

6-30-2018

THE BESSEL FUNCTION IN THE NUCLEUS IS COMPACT AND ITS PROPERTIES

L I. Raximova

Follow this and additional works at: <https://uzjournals.edu.uz/ferpi>

Recommended Citation

Raximova, L I. (2018) "THE BESSEL FUNCTION IN THE NUCLEUS IS COMPACT AND ITS PROPERTIES," *Scientific-technical journal*: Vol. 22 : Iss. 2 , Article 34.

Available at: <https://uzjournals.edu.uz/ferpi/vol22/iss2/34>

This Article is brought to you for free and open access by 2030 Uzbekistan Research Online. It has been accepted for inclusion in Scientific-technical journal by an authorized editor of 2030 Uzbekistan Research Online. For more information, please contact brownman91@mail.ru.

28. THE BESSEL FUNCTION IN THE NUCLEUS IS COMPACT AND ITS PROPERTIES

L.I. Raximova¹¹ Ferghana State University, Ferghana, Uzbekistan

ФУНКЦИЯ БЕССЕЛЯ В ЯДРЕ И ЕЕ СВОЙСТВА

ЯДРОСИДА БЕССЕЛ ФУНКЦИЯСИ ҚАТНАШГАН ЎРАМСИЗ ОПЕРАТОРЛАР ВА
УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ

Abstract. The composition properties of two non-convolutional integral operators with a Bessel function in the kernel are investigated.

Key words: Bessel-Klifford function, packing operators, operators of fractional order.

Аннотация. В работе исследованы композиционные свойства двух не свёрточных интегральных операторов с функцией Бесселя в ядре.

Ключевые слова: функция Бесселя-Клиффорда, не свёрточные операторы, оператор дробного порядка.

Аннотация. Ушбу ишда ядросида Бессел функцияси қатнашган иккита ўрамсиз интеграл операторлар ва уларнинг композицион хоссалари ўрганилган.

Таянч сўзлар: Бессел-Клиффорд функцияси, ўрамсиз операторлар, каср тартибли операторлар.

Ядросида Бессел функцияси қатнашган куйидаги иккита ўрамсиз интеграл операторларни қараймиз [1]:

$$\bar{J}_{\alpha,\lambda}^+ f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{t(x-t)}) f(t) dt, \quad (1)$$

$$\bar{I}_{\alpha,\lambda}^- f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} \bar{I}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{x(x-t)}) f(t) dt, \quad (2)$$

бу ерда $\alpha \in R, \alpha > 0, \bar{J}_\nu(z)$ – Бессел-Клиффорд функцияси бўлиб, у $J_\nu(z)$ – Бессел функцияси орқали ушбу

$$\bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu} J_\nu(z)$$

тенглик билан ифодаланилади. $\bar{I}_\nu(z) = \bar{J}_\nu(iz)$ мавхум аргументли Бессел-Клиффорд функцияси, $\Gamma(\alpha)$ - Эйлернинг гамма функцияси.

Бундан ташқари куйидаги операторларни ҳам қараш мумкин:

$$\bar{I}_{\alpha,\lambda}^+ = \bar{J}_{\alpha,i\lambda}^+ \quad \bar{J}_{\alpha,\lambda}^- = \bar{I}_{\alpha,i\lambda}^- \quad (3)$$

бу ерда i – мавхум бирлик, $i^2 = -1$.

Бессел-Клиффорд функциясининг $J_\nu(0) = 1$ хоссасидан фойдаланиб, $\lambda = 0$ бўлганда куйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\bar{J}_{\alpha,0}^+ = \bar{I}_{\alpha,0}^+ = \bar{J}_{\alpha,0}^- = \bar{I}_{\alpha,0}^- = \bar{I}_{0,+}^\alpha,$$

бу ерда $\bar{I}_{0,+}^\alpha$ каср тартибли Риман-Лиувилл операторлари [1]:

$$\bar{I}_{0,+}^\alpha f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \alpha > 0 \quad (4)$$

Энди (4) операторлар билан (1) ва (2) операторларни композициясини ўрганамиз. Бунда куйидаги теорема ўринли бўлади.

1-теорема. Айтайлик $\alpha > 0, f(x) \in L_p(0,b), b < \infty, p \geq 1$ бўлсин. Агар $\beta > 0$ бўлса, у холда, куйидаги тенгликлар ўринли бўлади:

$$I_{0,+}^\beta \bar{J}_{\alpha,\lambda}^+ f(x) = \bar{J}_{\alpha+\beta,\lambda}^+ f(x), \quad (5) \quad \bar{I}_{\alpha,\lambda}^- I_{0,+}^\beta f(x) = \bar{I}_{\alpha+\beta,\lambda}^- f(x). \quad (6)$$

Исбот. Олдин (5) тенгликни исботлайлик. (1) ва (4) ларни эътиборга олсак, куйидаги

$$I_{0,+}^\beta \bar{J}_{\alpha,\lambda}^+ f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^x (x-t)^{\beta-1} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \times \bar{J}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{s(t-s)}) f(s) ds \right\} dt$$

тенглик ўринли.

Такрорий интегралларда Дирихле формуласини қўллаб, интеграллаш тартибини ўзгартирсак, охири тенгликдан

$$I_{0+}^{\beta} \bar{J}_{\alpha, \lambda}^{+} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(s) ds \int_s^x (x-t)^{\beta-1} (t-s)^{\alpha-1} \times \\ \times \bar{J}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{s(t-s)}) dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^x f(s) q(x,s) ds, \quad (7)$$

тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$q(x,s) = \int_0^x f(s) ds \int_s^x (x-t)^{\beta-1} (t-s)^{\alpha-1} \bar{J}_{\alpha-1}(\lambda\sqrt{s(t-s)}) dt,$$

Охири интегрални ҳисоблашда Бессел-Клиффорд функциясининг қатор кўринишидан, яъни:

$$\bar{J}_{\nu}(z) = \bar{I}_{\nu}(iz) = \Gamma(\nu+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} J_{\nu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{(\nu+1)_k k!}.$$

У ҳолда,

$$q(x,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-\lambda^2 s/4]^k}{(\alpha)_k k!} \int_s^x (x-t)^{\beta-1} (t-s)^{\alpha+k-1} dt$$

формулалардан фойдаланамиз.

Охири интегралда $t = x - (x-s)\theta$ алмаштириб бажариб, бир қанча ҳисоблашни амалга оширганимиздан сўнг қуйидагига эга бўламиз:

$$q(x,s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-\lambda^2 s/4]^k}{(\alpha)_k k!} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)} (x-s)^{\alpha+\beta+k-1} = \\ = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-s)^{\alpha+\beta-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[-\lambda^2 s/4]^k}{(\alpha+\beta)_k k!} [s(x-s)]^k = \\ = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (x-s)^{\alpha+\beta-1} \bar{J}_{\alpha+\beta-1}(\lambda\sqrt{s(x-s)})$$

$q(x,s)$ нинг топилган ифодасини (7) тенгликка қўйиб, (5) тенгликнинг тўғри эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. (6) тенглик ҳам худди шундай исботланади. 1-теорема исбот бўлди.

Энди (1) ва (2) операторларни М.С.Салохитдинов ва А.Қ.Ўриновлар томонидан киритилган [2], ушбу

$$A_{ax}^{n,\lambda} f(x) = f(x) - \int_a^x f(t) \left(\frac{t-a}{x-a}\right)^n \frac{\partial}{\partial t} J_0(\lambda\sqrt{(x-a)(x-t)}) dt, \quad (8)$$

$$B_{ax}^{n,\lambda} f(x) = f(x) + \int_a^x f(t) \left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{1-n} \frac{\partial}{\partial t} J_0(\lambda\sqrt{(t-a)(t-x)}) dt, \quad (9)$$

операторлар ва (4) оператор композицияси кўринишида ифодалаш мумкинлигини кўрсатамиз, бу ерда $J_0(t)$ – Бессел функцияси, $n = 0, 1$.

Қуйидаги теорема ўринли.

2-теорема . Айтайлик $\alpha > 0, f(x) \in L_p(0, b), b < \infty, p \geq 1$ бўлсин. У ҳолда, қуйидаги формула ўринли бўлади:

$$\bar{J}_{\alpha, \lambda}^{+} f(x) = I_{0+}^{\alpha} B_{0x}^{1, \lambda} f(x). \quad (10)$$

Ушбу теорема юқоридаги 1-теореманинг исботи каби Бессел функциясининг қаторга ёйилмасидан фойдаланиб исботланади. (1) ва (2) кўринишдаги ўрамсиз операторларни ихтиёр $\alpha > 0$ учун ўрганишда (8) ва (9) операторлар муҳим ахамиятга эга эканлигини кўрсатмоқда.

(10) кўринишдаги тенгликларни қолган (1) ва (2) кўринишдаги операторлар учун ҳам исботлаш мумкин.

References:

- [1] S.G. Samko, A.A.Kilbas, O.I.Marichev. Integrali i proizvodine drobnogo poryadka i ix nekotorie prilozheniya. - Minsk: Nauka i texnika.-Minsk: Nauki i texnika, 1987.-702s.
- [2] M.S. Saloxitdinov, A.Q.O'rinov. Kraevie zadachi dlya uravneniy smeshannogo tipa so spektralnim parametrom. -Tashkent: FAN, 1997.- 168 s

Адабиётлар

- [1] С.Г. Самко, А.А.Килбас, О.И.Маричев. Интегралы и производные дробного порядка и их некоторые приложения. -Минск: Наука и техника.-Минск: Науки и техника, 1987.-702с.
- [2] М.С. Салохитдинов, А.Қ.Ўринов. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. -Ташкент: ФАН, 1997.- 168 с.