Scientific Journal of Samarkand University

Volume 2019 Article 5

1-26-2020

On a two-speed mathematical model of two-fluid medium with one pressure

X. X. Imomnazarov
Institute of Computational Mathematics of Mathematical Geophysics SB RAS, imom@omzg.sscc.ru

S. B. Kuyliyev
Samarkand State University

УДК:51

ОБ ОДНОЙ ДВУХСКОРОСТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВУХЖИДКОСТНЫХ СРЕД С ОДНИМ ДАВЛЕНИЕМ

Х.Х. Имомназаров[1], С.Б. Куйлиев[2]
[1]Институт вычислительной математики математической геофизики СО РАН
[2]Самаркандский государственный университет
imom@omzg.sscc.ru

Аннотация. Получена переопределенная стационарная система дифференциальных уравнений второго порядка. Для двухмерной системы установлена вариационная постановка задачи. Показано, что вариационная задача для системы уравнений двухскоростной гидродинамики корректна в соответствующем пространстве Соболева.

Ключевые слова. двухжидкостная среда, двухскоростная гидродинамика, вариационная постановка задач, корректность задач, пространства Соболева.

Ikkisuyuqliklimuhitningumumiybosimliikkitezliklimatematikmodelihaqida

Annotatsiya. Ikkinchitartiblidifferentsialtenglamalarningstatsionaro'taaniqlangansistemasiolingan. Ikkio'lchamli Sistema uchunmasalaningvariatsionqo'yilishikeltirilgan. Ikkitezlikligidrodinamikatenglamalarsistemasiuchunvariatsion masala mosSobolevfazosidakorrektqo'yilganligiko'rsatilgan.

Kalitso'zlar: ikkisuyuqliklimuhit, ikkitezlikligidrodinamika, variatsion masala, korrekt masala, Sobolevfazolari.

On a two-speed mathematical model of two-fluid medium with one pressure

Abstract. An overdetermined stationary system of second-order differential equations is obtained. For the two-dimensional system, a variational statement of the problem is established. It is shown that the variational problem for the system of equations of two-speed hydrodynamics is well-posed in the corresponding Sobolev space.

Keywords. two-fluid medium, two-speed hydrodynamics, variational formulation of problems, wellposedness of problems, Sobolev spaces.

Рассматриваемая в работе равновесная по давлению двухскоростная модель сжимаемой двухфазной среды предполагает наличия равновесия фаз по давлению и температуре. Описываемые в рамках модели двухфазные среды имеют следующую структуру: частицы каждой из фаз движутся друг относительно друга, взаимодействуя между собой как непосредственно, так и посредством соседней фазы. Частицы каждой из фаз совместно составляют двухфазной континуум, единичный объем которого характеризуется двумя плотностями, двумя скоростями, энтропией. Получаемые в результате применения метода законов сохранения [Халатников, 1971; Доровский, 1989; Блохин, Доровский, 1994; Доровский, Перепечко, 1996] уравнения переноса дополняются диссипативными слагаемыми, определяющими необратимые процессы в среде, в том числе, возникающие в связи с учетом межфазного взаимодействия. Для замыкания системы управляющих уравнений модель дополняется уравнениями состояния.

В двухскоростной гидродинамике ключевым является понятие о двухскоростном континууме, в каждой точке которого одновременно присутствует каждая из фаз со своими парциальными плотностями p_1, p_2 и с локально заданными скоростями u_1, u_2. Произвольные частицы среды, при таком подходе, представляются локально сосуществующими взаимно проникающими подсистемами. Выбор функциональной зависимости внутренней энергии $E_0 = E_0(\rho, \rho_1, S, j_0)$ фиксирует термодинамику среды. Внутренняя энергия единицы объема двухфазной среды определяется первым началом термодинамики:

$$dE_0 = TdS + \mu d\rho + qd\rho_1 + (u_1 - u_2, dj_0), \tag{1}$$

где ρ, ρ_1, ρ_2 – плотность среды и соответствующие парциальные плотности фаз, причем $\rho = \rho_1 + \rho_2$; μ – химический потенциал; q - параметр межфазного взаимодействия; S - энтропия единицы объема, T – температура; u_1 – скорость первой фазы, u_2 – скорость второй фазы, $j_0 = j - \rho u_2$ - относительный импульс, инвариантный относительно преобразования Галилея, $j = \rho_1 u_1 + \rho u_2$ - плотность импульса.

Эволюция плотности двухжидкостной среды и парциальной плотности первой фазы определяются законами сохранения

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\, j = 0,\ \ \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + div(\rho_1 u_1) = 0\ . \qquad (2)$$

Закон сохранения массы для второй фазы является следствием системы уравнений (2).

Также должны выполняться законы сохранения импульса, энергии и энтропии (в обратимом приближении):

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_i \Pi_{ik} = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + div\, F = 0,$$

где Π_{ik} — тензор плотности потока импульса, E — полная энергия единицы объема, F — обратимый поток энтропии, Q — обратимый поток энергии, S - энтропия единицы объема. Систему уравнений (2), (3) необходимо дополнить уравнением движения второй фазы:

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + (u_2, \nabla) u_2 = \alpha \nabla \mu + \beta \nabla T, \qquad (4)$$

где вид сил, вызывающих движение фазы, определяется условиями термодинамического равновесия среды: $\nabla \mu = 0$, $\nabla T = 0$, $u_1 = u_2$.

Потоки F , Q , Π_{ik} и давление P определяются однозначно в процессе реализации метода законов сохранения [Халатников, 1971]. Наличие непосредственного взаимодействия частиц фаз приводящее к дополнительному вкладу во внутреннюю энергию $qd\rho_1$, как следствие приводит к дополнительным вкладам $q\rho_1 \delta_{jk}$ к тензору плотности потока импульса и $q\rho_1 \delta_{ij} u_{1j}$ к потоку энергии:

$$F = \frac{S}{\rho}\, j,$$

$$Q = \left[\mu + \frac{u_2^2}{2} - (u_1, u_2) \right] j + \frac{TS}{\rho} j + u_1 (u_1, j - \rho u_2) + q\rho_1 u_{1j}, \qquad (5)$$

$$\Pi_{ik} = \rho_1 u_{1i} u_{1k} + \rho_2 u_{2i} u_{2k} + P\delta_{ik} + q\rho_1 \delta_{jk},$$

$$P = -E_0 + TS + \mu\rho + (u_1 - u_2)(j - \rho u_2)\ .$$

При этом для коэффициентов α, β справедливы соотношения $1 + \alpha = 0$, $\beta = \frac{S}{\rho}$, а тензор напряжений определяется стандартным образом $\sigma_{ik} = -P\delta_{ik} - q\rho_1 \delta_{jk}$.

Учет диссипативных процессов приводит к появлению дополнительных необратимых потоков в уравнениях баланса полного импульса и энергии:

$$\frac{\partial j_i}{\partial t} + \partial_k \left(\Pi_{ik} + \pi_{1ik} + \pi_{2ik} \right) = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \partial_i \left(Q_i + W_i \right) = 0 \cdot \qquad (7)$$

где потоки Q , Π_{ik} определяются формулами (5), $W-$ необратимый поток энергии, $\pi_{1ik}, \pi_{2ik} -$ необратимые потоки импульса.

В уравнение движения второй фазы следует ввести силу межфазного взаимодействия f^{∂} :

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + (u_2, \nabla) u_2 = -\nabla \mu - \frac{S}{\rho} \nabla T + f^{\partial}, \qquad (8)$$

а в уравнении на энтропию добавляется диссипативный поток f_q и диссипативная функция R

$$\frac{\partial S}{\partial t} + div \left(\frac{S}{\rho} j + f_q \right) = \frac{R}{T}\ . \qquad (9)$$

Процедура согласования уравнений (6)-(9) с первым началом термодинамики (1) приводит к определению потока энергии и, согласно теории Онсагера, к виду диссипативной функции. Перейдем к величинам $e=\dfrac{E}{\rho}$, $s=\dfrac{S}{\rho}$ полной энергии и энтропии, отнесенным к единице массы. Уравнения двухскоростной динамики сжимаемых двухфазных сред с термодинамикой среды, задаваемой зависимостью $e=e(\rho_1,\rho_2,u_1,u_2,s)$, в поле силы тяжести могут быть представлены в виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho_1}{\partial t}+div(\rho_1 u_1)=0,\quad \frac{\partial\rho_2}{\partial t}+div(\rho_2 u_2)=0,\\
&\frac{\partial u_1}{\partial t}+(u_1,\nabla)u_1=-\frac{1}{\rho}\nabla P-\frac{\rho_2}{\rho}\nabla q-\frac{\rho_2}{\rho}f^{\partial}+f_1+g,\\
&\frac{\partial u_2}{\partial t}+(u_2,\nabla)u_2=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\frac{\rho_2}{\rho}\nabla q+f^{\partial}+f_2+g.
\end{aligned}\tag{10}$$

Энтропия переносится со средней скоростью двухфазного потока $\dfrac{j}{\rho}$:

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{1}{\rho}\left(j,\nabla\right)s=-\frac{1}{\rho}div\,f_q+\frac{R}{\rho T}\tag{11}$$

где диссипативная функция R определяется соотношением:

$$R=f^{\partial}(u_1-u_2)^2+f_q\nabla T+\pi_{1ik}u_{1ik}+\pi_{2ik}u_{2ik}.$$

Пренебрегая эффектами, связанными с объемной вязкостью, получаем соотношения для диссипативных потоков $\pi_{1ik}=\eta_1 u_{1ik}$, $\pi_{2ik}=\eta_2 u_{2ik}$ и приходим к следующему виду диссипативной функции:

$$R=\rho_2 b(u_1-u_2)^2+\lambda\frac{1}{T}\left(\nabla T\right)^2+2\nu\left(\nabla T,(u_1-u_2)\right)+\eta_1 u_{1ik}^2+\eta_2 u_{2ik}^2\tag{12}$$

Диссипативные потоки f^{∂}, f_q, f_1, f_2 определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}
&f^{\partial}=b(u_1-u_2)+\frac{1}{\rho_2}\nu\nabla T,\\
&f_q=\lambda\frac{1}{T}\nabla T+\nu(u_1-u_2).
\end{aligned}\tag{13}$$

$$f_{1i}=\frac{1}{\rho_1}\partial_k\left(\eta_1 u_{1ik}\right)+\frac{\nu}{\rho_1}\partial_i T,\quad f_{2i}=\frac{1}{\rho_2}\partial_k\left(\eta_2 u_{2ik}\right)-\frac{\nu}{\rho_2}\partial_i T.$$

В уравнениях (10)-(13): ρ_1, ρ_2, u_1, u_2 - парциальные плотности и скорости фаз соответственно; $\rho=\rho_1+\rho_2$, $j=\rho_1 u_1+\rho_2 u_2$ - плотность и импульс двухфазной среды; $u_{1ik}=\dfrac{1}{2}\left(\partial_k u_{1i}+\partial_i u_{1k}-\dfrac{2}{3}\delta_{ik}\mathrm{div}\mathbf{u}_1\right)$, $u_{2ik}=\dfrac{1}{2}\left(\partial_k u_{2i}+\partial_i u_{2k}-\dfrac{2}{3}\delta_{ik}\mathrm{div}\mathbf{u}_2\right)$ — тензоры скоростей деформации; $g-$ ускорение свободного падения; $P-$ давление, $q-$ параметр межфазного взаимодействия, вводящий второе давление в двухфазной среде.

Кинетические коэффициенты межфазного трения b, сдвиговой вязкости фаз η_r, теплопроводности двухфазной среды λ и коэффициент ν являются функциями термодинамических параметров. Эффекты объемной вязкости не учитываются.

Уравнения состояния двухфазной среды, замыкающие динамические уравнения (10)-(13), считаются заданными (см. [5]).

Линейная стационарная система уравнений двухскоростной гидродинамики.

В отсутствие массовых сил $g=0$ система уравнений (10) в обратимом гидродинамическом приближении имеет решение $u_1=0$, $u_2=0$, $\rho_1=\rho_1^0$, $\rho_2=\rho_2^0$ для покоящейся смеси жидкостей с равномерным давлением $P=P^0$ и параметром межфазного взаимодействия $q=q^0$, парциальными плотностями ρ_1^0, ρ_2^0 и температурой T.

Линеаризуем уравнения (10) относительно гидродинамического фона $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $\rho_1 = \rho_1^0$, $\rho_2 = \rho_2^0$ и рассмотрим случай, когда отсутствует межфазное взаимодействие между подсистемами:

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ \rho_1 = \rho_1^0 + \rho_1^1,\ \rho_2 = \rho_2^0 + \rho_2^1,\ P = P^0 + P^1.$$

Подставив эти выражения в (10) и для сокращения записи, далее вместо обозначений u_1^1, u_2^1, ρ_1^1, ρ_2^1 будем использовать u_1, u_2, ρ_1, ρ_2. Тогда в стационарном случае получим

$$\begin{gathered} div\ u_1 = 0, \qquad div\ u_2 = 0, \\ \nu_1 \Delta u_1 = \nabla P - \rho^0 f, \\ \nu_2 \Delta u_2 = \nabla P - \rho^0 f. \end{gathered} \tag{14}$$

Здесь сдвиговые вязкости фаз ν_1, ν_2 являются положительными постоянными. Полученная система является переопределенной системой уравнений в частных производных. Изучению краевых задач для таких переопределенных систем уравнений в частных производных посвящена работа [6-10].

Постановка двумерной задачи

Пусть Ω - ограниченная область R^2 с Липшицевой непрерывной границей Γ, и пусть Ω' - дополнение к $\overline{\Omega}$. Рассмотрим стационарную систему двухжидкостной среды с равновесием фаз по давлению (14) в Ω' со следующими граничными условиями:

$$u_1 = q_1, \quad u_2 = q_2 \quad \text{на} \quad \Gamma \tag{15}$$

с условием бесконечности на u_i $i = 1, 2,$ которые обращаются в ноль и удовлетворяют соотношениям [11]

$$\int_{\Omega'} \left\| \nabla u \right\|^2 dx < \infty, \qquad \int_{\Omega'} \frac{1}{\omega^2} \left\| u \right\|^2 dx < \infty$$

для соответствующей весовой функции ω, которая зависит от размерности, которые обращаются в ноль на бесконечности. Массовая сила $f = (f_1, f_2)$ задана в двойственном пространстве скоростей, а граничное значение q_i $i = 1, 2,$ принадлежит пространству $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)^2$. $\nabla -$ оператор градиента по $x = (x_1, x_2)$.

Вариационная постановка

В данном пункте будем выполнять преобразования, связанные с системой (14), (15), предполагая, что все функции обладают необходимой гладкостью. Заметим, что правые части дивергентных уравнений в (14) должны удовлетворять определенным условиям согласования. Действительно, применяя формулу векторного анализа $div\ rot\, v = 0$ получим, что

$$div\ \Delta v = div\, grad\,(div\ v) = \Delta(div\ v) \tag{16}$$

Далее, действуя на два последних векторных уравнений в (14) оператором дивергенции, получим уравнения

$$\Delta p = \rho\, div\, f,$$

Граничные функции q_i в (15.3) должны удовлетворять следующим соотношениям:

$$\int_{\Gamma} q_i \cdot n ds = 0, \qquad i = 1, 2, \tag{17}$$

где $n -$ единичный вектор внешней нормали к границе Γ.

Следуя [11-14], введем следующие пространства Соболева

$$W_0^1(\Omega') = \left\{ u \in \mathscr{D}'(\Omega') : (\lg r)^{-1} u \in L^2(\Omega'), \nabla u \in L^2(\Omega') \right\},$$

$$W_0^2(\Omega') = \left\{ u \in \mathscr{D}'(\Omega') : \rho(r)^{-2} (\lg r)^{-1} u \in L^2(\Omega'), \right.$$
$$\left. \rho(r)^{-1} (\lg r)^{-1} \nabla u \in L^2(\Omega'), D^2 u \in L^2(\Omega') \right\}$$

$$W_1^1(\Omega') = \left\{ u \in \mathscr{D}'(\Omega') : u \in L^2(\Omega'), \rho(r) \nabla u \in L^2(\Omega') \right\},$$

$$W_{-1}^{1}(\Omega') = \left\{ u \in \mathscr{D}'(\Omega') : \rho(r)^{-2} u \in L^2(\Omega'), \rho(r)^{-1} \nabla u \in L^2(\Omega') \right\}.$$

Все эти пространства снабжены своими естественными нормами и полунормами. $\rho(r) = (1+r^2)^{\frac{1}{2}}$ и $\lg r = \ln(1+r^2)$, $r = r(x)$ - расстояние до начала координат.

Как известно [11], что $W_1^1(\Omega')$ не содержит многочленов, и что $W_0^1(\Omega')$ и $W_{-1}^1(\Omega')$ содержат P_0, и что $W_0^2(\Omega')$ содержит P_1.

Теперь перейдем к неоднородной внешней задаче Стокса для системы уравнений двухскоростной гидродинамики. Так как $\mathbf{f} \in \left(W_0^{-1}(\Omega')\right)^2$, $\mathbf{q}_i \in \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^2$ и $\nu_i > 0$, i=1,2, можно найти $\mathbf{u}_i \in \left(W_0^1(\Omega')\right)^2$ и $p \in L^2(\Omega')$ такие, что

$$\nu_1 \Delta u_1 - grad\ p = -\rho f, \quad div\ u_1 = 0 \ \text{ в } \ \Omega' \tag{18}$$

$$\nu_2 \Delta u_2 - grad\ p = -\rho f, \quad div\ u_2 = 0 \ \text{ в } \ \Omega' \tag{19}$$

$$u_1 = q_1,\ u_2 = q_2 \qquad \text{на} \qquad \Gamma \tag{20}$$

Как и в ограниченном случае, задача (18)-(20) имеет эквивалентную вариационную формулировку:

Найти $u_i \in \left(W_0^1(\Omega')\right)^2$ и $p \in L^2(\Omega')$ так, что

$$\nu_1 \left(\nabla u_1, \nabla v_1\right) - (p,\ div\ v_1) = \rho \left\langle f, v_1 \right\rangle \qquad \forall v_1 \in \left(\overset{0}{W}{}^1_0(\Omega')\right)^2, \tag{21}$$

$$div\ u_1 = 0 \ \text{ в } \ \Omega', \tag{22}$$

$$u_1\big|_\Gamma = q_1, \quad \text{на} \quad \Gamma \tag{23}$$

$$\nu_2 \left(\nabla u_2, \nabla v_2\right) - (p,\ div\ v_2) = \rho \left\langle f,\ v_2 \right\rangle \qquad \forall v_2 \in \left(\overset{0}{W}{}^1_0(\Omega')\right)^2, \tag{24}$$

$$div\ u_2 = 0 \ \text{ в } \ \Omega', \tag{25}$$

$$u_2\big|_\Gamma = q_2, \quad \text{на} \quad \Gamma \tag{26}$$

Ввиду условия inf-sup [14, 15]

$$\inf_{p \in L^2(\Omega')} \sup_{\mathbf{w} \in \left(\overset{0}{W}{}^1_0(\Omega')\right)^2} \frac{\int_{\Omega'} p \operatorname{div} \mathbf{w} dx}{\|p\|_{0,\Omega'} \|\mathbf{w}\|_{1,0,\Omega'}} \geq \frac{1}{K},$$

где K - положительная постоянная.

Следовательно, задача (21)-(26) эквивалентна следующей задаче:

Найти $u_i \in \left(W_0^1(\Omega')\right)^2$ так, что

$$\nu_1 \left(\nabla u_1, \nabla v_1\right) = \rho \left\langle f, v_1 \right\rangle \qquad \forall v_1 \in V, \tag{27}$$

$$div\ u_1 = 0 \ \text{ в } \ \Omega', \tag{28}$$

$$u_1\big|_\Gamma = q_1, \quad \text{на} \quad \Gamma \tag{29}$$

$$\nu_2 \left(\nabla u_2, \nabla v_2\right) = \rho \left\langle f, v_2 \right\rangle \qquad \forall v_2 \in V, \tag{30}$$

$$div\ u_2 = 0 \ \text{ в } \ \Omega', \tag{31}$$

$$u_2\big|_\Gamma = q_2, \quad \text{на} \quad \Gamma \tag{32}$$

В формулах (27) и (30) обозначено гильбертово пространство:

$$V = \left\{ v \in \left(\overset{0}{W}{}^1_0(\Omega')\right)^2 : \ div\ v = 0 \quad \text{в} \quad \Omega' \right\}.$$

В данной работе доказана следующая

Теорема. Предположим, что $\Omega \subset R^2$ имеет непрерывную липшицеву границу Γ, которая необязательно связана, но не имеет внутренней связанной компоненты. Тогда для массовой силы f заданной в пространстве $\left(W_0^{-1}(\Omega')\right)^2$ и функции q_i $i=1,2,$ заданных в пространстве $\left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)^2$ задача (1)-(3) имеет единственное решение $(\mathbf{u}_i, p) \in \left(W_0^1(\Omega')\right)^2 \times L^2(\Omega')$, которое непрерывно зависит от данных, т.е.

$$\left\|\mathbf{u}_i\right\|_{1,0,\Omega'} + \left\|p\right\|_{0,\Omega'} \le C\left[\left\|\mathbf{f}\right\|_{-1,0,\Omega'} + \left\|\mathbf{q}_i\right\|_{\frac{1}{2},\Gamma}\right].$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 18-51-41002).

References

1. Xalatnikov I. M. Teoriya sverxtekuchesti. – Moskva: Nauka, 1971.
2. Dorovskiy V.N. Kontinualnaya teoriya filtratsii / V.N. Dorovskiy // Geologiya i geofizika. – 1989. – №7. – S. 39-45.
3. Bloxin A.M., Dorovskiy V.N. Problemi matematicheskogo modelirovaniya v teorii mnogoskorostnogo kontinuuma. – Novosibirsk, 1994.
4. Dorovskiy V.N., Perepechko Yu.V. Gidrodinamicheskaya model rastvora v treshinovato-poristix sredax // Geologiya i geofizika. – 1996. – T. 37. – №9. – S. 123-134.
5. Frenkel, Ya.I. K teorii seysmicheskix i seysmoelektricheskix yavleniy vo vlajnoy pochve // Izvestiya AN SSSR. Seriya geografiya i geofizika. – 1944. – T. 8. – S. 133-149.
6. Gudovich I.S., Kreyn S.G. O nekotorix krayevix zadachax, ellipticheskix v podprostranstve // Mat. sb. 1971. T. 84(126), № 4. S. 595–606.
7. Jurayev D.A., Jian-Gan Tan, Imomnazarov X.X., Urev M.V. Krayevaya zadacha dlya odnoy pereopredelennoy sistemi, voznikayushey v dvuxjidkostnoy srede // UzbMJ, 2016, No.3, s. 58-69.
8. Urev M.V., Imomnazarov X.X., Jian-Gan Tan Krayevaya zadacha dlya odnoy pereopredelennoy statsionarnoy sistemi, voznikayushey v dvuxskorostnoy gidrodinamike // SibJVM, 2017, t. 20, No. 4, s. 425-437.
9. Urev M.V., Imomnazarov Sh.X. Klassicheskoye resheniye odnoy pereopredelennoy statsionarnoy sistemi, voznikayushey v dvuxskorostnoy gidrodinamike // SEMI, 2018, №. 15, S. 1621-1629.
10. Imomnazarov X.X., Imomnazarov Sh.X., Mamatkulov M.M., Chernix Ye.G. Fundamentalnoye resheniye dlya statsionarnogo uravneniya dvuxskorostnoy gidrodinamiki s odnim davleniyem // Sib. jurn. industr. matem., 2014, t. 17, № 4, s. 60-66.
11. Girault V., Sequeira A. A Well-Posed Problem for the Exterior Stokes Equations in Two and Three Dimensions // Arch. RationalMech. Anal., 1991, v. 114, pp. 313-333.
12. Demidenko G.V., Uspenskiy S.V. Uravneniya i sistemi, ne razreshennie otnositelno starshey proizvodnoy. Novosibirsk: Nauchnayakniga,1998.
13. Girault V. and Raviart P.-A. Finite element methods for Navier-Stokes equations. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
14. Babushka I. The finite element method with Lagrangian multipliers // Numer. Math., 1973, v. 20, pp. 179-192.
15. Brezzi F. On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from Lagrange multipliers // R.A.I.R.O., Anal. Numer. R2, 1974, pp. 129-151.