Scientific journal of the Fergana State University

Volume 1 *Scientific journal of the Fergana State University № 6/2018* Article 4

1-10-2019

Problem with integral condition for integro differential equation with constant coefficient of Bessel’s function included imaginary argument

M. ABDUMANNOPOV
Ferghana State University, Ferghana, Murabbiylar 19, fdujournal@fdu.uz

МАТЕМАТИКА

УДК: 517.927

МАВҲУМ АРГУМЕНТЛИ БЕССЕЛЬ ФУНКЦИЯСИ ҚАТНАШГАН ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ИНТЕГРО- ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН ИНТЕГРАЛ ШАРТЛИ МАСАЛА

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПРИ УЧАСТИИ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ С МНИМЫМ АРГУМЕНТОМ

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION FOR INTEGRO DIFFERENTIAL EQUATION WITH CONSTANT COEFFICIENT OF BESSEL'S FUNCTION INCLUDED IMAGINARY ARGUMENT

М.Абдуманнопов

Аннотация

Мақолада мавҳум аргументли Бессель функцияси қатнашган ўзгармас коэффициентли интегро-дифференциал тенглама учун интеграл шартли масала ўрганилган.

Аннотация

В данной статье изучена задача с интегральным условием для интегро-дифференциального уравнения с постоянным коэффициентом, содержащей функцию Бесселя с мнимым аргументом.

Annotation

In the article a problem with integral condition for integro differential equation with constant coefficient of Bessel's function which includes imaginary argument is studied.

Таянч сўз ва иборалар: *оддий дифференциал тенглама, интеграл оператор, чегаравий масала, интеграл шартли масала, интеграл тенглама.*

Ключевые слова и выражения: *обыкновенное дифференциальное уравнение, интегральный оператор, краевая задача, задача с интегральным условием, интегральное уравнение.*

Keywords and expressions: *ordinary differential equation, integral operator, boundary-value problem, problem with integral condition, integral equation.*

Ушбу интегро - дифференциал тенгламани қарайлик:

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) + \gamma \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)]dt = f(x), \qquad x \in (0,1), \tag{1}$$

бу ерда $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$ -берилган хақиқий сонлар, $I_0(x)$ - мавҳум аргументли Бессель функцияси [1], $f(x)$ -берилган функция.

Масала. (1) тенгламанинг $[0,1]$ сегментда аниқланган, узлуксиз ва

$$y(0) = k_1, \qquad \int_0^1 y(x)dx = k_2 \tag{2}$$

шартларни қаноатлантирувчи ечими топилсин, бу ерда $k_1, k_2 \in R$.

Қўйилган масаланинг бир қийматли ечилишини текширамиз.

1-лемма. *Агар $y(x)$ функция $[0,1]$ сегментда узлуксиз бўлиб,*

$$\int_0^1 y(x)dx = 0 \tag{3}$$

тенгликни қаноатлантирса, $[0,1]$ сегментда шундай ξ сон топиладики, $y(\xi) = 0$ тенглик ўринли бўлади.

Бу леммани исботлаш қийинчилик туғдирмайди.

2-лемма. *Агар* $\beta \le 0,\ \gamma \le 0,\ 0 \le |\lambda| \le (1/4)[\sqrt{\alpha^2 - 8\beta} - \alpha]$ *бўлса,*

М.Абдуманнопов – ФарДУ магистранти.

$$y''(x)+\alpha\, y'(x)+\beta\, y(x)+\gamma\int_0^x y(t)\, I_0[\lambda(x-t)]\, dt=0,\ \ x\in(0,x_0)\,; \tag{4}$$

$$y(0)=0, \qquad y(x_0)=0 \tag{5}$$

масала фақат тривиал ечимга эга бўлади.

Исбот. (4) тенгликни $e^{-2|\lambda|x}y(x)$ функцияга кўпайтирамиз ва x бўйича $[0,x_0]$ сегментда интеграллаймиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликдаги $y''(x)$ ва $y'(x)$ ҳосилалар иштирок этган интегралларни бўлаклаб ва (5) шартларни ҳисобга олиб, қуйидаги тенгликка эга бўламиз:

$$\int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x}\left[y'(x)\right]^2 dx-\int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x}\left[2\lambda^2+\alpha\,|\,\lambda\,|+\beta\right]y^2(x)dx-$$

$$-\gamma\int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x}y(x)dx\int_0^x y(t)I_0[\lambda(x-t)]dt=0\ . \tag{6}$$

(6) тенгликдаги учинчи интегрални l билан белгилайлик:

$$l=\int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x}y(x)\,dx\int_0^x y(t)I_0\left[\lambda(x-t)\right]dt\cdot$$

Бу ерда $I_0\left[\lambda(x-t)\right]$ функцияни

$$I_0\left[\lambda(x-t)\right]=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(1-\xi^2\right)^{-1/2} ch\left[\lambda(x-t)\xi\right]d\xi$$

формула бўйича алмаштирамиз [1]:

$$l=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(1-\xi^2\right)^{-1/2} d\xi\int_0^{x_0} e^{-2|\lambda|x}y(x)\,dx\int_0^x y(t)ch\left[\lambda(x-t)\xi\right]dt\cdot$$

Бу тенгликни $2chx=e^x+e^{-x}$ формуладан фойдаланиб,

$$l=\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\left(1-\xi^2\right)^{-1/2} d\xi\sum_{m=1}^{2}\int_0^{x_0} e^{-2x\mu_m(\xi)}\frac{d}{dx}\Phi_m^2(x,\xi)\,dx \tag{7}$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда

$$\mu_m(\xi)=|\,\lambda\,|\left(1+(-1)^m\xi\right), \qquad \Phi_m(x,\xi)=\int_0^x y(t)e^{(-1)^m|\lambda|\xi t}dt.$$

Бўлаклаб интеграллаш формуласини қўлланиб ва $\mu_m(\xi)\ge 0$ тенгсизликни эътиборга олиб, (7) тенгликдан қуйидагига эга бўламиз:

$$l=\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\left(1-\xi^2\right)^{-1/2} d\xi\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{2}\left\{e^{-2x_0\mu_m(\xi)}\Phi_m^2(x_0,\xi)+2\mu_m(\xi)\int_0^{x_0} e^{-2x\mu_m(\xi)}\Phi_m^2(x,\xi)\,dx\right\}\ge 0.$$

У ҳолда $\gamma\le 0$ эканлигини эътиборга олсак, (6) тенгликдаги охирги ҳаднинг манфий эмаслиги келиб чиқади. $\beta\le 0$ ва $0\le|\,\lambda\,|\le(1/4)[\sqrt{\alpha^2-8\beta}-\alpha]$ шартларга асосан $2\lambda^2+\alpha|\lambda|+\beta$ квадрат учҳад мусбат эмас. Шунинг учун (6) тенгликдаги иккинчи қўшилувчи ҳам манфий эмас. Буни ва $l\ge 0$ тенгсизликни эътиборга олсак, (6) тенгликдан $y'(x)\equiv 0,$ яъни $y(x)=const,\ x\in[0,x_0]$ деган хулоса келиб чиқади. У ҳолда (5) шартларга асосан $y(x)\equiv 0,\ x\in\left[0,x_0\right]$. 2-лемма исботланди.

https://uzjournals.edu.uz/fdu/vol1/iss6/4
DOI: 517.927

1-теорема. *Агар 2-лемманинг шартлари бажарилса, қўйилган масала биттадан ортиқ ечимга эга бўлмайди.*

Исбот. Қўйилган масала $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ ечимларга эга бўлсин, деб тескаридан фараз қилайлик. У ҳолда $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ функция

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) + \gamma \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)]dt = 0, \quad x \in (0,1) \tag{8}$$

$$y(0) = 0, \quad \int_0^1 y(x)dx = 0 \tag{9}$$

тенгликларни қаноатлантиради.

(9) тенгликларнинг иккинчиси ва 1-леммага асосан шундай $x_0 \in (0,1)$ мавжудки, $y(x_0) = 0$ тенглик ўринли бўлади. Буни эътиборга олиб, {(8),(9)} масалани қарасак, 2-леммага асосан $y(x) \equiv 0,\ x \in [0, x_0]$ тенгликка эга бўламиз.

$y(x) \equiv 0,\ x \in [0, x_0]$ тенгликни эътиборга олсак {(8),(9)} масаладан

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) + \gamma \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)]dt = 0, \quad x \in (x_0,1); \tag{10}$$

$$y(0) = 0, \quad \int_{x_0}^1 y(x)dx = 0 \tag{11}$$

тенгликларнинг ўринли эканлиги келиб чиқади.

{(10),(11)} тенгликларга юқоридаги усул билан 1- ва 2- леммаларни қўллансак, шундай $x_1 \in (x_0,1)$ мавжудки, $y(x_1) \equiv 0,\ x \in [x_0, x_1]$ тенглик ўринли эканлигини топамиз.

Буни эътиборга олсак, (10) ва (11) тенгликлардан

$$y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) + \gamma \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)]dt = 0, \quad x \in (x_1,1);$$

$$y(x_1) = 0, \quad \int_{x_1}^1 y(x)dx = 0$$

тенгликларнинг ўринли эканлигини топамиз.

Бу тенгликларга ҳам 1- ва 2-леммани қўлланамиз ва юқоридаги мулоҳазаларни такрорлаймиз. Бу жараённи кетма-кет давом эттирсак, натижада $[0,1]$ сегмент ичига жойлашган шундай $[0,x_0],[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_n,x_{n+1}]...$ оралиқлар системасига эга бўламизки, бу оралиқларда $y(x) \equiv 0$ бўлиб, $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ тенглик ҳам ўринли бўлади. Буларни ва $y(x) \in C[0,1]$ эканлигини эътиборга олсак, $y(x) \equiv 0,$ деган хулосага эга бўламиз. Демак, $y(x) \equiv 0,\ x \in [0,1]$. Унда $y_1(x) \equiv y_2(x),\ x \in [0,1]$. 1-теорема исботланди.

2-теорема. *Агар 2-лемма шартлари ва $f(x) \in C[0,1]$ шарт бажарилса, қўйилган масаланинг ечими мавжуд бўлади.*

Исбот. (1) тенгламани

$$y''(x) = f_1(x),\ x \in (0,1) \tag{12}$$

кўринишда ёзиб олайлик, бу ерда

$$f_1(x) = f(x) - \alpha y'(x) - \beta y(x) - \gamma \int_0^x y(t) I_0[\lambda(x-t)]dt.$$

Агар $f_1(x)$ функцияни ва $y(1)$ сонни маълум деб ҳисобласак, (12) тенгламанинг $y(x)$ ечими учун

$$y(x) = y(0)(1-x) + y(1)x + \int_0^1 G(x,t) f_1(t)dt,\ x \in [0,1] \qquad (13)$$

тенглик ўринли бўлади [2], бу ерда

$$G(x,t) = \begin{cases} x(t-1), & x \le t; \\ (x-1)t, & x \ge t. \end{cases}$$

(13) тенгликда $y(0)$ ўрнига k_1 ни ва $f_1(x)$ функция ўрнига эса унинг ифодасини қўямиз. Сўнгра ҳосил бўлган тенгликда $y'(t)$ иштирок этган интегрални бўлаклаймиз ва γ иштирок этган ҳадда интеграллаш тартибини ўзгартирамиз. Натижада

$$y(x) = k_1(1-x) + y(1)x + \int_0^1 f(t)G(x,t)dt + \int_0^1 M(x,t)y(t)dt,\ x \in [0,1] \qquad (14)$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M(x,t) = \alpha[G(x,t)]'_t - G(x,t)\left[\beta + \gamma \int_t^1 I_0[\lambda(\xi - t)]dt\right].$$

(14) тенгликни x бўйича $[0,1]$ оралиқда интеграллаб, (2) шартларнинг иккинчисини эътиборга олсак, $y(1)$ номаълум сон қуйидагича топилади:

$$y(1) = 2k_2 - k_1 - 2\int_0^1 dx \int_0^1 f(t)G(x,t)dt - 2\int_0^1 y(t)\left[\int_0^1 M(x,t)dx\right]dt.$$

$y(1)$ нинг бу ифодасини (14) тенгликка қўйиб, баъзи шакл алмаштиришларни бажарсак,

$$y(x) - \int_0^1 M_1(x,t)y(t)dt = F_1(x),\ x \in [0,1] \qquad (15)$$

кўринишдаги тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$M_1(x,t) = M(x,t) - 2x\int_0^1 M(z,t)dz.$$

$$F_1(x) = k_1(1-2x) + 2k_2x + \int_0^1 f(t)\left\{G(x,t) - 2x\int_0^1 G(x,t)dz\right\}dt.$$

(15)- $y(x)$ номаълум функцияга нисбатан иккинчи тур Фредгольм интеграл тенгламаси бўлиб [3], қўйилган масалага эквивалентдир. Шунинг учун бу интеграл тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги қўйилган масала ечимининг ягоналигидан, яъни 1-теоремадан келиб чиқади [3].

(15) интеграл тенгламанинг ечими $M_1(x,t)$ ядро резольвентаси $R_1(x,t)$ ёрдамида

$$y(x) = F_1(x) + \int_0^1 R_1(x,t)F_1(t)dt,\ x \in [0,1]$$

кўринишда ёзилади. Бу тенгликдан фойдаланиб кўрсатиш мумкинки, $y(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$. 2-теорема исботланди.

References:

1. O'rinov A.Q. Maxsus funktsiyalar va maxsus operatorlar. -Farg'ona, 2012.
2. O'rinov A.Q. Oddiy differentsial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar. –T.: MUMTOZ SO'Z, 2014.
3. Salohiddinov M.S. Integral tenglamalar. –T.: Yangiyul polygraph service, 2007.

(Тақризчи: А.Ўринов – физика математика фанлари доктори, профессор).

https://uzjournals.edu.uz/fdu/vol1/iss6/4
DOI: 517.927