[Scientific reports of Bukhara State University](https://uzjournals.edu.uz/buxdu)

Volume 4
Issue 1 *BSU 2020 issue 1*

Article 17

2-25-2020

JONES SUBSTANTIAL ANALOGUE SUBFACTORS FOR REAL FINITE FACTORS

Xabibjon Boltayev Xamitovich
Teacher of the Department of Mathematics, Bukhara State University

УДК: 517.98

МОДДИЙ ЧЕКЛИ СУБ-ОМИЛЛАР УЧУН ЖОНС СУБ-ОМИЛЛАРИНИНГ МОДДИЙ АНАЛОГИ

ВЕЩЕСТВЕННЫЙ АНАЛОГ ПОДФАКТОРОВ ДЖОНСА ДЛЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ КОНЕЧНЫХ ФАКТОРОВ

JONES SUBSTANTIAL ANALOGUE SUBFACTORS FOR REAL FINITE FACTORS

Болтаев Хабибжон Хамитович
преп. каф. математики БухГУ

Annotatsiya. *Maqolada chekli omilning moddiy sub-omillar indeksi tushunchasi o'rganilgan. Kompleks holdagi kabi chekli moddiy omillarning o'suvchi moddiy sub-omillar ketma-ketligi qurilgan. Chekli omilning moddiy sub omillari indeksi uchun mumkin bo'lgan qiymatlar to'plami topilgan.*

Tayanch so'zlar: *omil, sub-omil, indeks, kommutant, fazo, antiavtomorfizm, proektor, involyutsiya.*

Аннотация. *В статье рассмотрено индекс вещественного подфактора конечного фактора. Построена последовательность возрастающих вещественных подфакторов конечного фактора. Найдено множество все возможные значения индексов вещественных подфакторов конечного фактора.*

Ключевые слова: *Фактор, подфактор, индекс, коммутант, пространство, антиавтоморфизм, проектор, инволюция.*

Annotation. *In the article the index of the material sub-factor of the final factor is considered. A sequence of increasing material sub-factors of the final factor is constructed. A set of all possible values of the indices of real sub-factors of the final factor is obtained.*

Key words: *Factor, sub-factor, index, commutant, space, anti-automorphism, projector, involution.*

Введение. Как известно, что теория W*-алгебр достаточно хорошо развита. Наряду с этой теорией, в последнее время, отдельно интенсивно развивается и теория W*-подалгебр. Обобщая понятие индекса подгруппы для конечных W*-подалгебр, В. Джонс вычислил множество всех возможных значения индекса конечных подфакторов. Его основное достижение заключается в том, что при доказательстве основного результата он построил возрастающую последовательность подфакторов, обладающие уникальными свойствами, которые в точности является алгебрами Гекке $H_m(q)\ (m \in N)$.Далее он выводит отсюда доказательство существование Марковского следа на алгебре $H_\infty(q) = \bigcup_m H_m$. А затем, скомбинировав эти следы с описанием узлов в $\mathbf{R}^3$, на основе группы кос B_n, построил новый полиномиальный инвариант для узлов. Кроме того, каждому пару W*-алгебр $N \subset M$ сопоставляя некоторый двудольный граф, он получает необходимое и достаточное условия существование Марковского следа, и тем самым, открывает возможность изучение W*-подалгебр на языке графов.

В протяжении несколько лет, наряду с теорией (комплексных) W*-алгебр, интенсивно развивается теория вещественных алгебр фон Неймана. В работах[1,2] рассмотрено вещественный аналог индекса подфакторов конечных факторов. Применяя метод переход обертывающей W*-алгебры, был получен множество всех возможных значения индекса конечных вещественных подфакторов. В настоящей работе, этот же результат получен другим методом. Именно, в вещественном случае, для вычисления множество всех возможных значения индекса построена возрастающая последовательность вещественных подфакторов, обладающие тем же уникальными свойствами, которые имели место в комплексном случае.

2. Предварительные сведения. Пусть *B(H)* - алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в комплексном гильбертовом пространстве H. Слабо замкнутая $*$-подалгебра *M* в *B(H)*, содержащая единичный оператор **1**, называется W^**-алгеброй*. Вещественная *-подалгебра $\Re \subset B(H)$ с единицей, называется *вещественной* W^* *- алгеброй,* если она слабо замкнута и $\Re \cap i\Re = \{0\}$. Вещественная W^* - алгебра $\Re$ называется *вещественным фактором,* если центр алгебры Z($\Re$) совпадает с {λ**1:** $\lambda \in$ **R**}. Мы скажем, что вещественная W^* - алгебра $\Re$ имеет тип $I_{кон}$, I_∞, II_1, II_∞ или III_λ, $(0 \le \lambda \le 1)$, если ее обёртывающая W^*- алгебра $M = \Re + i\Re$ (т.е. наименьшая W^* - алгебра, содержащая $\Re$) имеет соответствующий тип, в смысле обычной классификации W^*-алгебр. Алгебра $M' = \{x \in B(H) : xy = yx, \forall y \in M\}$ называется *коммутантом* алгебры M. Линейное отображение α алгебры *M* в себя с $\alpha(x^*) = \alpha(x)^*$ называется *-*автомор-физмом,* если $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$; *-*антиавтоморфизмом,* если $\alpha(xy) = \alpha(y)\alpha(x)$ и *инволютивным,* если $\alpha^2(x) = x$. Известно [2], что если α инволютивный *-антиавтоморфизм алгебры *M,* то через (M,α) мы обозначим вещественную W^* - алгебру, порожденная *-антиавтоморфизмом α, т.е. $(M,\alpha) = \{x \in M : \alpha(x) = x^*\}$. Верно и обратное, каждая вещественная W^*-алгебра $\Re$ имеет вид (M,α), где $M = \Re + i\Re$ – обёртывающая W^* - алгебра и α - инволютивный *-антиавтоморфизм *M,* определенный как $\alpha(x+iy) = x^* + iy^*$. Следовательно, всякую вещественную W^*-алгебру $\Re$ мы можем отождествлять с парой (M,α).

Пусть $M(\subset B(H))$ - конечный фактор и пусть τ - единственный точный нормальный след на *M*. Если α - инволютивный *-антиавтоморфизм *M,* то τ α-инвариантен. Обозначаем через $L^2(M)$ пополнение алгебры *M* относительно нормы $\|x\|_2 = \tau(x^*x)^{\frac{1}{2}}$. Аналогично, через $L^2(M,\alpha)$ мы обозначим пополнение вещественного фактора (M,α). Тогда $L^2(M)$ есть гильбертово пространство и оно равен комплексификации вещественной гильбертово пространство $L^2(M,\alpha)$, т.е. $L^2(M) = L^2(M,\alpha) + iL^2(M,\alpha)$. Кроме того, алгебра $B_r(L^2(M,\alpha))$ - всех ограниченных линейных операторов на $L^2(M)$ есть комплексификация $B_r(L^2(M))$, где $B_r(L^2(M))$ - вещественная алгебра всех ограниченных линейных операторов на $L^2(M,\alpha)$.

3. Индекс подфактора. Пусть M и её коммутант M' - конечные факторы со следами τ и τ', соответственно. Рассмотрим проекторы $e_\xi : H \to \overline{M'\xi}$, $e'_\xi : H \to \overline{M\xi}$, где $\xi \in H$, $\xi \ne 0$. Можно показать, что $e_\xi \in M$, $e'_\xi \in M'$ и число $\tau(e_\xi)/\tau'(e'_\xi)$, обозначаемое как $dim_M(H)$, не зависит от выбора вектора ξ. Индексом подфактора $N \subset M$ называется число $[M:N] = \dim_N(L^2(M))$. Аналогично определяется вещественный аналог понятие индекса. Если $P \subset \Re$ - пара вещественных факторов и $N \subset M$ - их обёртывающие факторы, т.е. $N = P + iP$, $M = \Re + i\Re$, тогда как показано в работах [1, 2] имеет место равенство $[\Re : P] = [M:N]$. Следовательно, множество всех возможных значения индекса комплексных и вещественных подфакторов конечного фактора является следующее множество: $\{4\cos^2 \pi/q, \quad q \ge 3\} \cup [4,\infty]$, т.е.

$$[(M,\alpha):(N,\alpha)]=[M:N]\in\left\{4\cos^2\frac{\pi}{q},\quad q\geq 3\right\}\cup[4,\infty]$$

Теперь, для каждого $x\in M$, определим отображение $\lambda: M\to M$ как $\lambda(x)y=xy$, для всех $y\in M$. Очевидно, что $\|\lambda(x)y\|_2\leq\|x\|\|y\|_2$. Таким образом, λ имеет единственное продолжение на $L^2(M)$, являющиеся ограниченным линейным оператором, обозначаемый снова через $\lambda(x)$. Тогда мы получим точное W^*-представление $(\lambda, L^2(M))$ алгебры M. Аналогично, определяя отображение λ_r как $\lambda_r(x)y=xy$ (для всех $x,y\in(M,\alpha)$), мы получим точное вещественное W^*-представление $(\lambda_r, L^2(M,\alpha))$ алгебры (M,α). Напомним [4], что $\lambda(M)$ есть комплексификация алгебры $\lambda_r(M,\alpha)$, т.е. $\lambda(M)=\lambda_r(M,\alpha)+i\lambda_r(M,\alpha)$.

4. **Возрастающая последовательность вещественных подфакторов конечного фактора.**

Пусть в дальнейшем всюду N подфактор конечного фактора M с $\alpha(N)\subset N$. Пусть $\overline{P}: L^2(M)\to L^2(N)$ естественный проектор. Отображение

$$Q: L^2(N)=L^2(N,\alpha)+iL^2(N,\alpha)\to L^2(N,\alpha)$$

определим как: $Q(a+ib)=a$, следовательно, отображение, определяемое как

$$P=Q\circ\overline{P}:\ L^2(M,\alpha)\to L^2(N,\alpha)$$

является проекцией.

Пусть $\overline{E}: M\to N$ - α - инвариантное условное ожидание [3]. Из α-инвариантности $\overline{E}$ вытекает, что $\overline{E}$ сужается на (M,α). Сужение $\overline{E}\big|_{(M,\alpha)}:\ (M,\alpha)\to(N,\alpha)$ обозначим как $E=\overline{E}\big|_{(M,\alpha)}$.

Приведем следующие вспомогательные результаты из работ [5].

Предложение 1. Имеет место:

1) $P(x)=E(x),\quad \forall x\in(M,\alpha)$;

2) $P\lambda_r(x)P=\lambda_r(E(x)),\quad \forall x\in(M,\alpha)$;

3) если $x\in(M,\alpha)$, тогда $x\in(N,\alpha)\Leftrightarrow E\lambda_r(x)=\lambda_r(x)P$;

4) $\lambda_r(N,\alpha)'=\{\lambda_r(M,\alpha)',P\}''$;

5) $JP=PJ$ и $JPJ=P$;

где J - стандарная сопряженно-линейная изометрия на $L^2(M)$ (см. [1]).

Здесь, по аналогии с определением алгебры $\langle M,\overline{P}\rangle=\{\lambda(M),\overline{P}\}''$ мы положим: $\langle(M,\alpha),P\rangle=\{\lambda_r(M,\alpha),P\}''$, которая является вещественной W^* - алгеброй в $B(L^2(M,\alpha))$.

Предложение 2. Имеет место следующие утверждения:

1. $\langle(M,\alpha),P\rangle$ является вещественным фактором и

$$\langle(M,\alpha),P\rangle=J\lambda_r(N,\alpha)'J;$$

2. $\left\{\sum_i\lambda_r(x_i)P\lambda_r(y_i),\quad x_i,y_i\in(M,\alpha)\right\}$ слабо плотно * подалгебра алгебры;

$$\langle(M,\alpha),P\rangle$$

3. Отображение $x\to\lambda_r(x)P$ является * изоморфизмом между (N,α) и

$$P\left\langle (M,\alpha),P\right\rangle P;$$

4. Вещественный фактор $\left\langle (M,\alpha),P\right\rangle$ конечен тогда и только тогда, когда $\lambda_r(N,\alpha)'$ конечен, и это эквивалентен условию $\left[(M,\alpha):(N,\alpha)\right]<\infty$;

5. Если вещественный факторы (N,α) и (M,α) имеют тип II_1 и $\left[(M,\alpha):(N,\alpha)\right]<\infty$, тогда вещественный фактор $\left\langle (M,\alpha),P\right\rangle$ также имеет тип II_1;

Предложение 3. Если $\beta=\left[(M,\alpha):(N,\alpha)\right]<\infty$, тогда

$$tr\left(\lambda_r(x)\right)=\tau(x) \text{ и } \beta tr\left(\lambda_r(x)P\right)=\tau(x),$$

для любого $x\in(M,\alpha)$, где $tr(\cdot)$- единственный точный нормальный след на $\left\langle (M,\alpha),P\right\rangle$. В частности,

$$tr(P)=\left[(M,\alpha):(N,\alpha)\right]^{-1} \text{ и } \left[\left\langle (M,\alpha),P\right\rangle:(M,\alpha)\right]=\left[(M,\alpha):(N,\alpha)\right].$$

В доказательстве предложение 3 построено следующая последовательность вещественных подфакторов [см.5]: при $\left[(M,\alpha):(N,\alpha)\right]<\infty$, по предложению 3 мы имеем две новые конечные вещественные факторы: $\lambda_r(M,\alpha)$ и $\left\langle (M,\alpha)P\right\rangle=\left\{\lambda_r(M,\alpha),P\right\}''$ на вещественном гильбертовом пространстве $L^2(M,\alpha)$. Введем следующие обозначение:

$$(M,\alpha)_0^{(0)}=(N,\alpha),\ (M,\alpha)_0^{(1)}=(N,\alpha),$$

$$(M,\alpha)_1^{(1)}=(M,\alpha),(M,\alpha)_1^{(2)}=\lambda_r\left((M,\alpha)_1^{(1)}\right),P_1=P\ (M,\alpha)_2^{(2)}=\left\langle (M,\alpha),P\right\rangle=$$

$$\left\langle (M,\alpha)_1^{(2)},P_1\right\rangle=\left\{(M,\alpha)_1^{(2)},P_1\right\}''.$$

Поскольку $\left[(M,\alpha)_2^{(2)}:(M,\alpha)_1^{(2)}\right]=\left[(M,\alpha)_1^{(1)}:(M,\alpha)_0^{(1)}\right]=\left[(M,\alpha):(N,\alpha)\right]<\infty$, то применяя предложение 3, мы имеем следующее:

$$\begin{array}{l}
(M,\alpha)_0^{(0)}\\
\quad\downarrow\lambda_r\\
(M,\alpha)_0^{(1)}\subset(M,\alpha)_1^{(1)}\\
\qquad\qquad\downarrow\lambda_r\\
\qquad\qquad(M,\alpha)_1^{(2)}\subset(M,\alpha)_2^{(2)}=\left\langle (M,\alpha)_1^{(2)},P_1\right\rangle\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow\lambda_r\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\downarrow\lambda_r\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad(M,\alpha)_k^{(k+1)}\subset(M,\alpha)_{k+1}^{(k+1)}=\left\langle (M,\alpha)_k^{(k+1)},P_k\right\rangle\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow\lambda_r\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Таким образом, существует следующая индуктивная система конечных вещественных факторов:

$$(M,\alpha)_0^{(0)}\xrightarrow{\phi_0}(M,\alpha)_1^{(1)}\xrightarrow{\phi_1}\cdots\xrightarrow{\phi_k}(M,\alpha)_{k+1}^{(k+1)}=\left\langle (M,\alpha)_k^{(k+1)},P_k\right\rangle\xrightarrow{\phi_{k+1}}\cdots,$$

где $(M,\alpha)_{k+1}^{(k+1)}$ - вещественный конечный фактор на $L^2\left((M,\alpha)_k^{(k)}\right)$,
$P_k : L^2\left((M,\alpha)_k^{(k)}\right) \to L^2\left((M,\alpha)_{k-1}^{(k)}\right)$ - естественный проектор и ϕ_k - $*$-изоморфизм из $(M,\alpha)_k^{(k)}$ на $(M,\alpha)_k^{(k+1)}$, $\forall k \geq 1.$

Введем следующие обозначения

$$\times_k (M,\alpha)_k = \left\{(x_k)_{k\geq 0} : x \in (M,\alpha)_k^{(k)})\right\},$$

$$A = \left\{(x_k) \subset \times_k (M,\alpha)_k : x_{s+1} = \phi_s(x_s) \text{ ,для всех } s \geq k_0 \text{, для некоторого } k_0\right\},$$

$$I = \left\{(x_k) \in A : x_s = 0, \text{ для } s \geq k_0\right\}.$$

Не трудно показать, что множество $\times_k (M,\alpha)_k$ относительно естественных операций является вещественной *-алгеброй, $\grave{A}$ является её *-подалгеброй. При этом I является двухсторонним *-идеалом $\grave{A}$, и индуктивный лимит последовательности $\left\{(M,\alpha)_k^{(k)}, \phi_k\right\}$ будет фактор алгебра A/I, т.е. $\varinjlim\left\{(M,\alpha)_k^{(k)}, \phi_k\right\} = A/I$.

Теперь положим:

$(M,\alpha)_k = \left\{\tilde{x} \in A/I : \text{ существует } (0,0,\ldots,x_k,x_{k+1},\ldots) \in \tilde{x}, \text{ где } x_{s+1} = \phi_s(x_s), \quad s \geq k\right\}.$
Тогда мы имеем следующую коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 \in (M,\alpha)_0^{(0)} & \xrightarrow{\phi_0} & (M,\alpha)_1^{(1)} & \xrightarrow{\phi_1} & (M,\alpha)_2^{(2)} & \xrightarrow{\phi_2} & \cdots & \xrightarrow{\phi_{k-1}} & (M,\alpha)_k^{(k)} & \xrightarrow{\phi_k} & \cdots \\
\downarrow \psi_0 & & \downarrow \psi_1 & & \downarrow \psi_2 & & & & \downarrow \psi_k & & \\
1 \in (M,\alpha)_0 & \subset & (M,\alpha)_1 & \subset & (M,\alpha)_2 & \subset & \ldots & \subset & (M,\alpha)_k & \subset & \ldots,
\end{array}$$

где, ψ_k *-изоморфизм из $(M,\alpha)_k^{(k)}$ на $(M,\alpha)_k$ определённый как $\psi_k(x_k) = x$, для всех $x_k \in (M,\alpha)_k^{(k)}$. Положим $e_k = \psi_{k+1}(P_k), \forall k \geq 1.$ Так как

$$(M,\alpha)_{k+1}^{(k+1)} = \left\langle \phi_k\left((M,\alpha)_k^{(k)}\right), P_k \right\rangle,$$

то

$$(M,\alpha)_{k+1} = \left\langle (M,\alpha)_k, e_k \right\rangle,$$

следовательно, $(M,\alpha)_{k+1}$ есть вещественный конечный фактор, такой что

$$\left[(M,\alpha)_{k+1} : (M,\alpha)_k\right] = \left[(M,\alpha) : (N,\alpha)\right] = [M,N], \qquad \forall k \geq 0.$$

При этом возрастающую последовательность

$1 \in (M,\alpha)_0 \subset (M,\alpha)_1 \subset (M,\alpha)_2 \subset \ldots \subset (M,\alpha)_{k+1} = \left\langle (M,\alpha)_k, e_k \right\rangle \subset$ ....- вещественных подфакторов будем называть *башней Джонса для вещественных подфакторов.*

Одним из основных результатов работы является следующая теорема.

Теорема 1. Пусть M - конечный фактор, α - инволютивный *-антиавтоморфизм на алгебре M и пусть $N \subset M$ подфактор с $\alpha(N) \subset N$. Если $[M:N] < \infty$, то справедлива следующие утверждения:

1. Пара $(M,\alpha)_0 \subset (M,\alpha)_1$ *-изоморфна (соответственно) к паре $(N,\alpha) \subset (M,\alpha)$;
2. $(M,\alpha)_k$ - конечный вещественный фактор и $\left[(M,\alpha)_{k+1} : (M,\alpha)_k\right] = \left[(M,\alpha) : (N,\alpha)\right] = [M,N], \quad \forall k \geq 0;$

3. Пусть τ_k - единственный точный нормальный след на $(M,\alpha)_k$. Тогда для любого $x\in(M,\alpha)_k$ и $k\geq 1$, $\tau_{k+1}\big|_{(M,\alpha)_k}=\tau_k$ и $\beta\tau_{k+1}(xe_k)=\tau_k(x)$. В частности, $\tau(e_k)=\beta^{-1}$ и $\tau\big|_{(M,\alpha)_k}=\tau_k$, $\forall k\geq 1$;

4. $(M,\alpha)_{k+1}$ порождается алгеброй $(M,\alpha)_k$ и проекторами $\{e_1,...,e_k\}$, $\forall k\geq 1$;

5. $e_k e_{k+1} e_k=\beta^{-1}e_k$, $e_{k+1}e_k e_{k+1}=\beta^{-1}e_{k+1}$ и $e_k e_j=e_j e_k$, для $|k-j|\geq 2$.

Доказательство: Доказательств утверждений 1) – 4) следуют из выше приведенных предложений.

Докажем утверждение 5): Пусть $(k-j)\geq 2$ и $j\geq 1$. Заметим, что

$$e_j\in(M,\alpha)_{k-1},\quad e_k\in(M,\alpha)_{k+1}.$$

Ясно, что равенство $e_k e_j=e_j e_k$ влечет, что элементы $\phi_k\circ\phi_{k-1}\circ\Psi_{k-1}^{-1}(e_j)$ и $\Psi_{k+1}^{-1}(e_k)$ коммутируют. Положим

$$\overline{(N,\alpha)}=\phi_{k-1}\left((M,\alpha)_{k-1}^{(k-1)}\right),\quad \overline{(M,\alpha)}=\left((M,\alpha)_k^{k}\right),\quad \overline{P}=P_k \text{ и } \overline{(M,\alpha)}_1=\left((M,\alpha)_{k+1}^{(k+1)}\right).$$

Тогда $\overline{P}:L^2\overline{(M,\alpha)}\to L^2\overline{(N,\alpha)}$ – проектор и $\overline{(M,\alpha)}_1=\left\langle\lambda\overline{(M,\alpha)},\overline{P}\right\rangle=\left\{\lambda\overline{(M,\alpha)},\overline{P}\right\}''$.

Так как $\phi_k\circ\phi_{k-1}\circ\Psi_{k-1}^{-1}(e_j)=\phi_k\circ\phi_{k-1}(P_j)\in\lambda\left(\overline{N,\alpha}\right)$, и $\Psi_{k+1}^{-1}(e_k)=\overline{P}$, то из предложение 1(iii) следует, что $\phi_k\circ\phi_{k-1}(P_j)$ и $\overline{P}$ коммутируют. Следовательно, мы получим $e_k e_j=e_j e_k$.

Пусть $\forall k\geq 1$, и пусть

$$\overline{(N,\alpha)}=\left((M,\alpha)_{k-1}^{(k)}\right),\quad \overline{(M,\alpha)}=\left((M,\alpha)_k^{(k)}\right),\quad \phi=\phi_k(=\lambda);$$

$$\overline{(M,\alpha)}_1=\left((M,\alpha)_{k+1}^{(k+1)}\right),\quad \Psi=\phi_{k+1}(=\lambda);\text{ и }\overline{(M,\alpha)}_2=\left((M,\alpha)_{k+2}^{(k+2)}\right).$$

Тогда мы имеем

$$\left(\overline{(N,\alpha)}\subset\right)\overline{(M,\alpha)}\xrightarrow{\Phi=\lambda}\left\langle\phi\overline{(M,\alpha)},P_1\right\rangle=$$
$$=\overline{(M,\alpha)}_1\xrightarrow{\Psi=\lambda}\left\langle\Psi\overline{(M,\alpha)}_1,P_2\right\rangle=\overline{(M,\alpha)}_2,$$

где $\overline{P}_1:L^2\overline{(M,\alpha)}\to L^2\overline{(N,\alpha)}$ – проектор, $\overline{(M,\alpha)}_1$ конечный вещественный фактор на $L^2\overline{(M,\alpha)}$, порожденный алгеброй $\phi\overline{(M,\alpha)}=\lambda\overline{(M,\alpha)}$ и проектором P_1; $P_2:L^2\left(\overline{(M,\alpha)}_1\right)\to L^2\left(\phi\overline{(M,\alpha)}\right)$– проектор и $\overline{(M,\alpha)}_2$ – конечный вещественный фактор на $L^2\overline{(M,\alpha)}_1$ порожденный алгеброй $\Psi\overline{(M,\alpha)}_1=\lambda\overline{(M,\alpha)}_1$ и проектором P_2.

Пусть E и F – условные ожидания: $E:\overline{(M,\alpha)}\to\overline{(N,\alpha)}$ и $F:\overline{(M,\alpha)}_1\to\phi\overline{(M,\alpha)}$, т.е.,

$$E=\left(P_1\Big|\overline{(M,\alpha)}\right),\quad F=\left(P_2\Big|\overline{(M,\alpha)}_1\right).$$

Тогда равенства

$$e_k e_{k+1}e_k=\beta^{-1}e_k,\text{ и } e_{k+1}e_k e_{k+1}=\beta^{-1}e_{k+1}$$

эквивалентно к равенствам

$$P_2\Psi(P_1)P_2=\beta^{-1}P_2,\text{ и }\Psi(P_1)P_2\Psi(P_1)=\beta^{-1}\Psi(P_1).$$

Сначала докажем, что $F(P_1)=\beta^{-1}1$. Действительно, так как $F(P_1)=P_2(P_1)$, то

$$F\left(P_2\right)=\beta^{-1}1 \Leftrightarrow \left(P_1-\beta^{-1}1\right)\perp L^2\left(\Phi\overline{\left(M,\alpha\right)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left\langle\left(P_1-\beta^{-1}1\right),\lambda\left(x^*\right)\right\rangle=0,\quad \forall x\in\overline{\left(M,\alpha\right)}$$

Если tr – канонический след на $\overline{\left(M,\alpha\right)}_1$, тогда равенство $F\left(P_1\right)=\beta^{-1}1$ эквивалентно

$$\beta tr\left(\lambda_r\left(x\right)P_1\right)=tr\left(\lambda_r\left(x\right)\right)=\tau\left(x\right),\qquad \forall x\in\overline{\left(M,\alpha\right)}_1$$

где τ – канонический след на $\overline{\left(M,\alpha\right)}$. Отсюда по предложению 3 имеем $F\left(P_1\right)=\beta^{-1}1$.

Теперь, для любой $x\in\overline{\left(M,\alpha\right)}_1\left(\subset L^2\overline{\left(M,\alpha\right)}_1\right)$, мы имеем

$$P_2\Psi\left(P_1\right)P_2x=F\left(P_1\cdot F\left(x\right)\right)=F\left(P_1\right)F\left(x\right)=$$
$$=\beta^{-1}F\left(x\right)=\beta^{-1}P_2x.$$

Отсюда, $P_2\Psi\left(P_1\right)P_2=\beta^{-1}P_2$.

Из предложение 2 множество $\left\{\sum_i\phi\left(x_i\right)P_1\phi\left(y_i\right)\middle|x_i,y_i\in\overline{\left(M,\alpha\right)}\right\}$ плотно в $L^2\overline{\left(M,\alpha\right)}_1$.

Теперь достаточно показать, что

$$\Psi\left(P_1\right)P_2\Psi\left(P_1\right)\left(\phi\left(x\right)P_1\phi\left(y\right)\right)=\beta^{-1}\Psi\left(P_1\right)\left(\phi\left(x\right)P_1\phi\left(y\right)\right)\quad \forall x,y\in\overline{\left(M,\alpha\right)}.$$

Пусть $x,y\in\overline{\left(M,\alpha\right)}$. Так как

$$P_1\phi\left(x\right)P_1\phi\left(y\right)z=E\left(xE\left(yz\right)\right)=$$
$$=E\left(x\right)E\left(yz\right)=\phi\left(E\left(x\right)\right)P_1\phi\left(y\right)z,\qquad \forall z\in\overline{\left(M,\alpha\right)}\left(\subset L^2\overline{\left(M,\alpha\right)}\right)$$

то

$$P_1\phi\left(x\right)P_1\phi\left(y\right)=\phi\left(E\left(x\right)\right)P_1\phi\left(y\right).$$

Тогда мы имеем

$$\Psi\left(P_1\right)P_2\Psi\left(P_1\right)\left(\phi\left(x\right)P_1\phi\left(y\right)\right)=$$
$$=P_1F\left(P_1\phi\left(x\right)P_1\phi\left(y\right)\right)=P_1F\left(\phi\left(E\left(x\right)\right)P_1\phi\left(y\right)\right)=$$
$$=P_1\phi\left(E\left(x\right)\right)F\left(P_1\right)\phi\left(y\right)=\beta^{-1}P_1\phi\left(E\left(x\right)\right)\phi\left(y\right).$$

Кроме того

$$P_1\phi\left(E\left(x\right)\right)z=E\left(E\left(x\right)z\right)=E\left(x\right)E\left(z\right)=$$
$$=E\left(xE\left(z\right)\right)=P_1\phi\left(x\right)P_1z,\quad \forall z\in\overline{\left(M,\alpha\right)}\left(\subset L^2\overline{\left(M,\alpha\right)}\right)$$

следовательно,

$$\Psi\left(P_1\right)P_2\Psi\left(P_1\right)\left(\phi\left(x\right)P_1\phi\left(y\right)\right)=$$
$$=\beta^{-1}P_1\phi\left(x\right)P_1\phi\left(y\right)=\beta^{-1}\Psi\left(P_1\right)\left(\phi\left(x\right)P_1\phi\left(y\right)\right),\ \forall x,y\in\overline{\left(M,\alpha\right)}.$$

Отсюда мы получим, что $\Psi\left(P_1\right)P_2\Psi\left(P_1\right)=\beta^{-1}\Psi\left(P_1\right)$. Теорема доказана.

Теперь, для того чтобы получить основной результат работы сформулируем ключевой результат из работы [4].

Теорема 2. Пусть $\left\{\varepsilon_j\right\}_{j\geq1}$ бесконечная последовательность ненулевых проекторов на гильбертовом пространстве H таких что,

$$\beta\varepsilon_i\varepsilon_j\varepsilon_i=\varepsilon_i\text{, если }\left|i-j\right|=1$$

и

$$\varepsilon_i \varepsilon_j = \varepsilon_j \varepsilon_i \text{, если } |i-j| \geq 2 \text{, где } \beta \geq 1.$$

Тогда, либо $\beta = 4\cos^2 \dfrac{\pi}{q}$, для некоторого целого $q \geq 3$, либо $\beta \geq 4$.

Отсюда получим следующий основной результат работы.

Теорема 3. Пусть M - конечный фактор, α - инволютивный *-антиавтоморфизм на алгебре *M*. Если N - подфактор M с $\alpha(N) \subset N$ и $\left[(M,\alpha):(N,\alpha)\right] < \infty$, тогда

либо $\left[(M,\alpha):(N,\alpha)\right] = 4\cos^2 \dfrac{\pi}{q}$ (для некоторого целого $q \geq 3$),

либо $\left[(M,\alpha):(N,\alpha)\right] \geq 4$.

Доказательство теоремы 3 следует из теорем 1 и 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Albeverio S., Ayupov Sh. A., Rakhimov A. A., Dadakhodjaev R. A. On Jones' Index for Real W-algebras. Eurasian Math. J., 1:4 (2010). P. 5-19.*

2. Рахимов А.А., Болтаев Х.Х., Примеры индексов вещественных W-подалгебр комплексного фактора типа I_n. узб.мат.журнал. 2011. - № 4. – С. 168-170.*

3. Usmanov Sh.M. Operator-value weights on real W-algebras and reversible JW-algebras. Sbornik Mathematics, 1999, 190:10, 1505-1522.*

4. Li Bing-Ren. Introduction to operator algebras, World Sci. Pub. Co. Pte. Ltd. 1992. – 738 p.

УДК: 517.984

3×3 ОПЕРАТОРЛИ МАТРИЦАЛАР ОИЛАСИГА МОС РЕГУЛЯРЛАШТИРИЛГАН ФРЕДГОЛЬМ ДЕТЕРМИНАНТИ

РЕГУЛЯРИЗОВАННЫЙ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ФРЕДГОЛЬМА СООТВЕТСТВУЮЩИЙ СЕМЕЙСТВЕ 3×3-ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ

REGULARIZED FREDHOLM DETERMINANT CORRESPONDING TO A FAMILY OF 3×3 OPERATOR MATRICES

Тошева Наргиза Ахмедовна
преп. БухГУ

Аннотация. *Мақолада d ўлчамли Z^d панжарада кўпи билан учта заррачалар система Гамильтонианига мос келувчи $H(K)$, $K \in (-\pi;\pi]^d$ -3×3 операторли матрицалар оиласи қаралади. Ноллари тўплами $H(K)$ операторнинг дискрет спектри билан устма-уст тушувчи регулярлаштирилган Фредгольм детерминанти қурилган.*

Таянч сўзлар: *Фредгольм детерминанти ва минори, операторли матрица, йўқотиш ва пайдо қилиш операторлари, алгебраик тўлдирувчи, Фаддеев тенгламаси, Фредгольм теоремаси.*

Аннотация. *В работе рассматривается семейство 3×3 операторных матриц $H(K)$, $K \in (-\pi;\pi]^d$, ассоцированный гамильтонианом системы с не более чем тремя частицами на d-мерной решетке Z^d Построен регуляризованный определитель Фредгольма, множество нулей которого является дискретным спектром оператора $H(K)$.*

Ключевые слова: *определитель и минор Фредгольма, операторная матрица, операторы уничтожения и рождения, алгебраическое дополнение, уравнения Фаддеева, теорема Фредгольма.*