsilon$ *и* $f(x)$ *непрерывна в* $G \setminus U_\varepsilon$.

Емкостный аналог этой теоремы для потенциалов Рисса доказан А.Картаном.

Теорема В (см.[5, с. 231]). *Пусть* $U_\alpha^\mu(x)-$*произвольный потенциал. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует открытое множество* $U_\varepsilon \subset R^n$ *с емкостью* $cap_{n-\alpha}(U_\varepsilon) < \varepsilon$ *такое, что потенциал* $U_\alpha^\mu(x)$ *непрерывен в дополнении* $R^n \setminus U_\varepsilon$.

Нами получено утверждение о C^α гладкости потенциала Рисса, дополняющие результат Картана о свойствах непрерывности потенциала вне множества малой лебеговой меры.

Теорема. *Пусть* $U_\alpha^\mu(x)-$ *произвольный потенциал Рисса. Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *существует открытое множество* $U_\varepsilon \subset R^n$ *с мерой Лебега* $m(U_\varepsilon) < \varepsilon$ *такое, что потенциала* $U_\alpha^\mu(x)$ *принадлежит классу* C^α *на компактных подмножествах в* $R^n \setminus U_\varepsilon$.

Результаты типа $C-$свойства Лузина-Картана ранее получены для различных классов функций. Например, в [1] и [6] доказаны почти всюду дважды дифференцируемость выпуклых функций, в [9] – для почти всюду дифференцируемых функций, в [3, 7] - для субгармонических функций, в [2] - для функций класса Соболева.

Напомним определение класса $C^\alpha(G)$ для замкнутого множества $G \subset R^n$. Мы будем говорить, что $u(x) \in C^\alpha(G),\ \alpha \ge 0$, если существуют определенные на G функции $u^{(j)},\ 0 \le |j| \le \alpha$, такие, что

$$u^{(0)}(x) = u(x),$$

$$\left| u^{(j)}(x+h) - \sum_{|j+l| \le \alpha} \frac{u^{(j+l)}(x)}{l!} h^l \right| \le \gamma(h) |h|^{\alpha-|j|},\ x, x+h \in G, |j| \le \alpha,$$

(1)

$\gamma(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Здесь использованы обозначения: $j = (j_1, ..., j_n)$ и $l = (l_1, ..., l_n)-$ мультииндексы, $|j| = j_1 + ... + j_n$, $l! = l_1! ... l_n!$, $h^l = h_1^{l_1} ... h_n^{l_n}$.

Заметим, что в случае $G = R^n$ класс функций $C^\alpha(G)$ имеют простые дифференциальные свойства.

Известная теорема Уитни [8] о продолжении гладких функции устанавливает связь между классами функций $C^{\alpha}(G)$ и $C^{\alpha}(R^n)$: *пусть* $G \subset R^n -$ *замкнутое множество и* $u(x) \in C^{\alpha}(G), \alpha \geq 0$. *Тогда* $u(x)$ *продолжается на все пространство* R^n *как функция класса* $C^{\alpha}(R^n)$, *т.е. существует функция* $f(x) \in C^{\alpha}(R^n)$ *такая, что* $f(x) \equiv u(x)$ *на* G.

Таким образом, из полученного результата вытекает, что потенциал Рисса $U_{\alpha}^{\mu}(x)$ по некоторой борелевской мере μ вне множества U_{ε} малой меры является следом функции из класса $C^{\alpha}(R^n)$.

Переходим к *доказательству теоремы*.

Будем изучать гладкость потенциала $U_{\alpha}^{\mu}(x)$ для конечной борелевской меры μ, сосредоточенной в единичном круге: $B(0,1) = \{x \in R^n : |x| < 1\}$, $supp\mu \subseteq B(0,1)$. Ясно, что вне носителя $supp\mu$ этот потенциал является бесконечно гладким. Поэтому гладкость данного потенциала достаточно изучать в $B = B(0,1)$.

Рассмотрим сначала случай, когда $\alpha = m,\ m \in N$. Формально определим множество U_{ε}. Пусть в точке $x \in B$ существует плотность $\mu'(x)$:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\mu(B(x,t))}{m(B(x,t))} = \mu'(x).$$

Рассмотрим заряд $d\nu_x(y) = d\mu(y) - \mu'(x)dy.$

Ясно, что плотность заряда $d\nu_x(y)$ в точке x равна нулю.

Для любого $\varepsilon > 0$ в качестве U_{ε} берем открытое подмножество единичного шара B, с мерой Лебега, удовлетворяющим следующим условиям:

1) функция $\mu'(x)$ непрерывна на компакте $\overline{B} \setminus U_{\varepsilon}$;

2) все частные производные порядка m потенциала $U_{\alpha}^{\mu}(x),\ \alpha = m$ непрерывны на компакте $\overline{B} \setminus U_{\varepsilon}$;

3) для некоторой функции $\gamma(t) > 0,\ t \in (0,+\infty),\ \gamma(t) \to 0$ при $t \to 0$ имеют места следующие неравенства:

а) $V(B(x,t)) \leq \gamma(t)t^n,\ x \in \overline{B} \setminus U_{\varepsilon}$, где $V(B(x,t)) = \int\limits_{B(x,t)} |d\nu_x(y)|$;

б) $$\left| \int\limits_{B(x,t)} \frac{\partial^m}{\partial x^l} \frac{1}{|x-y|^{n-m}} d\mu(y) \right| \leq \gamma(t), \quad x \in \overline{B} \setminus U_{\varepsilon},\ \forall l : |l| = m.$$

Выполнимость условий 1) и 2) вне некоторого открытого множества U_{ε}

следует из теоремы (С - свойство) Лузина, а выполнимость условия 3) вытекает из следующей леммы работы [3].

Лемма (см.[3]). *Для любого* $\varepsilon > 0$ существует *открытое множество* $U_\varepsilon \subset R^n$ *с мерой Лебега* $m(U_\varepsilon) < \varepsilon$ *такое, что:*

1) семейство функции $(T_\delta \nu(x) \underset{\delta\to 0}{\Rightarrow} (T\nu)(x))$ *на* $R^n \setminus U_\varepsilon$*;*

2) семейство функции $(\dfrac{\mu(B(x,t))}{m(B(x,t))} \underset{t\to 0}{\Rightarrow} \mu'(x))$ *на* $R^n \setminus U_\varepsilon$.

Теперь на компакте $\overline{B} \setminus U_\varepsilon$ оценим разность

$$R_j(x,h) = \frac{\partial^{|j|} U_m^\mu(x+h)}{\partial x^j} - \sum_{|j+l|\le m} \frac{1}{l!} \frac{\partial^{|j+l|} U_m^\mu(x)}{\partial x^{j+l}} h^l, \ |j| \le m.$$

Возьмем произвольную точку $x^0 \in \overline{B} \setminus U_\varepsilon$ и разложим потенциал Рисса $U_m^\mu(x)$ на две части:

$$U_m^\mu(x) = \int_B \frac{d\nu_{x^0}(y)}{|x-y|^{n-m}} + \mu'(x^0) \int_B \frac{dy}{|x-y|^{n-m}} = U_m^{\nu_{x^0}}(x) + U_m^{\mu'(x^0)}(x).$$

Соответственно на две части разлагается и разность $R_j(x,h)$:

$$R_j(x,h) = R_j^{(1)}(x,h) + R_j^{(2)}(x,h).$$

Займемся оценкой наиболее общего случая $j=0$, а для $|j|>0$ доказательства оценки (1) приводится аналогично. Заметим, что в случае $|j|=m$ оценка сразу следует из условия 2).

Так как, потенциал $\int_B \dfrac{dy}{|x-y|^{n-m}}$ бесконечно гладкая на $\overline{B}$, а функция $\mu'(x^0)$ непрерывна на компакте $\overline{B} \setminus U_\varepsilon$, то на компакте $\overline{B} \setminus U_\varepsilon$ для потенциала

$$U_m^{\mu'(x^0)}(x) = \mu'(x^0) \int_B \frac{dy}{|x-y|^{n-m}}$$

имеет место оценка

$$\left| U_m^{\mu'(x^0)}(x+h) - \sum_{|l|\le m} \frac{1}{l!} \frac{\partial^{|l|} U_m^{\mu'(x^0)}(x)}{\partial x^l} h^l \right| \le \gamma_0(h) |h|^m,$$

т.е.

$$\left| R_0^{(2)}(x^0,h) \right| \le \gamma_0(h) |h|^m, \ x^0, x^0+h \in \overline{B} \setminus U_\varepsilon,$$

где $\gamma_0(h) \to 0$ при $h \to 0$.

При оценке разности $R_0^{(1)}(x,h)$, мы заметим, что для потенциала

$$U_m^{\nu_{x^0}}(x)=\int\limits_B \frac{d\nu_{x^0}(y)}{|x-y|^{n-m}}$$

частные производные $\dfrac{\partial^{|j|}U_m^{\nu_{x^0}}(x)}{\partial x^j}$, $|j|\le m$ определяются как аппроксимативные производные, которые задаются формулой

$$\frac{\partial^{2m}}{\partial x^j}U_{2m}^{\mu}(x)=\delta_j(-1)^m N_m C_m \mu'(x)+\int \frac{\partial^{2m}}{\partial x^j}\left(\frac{1}{|x-y|^{n-2m}}\right)d\mu(y),\ (2)\cdot$$

Здесь $\delta_j=\begin{cases}1,\ j\in I,\\ 0,\ j\notin I,\end{cases}$ $I-$множество всех мультииндексов $j=(j_1,\ldots,j_n)$ таких, что $|j|=2m$ и для $k=\overline{1,m}$: $j_k=0$ или $j_k=2$.

Согласно равенству (1) производные m–го порядка в точке x^0 совпадают с сингулярным интегралом

$$\int\limits_B \frac{\partial^m}{\partial x^j}\frac{1}{|x^0-y|^{n-m}}d\nu_{x^0}(y)=\lim_{\delta\to 0}\int\limits_{B\setminus\{|x^0-y|<\delta\}}\frac{\partial^m}{\partial x^j}\frac{1}{|x^0-y|^{n-m}}d\nu_{x^0}(y),$$

$|j|=m.$

Напомним, что согласно условию 3) этот сингулярный интеграл существует во всех точках $x^0\in\overline{B}\setminus U_\varepsilon$.

Следовательно,

$$R_0^{(1)}(x^0,h)=\int\limits_{|x^0-y|<2|h|}\left[\frac{1}{|x^0-y+h|^{n-m}}-\frac{1}{|x^0-y|^{n-m}}\right]d\nu_{x^0}(y)-$$

$$-\sum_{0<|l|<m}\frac{h^l}{l!}\int\limits_{|x^0-y|<2|h|}\frac{\partial^{|l|}}{\partial x^l}\frac{1}{|x^0-y|^{n-m}}d\nu_{x^0}(y)-$$

$$-\sum_{|l|=m}\frac{h^l}{l!}\int\limits_{|x^0-y|<2|h|}\frac{\partial^m}{\partial x^l}\frac{1}{|x^0-y|^{n-m}}d\nu_{x^0}(y)+$$

$$+\int\limits_{|x^0-y|\ge 2|h|}\left[\frac{1}{|x^0-y+h|^{n-m}}-\sum_{|l|\le m}\frac{h^l}{l!}\frac{\partial^{|l|}}{\partial x^l}\frac{1}{|x^0-y|^{n-m}}\right]d\nu_{x^0}(y)=$$

$$=J_1(x^0,h)-J_2(x^0,h)-J_3(x^0,h)+J_4(x^0,h).$$

Имеем

$$\left|J_1(x^0,h)\right| = \left| \int\limits_{\left|x^0-y\right|<2|h|} \left[\frac{1}{\left|x^0-y+h\right|^{n-m}} - \frac{1}{\left|x^0-y\right|^{n-m}} \right] d\nu_{x^0}(y) \right| \le$$

$$\le \int\limits_{\left|x^0-y\right|<3|h|} \frac{\left|d\nu_{x^0}(y+h)\right|}{\left|x^0-y\right|^{n-m}} + \int\limits_{\left|x^0-y\right|<2|h|} \frac{\left|d\nu_{x^0}(y+h)\right|}{\left|x^0-y\right|^{n-m}}.$$

Переходя к полярным системам координат, перепишем последние интегралы в виде

$$\int\limits_0^{3|h|} \frac{dV(B(x^0+h,t))}{t^{n-m}} + \int\limits_0^{2|h|} \frac{dV(B(x^0,t))}{t^{n-m}} =$$

$$= \frac{3^m V(B(x^0+h,3|h|))}{(3|h|)^n} |h|^m + (n-m) \int\limits_0^{3|h|} \frac{V(B(x^0+h,t))}{t^n} t^{m-1} dt +$$

$$+ \frac{2^m V(B(x^0,2|h|))}{(2|h|)^n} |h|^m + (n-m) \int\limits_0^{2|h|} \frac{V(B(x^0,t))}{t^n} t^{m-1} dt\cdot$$

Отсюда, согласно условию 3) (пункт а))

$$J_1(x^0,h) \le \gamma_1(h)|h|^m,\ \gamma_1(h) \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Теперь переходим к оценке величины $J_2(x^0,h)$:

$$\left|J_2(x^0,h)\right| = \left| \sum_{0<|l|<m} \frac{h^l}{l!} \int\limits_{\left|x^0-y\right|<2|h|} \frac{\partial^{|l|}}{\partial x^l} \frac{1}{\left|x^0-y\right|^{n-m}} d\nu_{x^0}(y) \right| \le$$

$$\le const \sum_{0<|l|<m} \frac{|h|^l}{l!} \int\limits_{\left|x^0-y\right|<2|h|} \frac{\left|d\nu_{x^0}(y)\right|}{\left|x^0-y\right|^{n-m+|l|}} =$$

$$= const \sum_{0<|l|<m} \frac{|h|^{|l|}}{l!} \int\limits_0^{2|h|} \frac{dV(B(x^0,t))}{t^{n-m+|l|}} =$$

$$= const \sum_{0<|l|<m} \frac{|h|^{|l|}}{l!} \left(\frac{V(B(x^j,2|h|))}{(2|h|)^{n-m+|l|}} + (n-m+|l|) \int\limits_0^{2|h|} \frac{V(B(x^0,t))}{t^{n-m+|l|+1}} dt \right).$$

Возвращаясь к условию 3), будем иметь

$$\left|J_2(x^0,h)\right| \le \gamma_2(h)|h|^m,\ \gamma_2(h) \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

$J_3(x^0,h)$ оценивается с помощью условия 3) (пункт б)):

$$\left|J_3(x^0,h)\right| = \left| \sum_{|l|=m} \frac{h^l}{l!} \int\limits_{\left|x^0-y\right|\le 2|h|} \frac{\partial^m}{\partial x^l} \frac{1}{\left|x^0-y\right|^{n-m}} d\nu_{x^0}(y) \right| \le$$

$$\le |h|^m \sum_{|l|=m} \frac{1}{l!} \left| \int\limits_{|x^0-y|<2|h|} \frac{\partial^m}{\partial x^l} \frac{1}{|x^0-y|^{n-m}} d\nu_{x^0}(y) \right| \le \gamma_3(h)|h|^m,$$

$\gamma_3(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Теперь будем оценить величину $J_4(x^0,h)$. Для этого мы воспользуемся следующим неравенством

$$\left| \frac{1}{|x-y+h|^{n-m}} - \sum_{|l|=m} \frac{h^l}{l!} \frac{\partial^{|l|}}{\partial x^l} \frac{1}{|x-y|^{n-m}} \right| \le const \frac{|h|^{m+1}}{|x+y|^{n+1}}, \qquad (3)$$

при $|x-y| \ge 2|h|$ которая получается из формулы Тейлора для функции $\frac{1}{|x-y|^{n-m}}$.

Будем иметь

$$|J_4(x^0,h)| \le const|h|^{m+1} \int\limits_{|x^0-y|\ge 2|h|} \frac{|d\nu_{x^0}(y)|}{|x^0-y|^{n+1}} =$$

$$= const|h|^{m+1} \int\limits_{2|h|}^{\infty} \frac{dV(B(x^0,t))}{t^{n+1}}.$$

Проинтегрировав по частям последний интеграл и используя условие 3), мы получаем оценку

$$|J_4(x^0,h)| \le \gamma_4(h)|h|^m,\ \gamma_4(h) \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Наконец объединяя все полученные оценки для $R_0^{(1)}(x^0,h)$ и $R_0^{(2)}(x^0,h)$, получаем оценку для $R_0(x,h)$:

$R_0(x,h)| \le \overline{\gamma}(h)|h|^m$, $x, x+h \in \overline{B} \setminus U_\varepsilon$, $\overline{\gamma}(h) \to 0$ при $h \to 0$. Таким образом, потенциал $U_m^\mu(x) \in C^m(\overline{B} \setminus U_\varepsilon)$.

Рассмотрим случай $\alpha : 0 < \alpha < n,\ \alpha \notin \mathbf{N}$. Пусть $k = [\alpha]$– целая часть числа α. Оценим теперь разность

$$R_j(x,h) = \frac{\partial^{|j|} U_\alpha^\mu(x+h)}{\partial x^j} - \sum_{|j+l|\le k} \frac{1}{l!} \frac{\partial^{|j+l|} U_\alpha^\mu(x)}{\partial x^{j+l}} h^l$$

при $x,\ x+h \in \overline{B} \setminus U_\varepsilon$, где U_ε как и прежде, удовлетворяет всем выше указанным условиям. Пусть $x^0 \in \overline{B} \setminus U_\varepsilon$ и

$$U_\alpha^\mu(x) = U_\alpha^{\nu_{x^0}}(x) + U_\alpha^{\mu'(x^0)}(x).$$

Соответственно

$$R_j(x,h) = R_j^{(1)}(x,h) + R_j^{(2)}(x,h).$$

И в этом случае потенциал $U_{\alpha}^{\mu'(x^0)}(x)$ – бесконечно гладкая на $\overline{B}$, т.е.

$$\left|R_j^{(2)}(x,h)\right| \le \widetilde{\gamma}_0(h)|h|^{\alpha-|j|},\ |j|\le k,\ \widetilde{\gamma}_0(h)\to 0 \text{ при } h\to 0.$$

Теперь оценим разность $R_j^{(1)}(x,h)$ для $j=0$, а случай $|j|>0$ оценивается аналогично:

$$\int\limits_{|x^0-y|<2|h|}\left[\frac{1}{\left|x^0-y-h\right|^{n-\alpha}}-\frac{1}{\left|x^0-y\right|^{n-\alpha}}\right]d\nu_{x^0}(y)-$$

$$-\sum_{0<|l|\le k}\frac{h^l}{l!}\int\limits_{|x^0-y|<2|h|}\frac{\partial^{|l|}}{\partial x^l}\frac{1}{\left|x^0-y\right|^{n-\alpha}}d\nu_{x^0}(y)+$$

$$+\int\limits_{|x^0-y|\ge 2|h|}\left[\frac{1}{\left|x^0-y+h\right|^{n-\alpha}}-\sum_{|l|\le k}\frac{h^l}{l!}\frac{\partial^{|l|}}{\partial x^l}\frac{1}{\left|x^0-y\right|^{n-\alpha}}\right]d\nu_{x^0}(y)=$$

$$=\widetilde{J}_1(x^0,h)-\widetilde{J}_2(x^0,h)+\widetilde{J}_3(x^0,h).$$

Имеем

$$\left|\widetilde{J}_1(x^0,h)\right|=\left|\int\limits_{|x^0-y|<2|h|}\left[\frac{1}{\left|x^0-y+h\right|^{n-\alpha}}-\frac{1}{\left|x^0-y\right|^{n-\alpha}}\right]d\nu_{x^0}(y)\right|\le$$

$$\le\int\limits_{|x\ \ -y|<3|h|}\frac{\left|d\nu_{x^0}(y+h)\right|}{\left|x^0-y\right|^{n-\alpha}}+\int\limits_{|x^0-y|\le 2|h|}\frac{\left|d\nu_{x^0}(y)\right|}{\left|x^0-y\right|^{n-\alpha}}=$$

$$=\int\limits_0^{3|h|}\frac{dV(B(x^0+h,t))}{t^{n-\alpha}}+\int\limits_0^{2|h|}\frac{dV(B(x^0,t))}{t^{n-\alpha}}=$$

$$=\frac{V(B(x^0+h,3|h|))}{(3|h|)^n}3^{\alpha}|h|^{\alpha}+(n-\alpha)\int\limits_0^{3|h|}\frac{V(B(x^0+h,t))}{t^n}t^{\alpha-1}dt+$$

$$+\frac{V(B(x^0,2|h|))}{(2|h|)^n}2^{\alpha}|h|^{\alpha}+(n-\alpha)\int\limits_0^{2|h|}\frac{V(B(x^0,t))}{t^n}t^{\alpha-1}dt$$

и согласно условию 3) получаем

$$\left|\widetilde{J}_1(x^0,h)\right|\le\widetilde{\gamma}_1(h)|h|^{\alpha},\ \widetilde{\gamma}_1(h)\to 0 \text{ при } h\to 0.$$

Величина $\widetilde{J}_2(x^0,h)$ оценивается аналогичным образом:

$$\left|\widetilde{J}_2(x^0,h)\right|\le\widetilde{\gamma}_2(h)|h|^{\alpha},\ \widetilde{\gamma}_2(h)\to 0 \text{ при } h\to 0.$$

При оценке $\widetilde{J}_3(x^0,h)$ пользуясь оценкой (3) для функции $\dfrac{1}{|x-y|^{n-\alpha}}$, получаем

$$\left|\tilde{J}_3(x^0,h)\right| \le const \times |h|^{k+1} \int\limits_{|x^0-y|\ge 2|h|} \frac{\left|d\nu_{x^0}(y)\right|}{\left|x^0-y\right|^{n-\alpha+k+1}} =$$

$$= const \times |h|^{k+1} \int\limits_{2|h|}^{+\infty} \frac{dV(B(x^0,t))}{t^{n-\alpha+k+1}} =$$

$$= const \times |h|^{k+1} \left(-\frac{V(B(x^0,2|h|))}{(2|h|)^n}|h|^{\alpha-k-1} + \right.$$

$$\left. + (n-\alpha-k+1) \int\limits_{2|h|}^{+\infty} \frac{V(B(x^0,t))}{t^n} t^{\alpha-k-2} dt\right).$$

Отсюда, в силу условия 3) заключаем, что

$$\left|\tilde{J}_3(x^0,y)\right| \le \tilde{\gamma}_3(h)|h|^\alpha, \ \tilde{\gamma}_3(h) \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Наконец, объединяя все оценки, получаем

$R_0(x,h) \le \tilde{\gamma}(h)|h|^\alpha, \ \tilde{\gamma}(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Таким образом, потенциал $U_\alpha^\mu(x)$ принадлежит классу $C^\alpha(\bar{B}\setminus U_\varepsilon)$, и тем самым теорема доказана.

В заключение благодарим А. Садуллаева за внимание к работе.

References

1. Aleksandrov A.D. Sushhestvovanie pochti vezde vtorogo differenciala vypukloj funkcij i nekotorye svjazannye s nim svojstva vypuklyh poverhnostej// Uch.zapiski LGU. – 1939.¬ Ser. mat. Vyp.6. – S.3-35.

2. Bojarski B., Hajlasz P., Strzelecki P. Improved $C^{k,\lambda}$ approximation of higher order Sobolev functions in norm and capacity// Math. subject classification, 2000.

3. Imomkulov S.A. Dvazhdy differenciruemost' subgarmonicheskih funkcij// Izv.RAN.Ser.mat. – 1992. – T.56, #4. –S.877-888.

4. Imomkulov S.A., Dauzhanov A.Sh. Differencial'nye svojstva potencialov Rissa// Krajovi zadachi dlja diferencial'nih rivnjan'. Zb. nauk. pr. –Chernivci (Ukraina), Prut, 2005. –Vip. 12. –S.120-128.

5. Landkof N.S. Osnovy sovremennoj teorii potenciala. –M., Nauka, 1966. . —515 s.

6. Reshetnjak Ju.G. Obobshhennye proizvodnye i differenciruemost' pochti vsjudu// Mat.sb. – 1968. –T.75, #3. –S.323-334.

7. Sadullaev A., Madrahimov R. Gladkost' subgarmonicheskih funkcij// Mat.sb.–1990. –T.181, No 2. –S.167-182.

8. Stejn I. Singuljarnye integraly i differencial'nye svojstva funkcij. –M., Mir, 1973. 342 s.

9. Federer G. Geometricheskaja teorija mery. –M., Nauka, 1987. 760 s.