Scientific reports of Bukhara State University

Volume 2
Issue 1 *BSU 2019 issue 1*

Article 5

3-27-2019

THE STRUCTURAL FEATURES OF INVERSE MATRICES TO BLOCK-TRIDIAGONAL WITH ZERO LEADING BLOCK ANGULAR MINORS

Turdimukhammad Tukhtamatovich Rakhmonov
Dosent at the department of natural science at Military-technical Institute under National Guarding Committee of the republic of Uzbekistan, candidate of physical-mathematical science

PHYSICAL SCIENCES AND MATHEMATICS: MATHEMATICS

УДК: 519.63

БЛОКЛИ - УЧДИАГОНАЛЛИ ЕТАКЧИ БЛОКЛИ - БУРЧАК МИНОРЛАРИ НОЛГА ТЕНГ МАТРИЦАЛАРГА ТЕСКАРИ БЎЛГАН МАТРИЦАЛАР ТУЗИЛИШИНИНГ ЎЗИГА ХОСЛИГИ

СТРУКТУРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ МАТРИЦ, ОБРАТНЫХ К БЛОЧНО - ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫМ С НУЛЕВЫМИ ВЕДУЩИМИ БЛОЧНО-УГЛОВЫМИ МИНОРАМИ

THE STRUCTURAL FEATURES OF INVERSE MATRICES TO BLOCK-TRIDIAGONAL WITH ZERO LEADING BLOCK ANGULAR MINORS

Rakhmonov Turdimukhammad Tukhtamatovich
Dosent at the department of natural science at Military-technical Institute under National Guarding Committee of the republic of Uzbekistan, candidate of physical-mathematical science

Таянч сўзлар: матрица, минор, тасаввур, системалар ечими, блокли - учдиагоналли матрица, чизиқли алгебра, ҳисоблаш математикаси, яхши шартланмаган система.

Ключевые слова: матрица, минор, представления, решения системы, блочно - трехдиагональная матрица, линейная алгебра, вычислительная математика, плохо обусловленная система.

Key words: matrix, minor, representations, system solutions, block-tridiagonal matrix, linear algebra, computational mathematics, ill-posed system.

Аннотация

Мақолада олдин маълум бўлмаган блокли - учдиагоналли матрицаларни етакчи блок - бурчак минорлари нолга тенг (ёки нолга яқин бўлган) ҳолатларидаги тескари матрицасини тузилиши топилди ва унинг хоссалари ўрганилди.

Аннотация

В статье построена неизвестная ранее структура и изучены свойства прямых представлений матриц, обратных к блочно - трехдиагональным с нулевыми (или близко нулевыми) ведущими блочно-угловыми минорами.

Abstract

The article defines the constructon of a previously unknown structure and studies direct representations of inverse matrices to block-tridiagonal with zero (or closely zero) leading block angular minors.

Рассмотрим в пространстве $L_2(\Omega)$ следующий эллиптический оператор

$$L(x,D) = \left(-\Delta + q(x)\right)^2 \qquad (1)$$

с областью определения $D(L) = C_0^\infty(\Omega)$, где Ω, $\Omega \subset R^2$ - произвольная ограниченная область со спрямляемой границей $\Gamma = \partial\Omega$ и

$$q(x) = \frac{a\left(|x - x_0|\right)}{|x - x_0|},\ x_0 \in \Omega.$$

Предположим, что функция $q(x)$ удовлетворяет следующему условию:

$$t^k \left|a^k(t)\right| \le C_\tau t^{1-\tau},\ k = 0,1,2. \qquad (2)$$

Обозначим через A произвольное самосопряженное расширение оператора L с дискретным спектром, $\{u_n(x)\}$- собственные функции, $\{\lambda_n\}$- соответствующие собственные числа. Существование такого самосопряженного расширения оператора L вытекает из теоремы К. Фридрихса. Известно, что семейство собственных функций $\{u_n(x)\}$ образует ортонормированную систему в пространстве $L_2(\Omega)$.

Для каждой функции $f(x) \in L_2(\Omega)$ обозначим через $\sigma_\lambda(x, f)$ частичные суммы ряда Фурье, т.е.

$$\sigma_\lambda(x, f) = \sum_{\lambda_n \le \lambda} f_n u_n(x), \qquad (3)$$

где $f_n = (f, u_n)$- коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Обозначим через $H_p^\alpha(\Omega)$ пространство С.М. Никольского и через $L_\infty(\Omega)$ - класс функций существенно ограниченных в области Ω. Напомним, что функция $f(x)$ принадлежит классу $H_p^\alpha(\Omega)$ при $p \ge 1$ и $0 < \alpha < 1$, если конечна норма

$$\| f \|_{H_p^\alpha(\Omega)} = \| f \|_{L_p(\Omega)} + \sup_u |u|^{-\alpha} \left(\int_{\Omega_u} | f(x+u) - f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Настоящая работа посвящена изучению вопроса о равномерной ограниченности частичных суммы рядов Фурье (3) произвольной ограниченной функции $f(x)$,принадлежащей классу Никольского $H_p^\alpha(\Omega)$, и равномерной сходимости ряда Фурье произвольной функции $f(x)$, принадлежащей классу Никольского $\overset{0}{H}{}_p^\alpha(\Omega)$. Основными резуль-татами данной работы являются нижеследующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть Ω - произвольная двумерная область, ограниченная спрямляемой кривой Γ, а D - произвольная подобласть области Ω. Предположим, что $f(x)$ - произвольная ограниченная функция из класса $H_2^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ и при некотором $p > 4$ принадлежит классу $H_p^{\frac{1}{2}}(D)$. Тогда равномерно на любом компакте $K \subset D$ выполняется оценка*

$$|\sigma_\lambda(x, f)| \le C\left[\|f\|_{H_2^{\frac{1}{2}}(\Omega)} + \|f\|_{H_p^{\frac{1}{2}}(D)} \right]. \qquad (4)$$

Теорема 2. *Пусть Ω- произвольная двумерная область, ограниченная спрямляемой кривой Γ, а D-произвольная подобласть области Ω. Предположим, что $f(x)$- финитная функция из класса $H_2^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ и при некотором $p > 4$ принадлежит классу $H_p^{\frac{1}{2}}(D)$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ по системе $\{u_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно в произвольной внутренней подобласти D' области D.*

Как следствие, из этой теоремы вытекает равномерная сходимость ряда Фурье кусочно-гладких функций.

Определение. Функция $f(x)$ называется кусочно-гладкой в области Ω, если эту область можно разбить спрямляемыми кривыми на конечное число областей $\Omega^{(k)}$, в каждой из которых $f(x)$ имеет равномерно непрерывные первые частные производные.

Теорема 3. *Пусть Ω - произвольная двумерная область, ограниченная спрямляемой кривой. Тогда ряд Фурье любой кусочно-гладкой в области Ω функции $f(x)$ по системе $\{u_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно во всякой строго внутренней подобласти Ω' области Ω, из которой удалены сколь угодно малые окрестности тех контуров, на которых функция $f(x)$ имеет разрывы непрерывности.*

Доказательство теоремы проводится методом, разработанным В.А. Ильиным и Ш.А. Алимовым [1]-[4], на основе формулы среднего значения для собственных функций. Отметим, что в случае эллиптического оператора второго порядка с гладкими коэффициентами теорема 1 была доказана в работе Ш.А. Алимова [2]. Теорема 1 и теорема 2 доказаны при $N \geq 2$ для произвольного эллиптического дифференциального оператора второго порядка с гладкими коэффициентами в [1], [3]. Для эллиптических операторов произвольного порядка с гладкими коэффициентами в [4] получены результаты равномерной сходимости и суммируемости средних Рисса спектральных разложений, функций из класса Никольского $H_p^\alpha(\Omega)$. Отметим, что исследование спектральных разложений кусочно-гладких функций было начато В.А.Ильиным [5]. В случае оператора Лапласа им было доказано, что спектральное разложение любой кусочно-гладкой функции сходится равномерно на любом компактном подмножестве области гладкости данной функции. Впоследствии в [6], [9], [10], [11] спектральные разложения кусочно-гладких функций были изучены для общих эллиптических операторов второго порядка с гладкими коэффициентами на произвольных многообразиях, а в [7], [8] был получен аналог результата В.А. Ильина для средних Рисса спектральных разложений, связанных с эллиптическими операторами произвольного порядка с постоянными коэффициентами. В случае оператора Шредингера с потенциалом, удовлетворяющим условию Штуммеля, аналогичные результаты были получены в [12].

Прежде чем доказывать теоремы, докажем несколько вспомогательных лемм. Зафиксируем произвольные точки $x \in \Omega$, и обозначим через r произвольное положительное число из интервала $0 < r < R$, где $0 < R < dist(x, \Gamma)$, и положим $\mu_n = \sqrt[4]{\lambda_n}$. Тогда для каждой собственной функции $u_n(x)$ имеет место следующая формула среднего значения:

$$\int_0^{2\pi} u_n(x + r\theta)d\theta = 2\pi u_n(x)J_0(r\mu_n) +$$
$$+\frac{\pi}{2}\int_0^r W_0(t\mu_n; r\mu_n)t\left(\int_0^{2\pi} q(x+r\theta)u_n(x+r\theta)d\theta\right)dt +$$
$$+\frac{\pi}{2}\int_0^r W_0(t\mu_n; r\mu_n)t\left(\int_0^{2\pi} \varphi_n(x+r\theta)d\theta\right)dt \quad , \qquad (5)$$

где функция $\varphi_n(x)$ является решением уравнения $\left[-\Delta + q(x) + \mu_n^2\right]\varphi_n(x) = 0$, интеграл берется по единичной окружности радиуса r с центром в точке x, $W_0(a,b) = J_0(a)Y_0(b) - Y_0(a)J_0(b)$, и $J_0(z)$, $Y_0(z)$ - функции Бесселя и Неймана нулевого порядка, соответственно.

Отметим, что формула среднего значения (5) для оператора $L(x,D) = (-\Delta + q(x))^m$ при $m \geq 2$ была получена в [13], там же доказано, что для каждой функции $\varphi_n(x)$ имеют место следующие оценки:

1) $\varphi_n(x)$ измеряются по $\mu_n \geq 1,\ x \in \Omega$;

2) для любого компакта $K \subset \Omega$ найдутся положительные постоянные $C(K) > 0$ и

$\beta = \beta(K),\ 0 < \beta < dist(\partial K, \partial\Omega)$, такие, что $|\varphi_n(x)| \le C(K)e^{-\beta\mu_n}$.

Из работы А.Р. Халмухамедова вытекает следующий результат [13, лемма 1.3].

Лемма 1. Пусть функция $q(x)$ удовлетворяет условию (2). Предположим, что при некотором $l > 0$ выполняется оценка $\sum_{\mu_n \le \mu} 1 = O(\mu^l)$. (6)

Тогда на любом компакте $K \subset \Omega$ справедлива следующая равномерная оценка:

$$\sum_{\mu \le \mu_n \le \mu+1} u_n^2 \le C(K)\mu \cdot \qquad (7)$$

Обозначим через $\|f\|_{L_\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} |f(x)|$ норму в пространстве $L_\infty(\Omega)$ ограниченных функций. Теперь оценим коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по норме пространства Никольского и $L_\infty(\Omega)$.

Пусть $h > 0$ - произвольное число, $\chi_h(x)$ - характеристическая функция области

Ω_{3h} и $P(x,h) = f(x)\chi_h(x)$, $Q_h = f(x)[1 - \chi_h(x)]$, где через Ω_h обозначено множество точек $x \in \Omega$, состоящих от границы Γ дальше чем h.

Введем следующую функцию:

$$E(x,h) = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} P(x + h\theta, h)d\theta,$$

где через $x + h\theta$ обозначен вектор $(x_1 + h\theta, x_2 + h\theta)$. Обозначим через $E_n(h)$, $P_n(h)$ и

$Q_n(h)$ коэффициенты Фурье функции $E(x,h)$, $P(x,h)$ и $Q(x,h)$ по собственным функциям $\{u_n(x)\}$ соответственно.

Используя формулу среднего значения (5) для коэффициентов Фурье $E_n(h)$ функции $E(x,h)$, получим

$$E_n(h) = P_n(h)J_0(h\mu_n) + A_n(h) + B_n(h), \qquad (8)$$

где

$$A_n(h) = 4^{-1}\int_\Omega f(x)\left\{\int_0^h W_0(t\mu_n; h\mu_n)t\left(\int_0^{2\pi} q(x+t\theta)u_n(x+t\theta)d\theta\right)dt\right\}dx, \qquad (9)$$

$$B_n(h) = 4^{-1}\int_\Omega f(x)\left\{\int_0^h W_0(t\mu_n; h\mu_n)t\left(\int_0^{2\pi} \varphi_n(x+t\theta)d\theta\right)dt\right\}dx. \qquad (10)$$

Запишем равенство (8) в виде

$$P_n(h)(J_0(h\mu_n) - 1) = E_n(h) - P_n(h) - A_n(h) - B_n(h). \qquad (11)$$

Лемма 2. Для любого h, $0 < h < 1$ справедливо неравенство

$$\sum_{\mu \le \mu_n \le 2\mu} B_n^2(h) \le h^2 \|f\|^2_{L_2(\Omega)} e^{-2\mu} \mu^l |\Omega|. \qquad (12)$$

Доказательство. Очевидно, что для любого δ , $0 < \delta < 1$ имеем

$\int\limits_0^h W_0^2(t\mu_n;h\mu_n)tdt \le Ch^\delta \int\limits_0^h t^{1-\delta}dt \le Ch^2$, которое легко вытекает из оценки и $J_0(z)=O(1)$, $Y_0(z)=\frac{2}{\pi}J_0(z)\ln\frac{z}{2}+O(1)$ - для цилиндрических функций [14].

Тогда, применяя неравенство Коши-Буняковского, имеем

$$\left(\int\limits_0^h W_0(t\mu_n;h\mu_n)t\int\limits_0^{2\pi}\varphi_n(x+t\theta)d\theta dt\right)^2 \le$$
$$\le \int\limits_0^h W_0^2(t\mu_n;h\mu_n)tdt\int\limits_0^h t\left(\int\limits_0^{2\pi}\varphi_n(x+t\theta)d\theta\right)^2 dt \le$$
$$\le Ch^2 \int\limits_{|y-x|\le h}\varphi_n^2(y)dy.$$

Следовательно, применяя ещё раз неравенство Коши-Буняковского и используя оценки (10), имеем

$$\sum_{\mu\le\mu_n\le 2\mu} B_n^2(h) \le \int\limits_\Omega P^2(x,h)dx\int\limits_\Omega\int\limits_{|y-x|\le h}\left(\sum_{\mu<\mu_n\le 2\mu}\varphi_n^2(y)\right)dydx \le C\|f\|^2_{L_2(\Omega)}h^2e^{-2\mu}\mu^l|\Omega|,$$

где $|\Omega|$ лебеговая мера области Ω . Лемма доказана.

Очевидно, что $f_n = P_n(h)+Q_n(h)$.

Тогда $f_n\left[J_0(h\mu_n)-1\right]=P_n(h)\left[J_0(h\mu_n)-1\right]+Q_n(h)\left[J_0(h\mu_n)-1\right]$.

Из (11) следует, что

$$f_n^2\left[J_0(h\mu_n)-1\right]^2 \le 2Q_n^2(h)\left[J_0(h\mu_n)-1\right]^2+2\left\{\left|E_n(h)-P_n(h)\right|^2+\left|A_n(h)\right|^2+\left|B_n(h)\right|^2\right\}$$

.

Лемма 3. Для любого $h>0$ и любого вектора u, $|u|=h$ справедливы следующие неравенства:

$$\|P(x+u,h)-P(x,h)\|_{L_2(\Omega)} \le \sqrt{h}\left[\|f\|_{H_2^{\frac{1}{2}}(\Omega)}+C\|f\|_{L_\infty(\Omega)}\right], \qquad (13)$$
$$\|Q(x,h)\|_{L_2(\Omega)} \le C\sqrt{h}\|f\|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Лемма 3 доказана в работе [2].

Лемма 4. Пусть функция f удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Тогда справедлива следующая оценка:

$$\sum_{\mu<\mu_n\le 2\mu} f_n^2\mu_n \le C\left[\|f\|_{H_2^{\frac{1}{2}}(\Omega)}+C\|f\|_{L_\infty(\Omega)}\right]. \qquad (14)$$

Доказательство. Сначала отметим, что для функции $J_0(t)$ при $1\le t\le 2$ справедливо неравенство $8|J_0(t)-1|\ge 1$. В [12] были получены для любого h, $0<h<1$ следующие оценки:

$$\sum_{\mu<\mu_n\le 2\mu}\left|E_n(h)-P_n(h)\right|^2 \le h\left[\|f\|_{H_2^{\frac{1}{2}}(\Omega)}+\|f\|_{L_\infty(\Omega)}\right]^2, \qquad (15)$$

$$\sum_{\mu\le\mu_n\le 2\mu} A_n^2(h) \le Ch^2 \|f\|^2_{L_2(\Omega)} S^2(h;q), \qquad (16)$$

где $S^2(h;q) = \sup\limits_{x\in\Omega_h} \int\limits_{|y-x|\le h} |q(y)|^2\, dy.$

Поэтому для любого $\mu > 0,$ обозначив $h = \mu^{-1}$ из оценок (15), (16) и из леммы 3, получим

$$\sum_{\mu<\mu_n\le 2\mu} f_n^2 \mu_n \le C\mu \sum_{\mu<\mu_n\le 2\mu} f_n^2 |J_0(h\mu_n)-1|^2 \le Ch^{-1} \sum_{\mu<\mu_n\le 2\mu} f_n^2 |J_0(h\mu_n)-1|^2 +$$
$$+Ch^{-1}\left\{ \sum_{\mu<\mu_n\le 2\mu} Q_n^2(h)|J_0(h\mu_n)-1|^2 + \sum_{\mu<\mu_n\le 2\mu} |E_n(h)-P_n(h)|^2 \right\} +$$
$$+Ch^{-1}\left\{ \sum_{\mu<\mu_n\le 2\mu} |A_n(h)|^2 + \sum_{\mu<\mu_n\le 2\mu} |B_n(h)|^2 \right\} \le C\left[\|f\|_{H_2^{\frac{1}{2}}(\Omega)} + \|f\|_{L_\infty(\Omega)} \right].$$

Лемма 5. Пусть потенциал $q(x)$ удовлетворяет условию (2) и пусть функция $f(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.Тогда равномерно по x из произвольного компактного множества $K \subset \Omega$ выполняется следующая оценка:

$$|\sigma_\mu(x,f)| \le C(K)\left[\|f\|_{H_2^{\frac{1}{2}}(\Omega)} + C\|f\|_{L_\infty(\Omega)} \right].$$

Доказательство. Воспользуемся результатом, полученным в [3]: если функция f удовлетворяет при $\alpha = 1/2$ условию (14) и при некотором $p > 4$ принадлежит $H_2^{1/2}(D)$, то на каждом компакте $K \subset \Omega$ выполняется оценка (17).

Доказательство теоремы 1. Доказательство теоремы 1 вытекает из леммы 5.

Доказательство теоремы 2. Утверждение теоремы непосредственно вытекает из финитности функции $f(x)$ и неравенства (17).

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 3, заметим, что любая кусочно-гладкая в области Ω со спрямляемой границей функция $f(x)$ принадлежит классу $H_2^{1/2}(\Omega)$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что в каждой области $\Omega^{(k)}$ выполняется неравенство $|\nabla f| \le C$. Кроме того, для любого $h > 0$ множество $E(h) = \Omega_k \setminus \bigcup\limits_k \Omega_h^{(k)}$ удовлетворяет условию $mE(h) \le Ch$, которое вытекает из очевидной оценки $m(\Omega\setminus\Omega_h) \le Ch$.

Тогда для любого вектора u, $|u| = h$,

$$\int\limits_{\Omega_h} |f(x+u) - f(x)|^2\, dx = \sum_k \int\limits_{\Omega_h^{(k)}} |f(x+u) - f(x)|^2\, dx + \int\limits_{E(h)} |f(x+u) - f(x)|^2\, dx \le$$
$$\le \sum_k \|\nabla f\|_M (\Omega^{(k)}) h^2 m\Omega^{(k)} + \|f\|^2_{M(\Omega)} mE(h) \le Ch$$

Из этой оценки и по определению нормы пространства $H_2^{1/2}(\Omega)$ вытекает, что $f(x) \in H_2^{1/2}(\Omega)$. Тогда утверждение теоремы 3 следует из теоремы 2.

REFERENCES

1. Ilin V.A. Cpektralnaya teoriya differentsialnix operatorov. Samosopryajennie differentsialnie operatori. - M.: Nauka, 1991. - 368 s.
2. Alimov Sh.A. O spektralnix razlojeniyax garmonicheskix funktsiy v dvumernoy oblasti. Problemi matematicheskoy fiziki i vichislitelnoy matematike. - M.: Nauka, 1977.
3. Ilin V.A., Alimov Sh.A. Usloviya sxodimosti spektralnix razlojeniy,otvechayushix samosopryajennim rasshireniyam ellipticheskix operatorov //Differentsialnie uravne-niya. - 1974. - T.10. - № 3. - C. 481-506.
4. Alimov Sh.A. O spektralnix razlojeniyax funktsiy iz klassa // Matematicheskiy sbornik. - 1976. - T. 101 (143). - № 1(9). - S. 3-20.
5. Ilin V.A. Teorema o razlojimosti kusochno-gladkoy funktsii v ryad po sobstvennim funktsiyam proizvolnoy dvumernoy oblasti //DAN SSSR. - 1956. - №(109). - S. 442-445.
6. Alimov Sh.A. O spektralnix razlojeniyax kusochno-gladkix funktsiy //Dokladi RAN. - 2001. - № 1(381). - C. 7-9.
7. Alimov Sh.A. On the eigenfunctions expansion of a piecewise smooth function //The Journal of Fourier Analysis and Applications. 2003. - № 1(9). – P. 67-76.
8. Alimov Sh.A. Sets of uniform convergence of Fourier expansion of a piecewise smooth function // The Journal of Fourier Analysis and Applications. 2004. - № 6 (10). – P. 635-644.
9. Brandoli L. and Colzani L. Localization and convergence of eigenfunctions //Journal of Fourier Analysis and Applications. 1999. - No 5 (5). – P. 431-447.
10. Pinsky M. and Taylor M. Pointwise Fourier inversion: a wave equation approach //Journal of Fourier Analysis and Applications. - 1997. - 3. – P. 647-703.
11.Taylor M. Eigenfunction expansions and the Pinsky phenomen on compact manifolds //Journal of Fourier Analysis and Applications. – 2001. - No 5 (7). – P. 507-522.
12. Khalmukhamedov A.R., Kuchkorov E.I., Turgunov K.K. On expansion of functions from the S.M. Nikolslii class in Fourier series by eigenfunctions of the Schro”dinger operator //Uzbek Mathematical Journal. - 2018. - №2. – P. 93-102.
13. Xalmuxamedov A.R. Razlojeniya po sobstvennim funktsiyam odnogo singulyarnogo ellipticheskogo operatora //Differentsialnie uravneniya. - 1986. - №12. - T. 22. - S. 2107-2117.
14. Beytmen G., Erdeyi A. Visshie transtsendentnie funktsii. Funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo silindra, ortogonalnie mnogochleni . - Moskva: Nauka,1966.