ИЛМИЙ АХБОРОТ

УДК: 51+517.43

ЯДРОСИДА БЕССЕЛЬ ФУНКЦИЯСИ ҚАТНАШГАН ЎРАМСИЗ ОПЕРАТОРЛАР ВА УЛАРНИНГ ХОССАЛАРИ
НЕ СВЁРТОЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С УЧАСТИЕМ ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ В ЯДРЕ И ИХ СВОЙСТВА
BOUNDED OPERATORS WITH BESSEL FUNCTION IN THEIR NUCLEUS AND THEIR PROPERTIES

Л.Рахимова

Аннотация

Ушбу мақолада ядросида Бессель функцияси қатнашган иккита ўрамсиз интеграл операторлар ва уларнинг композицион хоссалари ўрганилган.

Аннотация

В статье исследованы композиционные свойства двух не свёрточных интегральных операторов с участием функции Бесселя в ядре.

Annotation

In the paper two packing integral operators which are including Bessel functions in the kernel and their compositional features are investigated.

***Таянч сўз ва иборалар**: Бессель-Клиффорд функцияси, ўрамсиз операторлар, каср тартибли операторлар.*

***Ключевые слова и выражения**: функция Бесселя-Клиффорда, не свёрточные операторы, оператор дробного порядка.*

***Keywords and expressions:** Bessel-Clifford function, packing operators, operators of fractional order.*

Ядросида Бессель функцияси қатнашган қуйидаги иккита ўрамсиз интеграл операторларни қараймиз [1.702]:

$$\bar{J}^{+}_{\alpha,\lambda}f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{t(x-t)}\right)f(t)dt\,, \tag{1}$$

$$\bar{I}^{-}_{\alpha,\lambda}f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\bar{I}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x(x-t)}\right)f(t)dt\,, \tag{2}$$

бу ерда $\alpha \in R, \alpha > 0, \bar{J}_\nu(z) -$ Бессел-Клиффорд функцияси бўлиб, у $J_\nu(z)$ – Бессел функцияси орқали ушбу

$$\bar{J}_\nu(t) = \Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu}J_\nu(t)$$

тенглик билан ифодаланилади. $\bar{I}_\nu(z) = \bar{J}_\nu(iz)$ мавҳум аргументли Бессель-Клиффорд функцияси, $\Gamma(\alpha)$- Эйлернинг гамма функцияси.

Бундан ташқари қуйидаги операторларни ҳам қараш мумкин:

$$\bar{I}^{+}_{\alpha,\lambda} = \bar{J}^{+}_{\alpha,i\lambda}\ \ \bar{J}^{-}_{\alpha,\lambda} = \bar{I}^{-}_{\alpha,i\lambda}, \tag{3}$$

бу ерда i – мавҳум бирлик, $i^2 = 1$.

Бессель-Клиффорд функциясининг $\bar{J}_\nu(0) = 1$ хоссасидан фойдаланиб, $\lambda = 0$ бўлганда қуйидаги тенгликларни ҳосил қиламиз:

$$\bar{J}^{+}_{\alpha,0} = \bar{I}^{+}_{\alpha,0} = \bar{J}^{-}_{\alpha,0} = \bar{I}^{-}_{\alpha,0} = \bar{I}^{\alpha}_{0,+}\,,$$

бу ерда $\bar{I}^{\alpha}_{0,+}$ каср тартибли Риман-Лиувилл операторлари [1]:

$$\bar{I}^{\alpha}_{0,+}f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt,\ \ \alpha > 0 \tag{4}$$

Энди (4) операторлар билан (1) ва (2) операторларнинг композициясини ўрганамиз. Бунда қуйидаги теорема ўринли бўлади.

1-теорема. Айтайлик $\alpha > 0,\ f(x) \in L_p(0,b),\ b < \infty,\ p \geq 1$ бўлсин. Агар $\beta > 0$ бўлса, у ҳолда,қуйидаги тенгликлар ўринли бўлади:

$$I^{\beta}_{0+}\bar{J}^{+}_{\alpha,\lambda}f(x) = \bar{J}^{-}_{\alpha+\beta,\lambda}f(x)\,, \tag{5}$$

$$\bar{I}^{-}_{\alpha,\lambda}I^{\beta}_{0_+}f(x) = \bar{I}^{-}_{\alpha+\beta,\lambda}f(x)\,. \tag{6}$$

Исбот. Олдин (5) тенгликни исботлайлик.(1) ва (4) ларни эътиборга олсак, қуйидаги

$$I^{\beta}_{0_+}\bar{J}^{+}_{\alpha\lambda}f(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x (x-t)^{\beta-1}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\times\times\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{s(t-s)}\right)f(s)ds\right\}dt$$

Л.Рахимова – ФарДУ математик анализ мутахассислиги 2-босқич магистранти.

тенглик ўринли.

Такрорий интегралларда Дирихле формуласини қўллаб, интеграллаш тартибини ўзгартирсак,охирги тенгликдан

$$I_{0+}^{\beta}\bar{J}_{\alpha,\lambda}^{+}f(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(s)ds\int_s^x (x-t)^{\beta-1}(t-s)^{\alpha-1}\times$$
$$\times\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{s(t-s)}\right)dt=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^x f(s)q(x,s)ds, \quad (7)$$

тенгликка эга бўламиз, бу ерда

$$q(x,s)=\int_0^x f(s)ds\int_s^x (x-t)^{\beta-1}(t-s)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{s(t-s)}\right)dt.$$

Охирги интегрални ҳисоблашда Бессел-Клиффорд функциясининг қатор кўринишидан, яъни:

$$\bar{J}_{\nu}(z)=\bar{I}_{\nu}(iz)=\Gamma(\nu+1)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}J_{\nu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z^2/4)^k}{(\nu+1)_k k!}.$$

У ҳолда,

$$q(x,s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[-\lambda^2 s/4]^k}{(\alpha)_k k!}\int_s^x (x-t)^{\beta-1}(t-s)^{\alpha+k-1}\ dt$$

формулалардан фойдаланамиз.

Охирги интегралда $t=x-(x-s)\theta$ алмаштириб бажариб, бир қанча ҳисоблашни амалга оширганимиздан сўнг қуйидагига эга бўламиз:

$$q(x,s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left[-\frac{\lambda^2 s}{4}\right]^k}{(\alpha)_k k!}\frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta+k)}(x-s)^{\alpha+\beta+k-1}=$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-s)^{\alpha+\beta-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{[-\lambda^2 s/4]^k}{(\alpha+\beta)_k k!}[s(x-s)]^k=$$
$$=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-s)^{\alpha+\beta-1}\bar{J}_{\alpha+\beta-1}\left(\lambda\sqrt{s(x-s)}\right)$$

$q(x,s)$ нинг топилган ифодасини (7) тенгликка қўйиб, (5) тенгликнинг тўғри эканлигига ишонч ҳосил қиламиз. (6) тенглик ҳам худди шундай исботланади. 1-теорема исбот бўлди.

Энди (1) ва (2) операторларни М.С.Салохитдинов ва А.Қ.Ўриновлар томонидан киритилган [2.168], ушбу

$$A_{ax}^{n,\lambda}f(x)=f(x)-\int_a^x f(t)\left(\frac{t-a}{x-a}\right)^n\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(\lambda\sqrt{(x-a)(x-t)}\right)dt, \quad (8)$$

$$B_{ax}^{n,\lambda}f(x)=f(x)+\int_a^x f(t)\left(\frac{x-a}{t-a}\right)^{1-n}\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(\lambda\sqrt{(t-a)(t-x)}\right)dt, \quad (9)$$

операторлар ва (4) оператор композицияси кўринишида ифодалаш мумкинлигини кўрсатамиз, бу ерда $J_0(t)$ – Бессель функцияси,$n=0{,}1$.

Қуйидаги теорема ўринли.

2-теорема . Айтайлик $\alpha>0, f(x)\in L_p(0,b), b<\infty, p\geq 1$ бўлсин. У ҳолда, қуйиидаги формула ўринли бўлади:

$$\bar{J}_{\alpha,\lambda}^{+}f(x)=I_{0+}^{\alpha}B_{0x}^{1,\lambda}f(x). \quad (10)$$

Ушбу теорема юқоридаги 1-теореманинг исботи каби Бессель функциясининг қаторга ёйилмасидан фойдаланиб исботланади. (1) ва (2) кўринишдаги ўрамсиз операторларни ихтиёрий $\alpha>0$ учун ўрганишда (8) ва (9) операторлар муҳим аҳамиятга эга эканлигини кўрсатмоқда.

(10) кўринишдаги тенгликларни қолган (1) ва (2) кўринишдаги операторлар учун ҳам исботлаш мумкин.

References:

1. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Integralы i proizvodnыe drobnogo poryadka i ix nekotorыe prilojeniya. – Minsk: Nauki i texnika, 1987.

2. Saloxitdinov M.S., O'rinov A.Q. Kraevыe zadachi dlya uravneniy smeshannogo tipa so spektralьnыm parametrom. – T.: FAN, 1997.

(Тақризчи: А.Ўринов, физика-математика фанлари доктори, профессор).

https://uzjournals.edu.uz/fdu/vol1/iss3/18
DOI: 51+517.43