Scientific reports of Bukhara State University

Volume 2
Issue 1 *BSU 2019 issue 1*

Article 3

3-27-2019

INVESTIGATION OF THE SPECTRUM OF A GENERALIZED FRIEDRICHS MODEL: NON- INTEGRAL LATTICE CASE

Tulkin Khusenovich Rasulov
Dosent at the department of mathematics at Bukhara State University

Shokhida Bobojonovna Nematova
A student of Bukhara State University

PHYSICAL SCIENCES AND MATHEMATICS: MATHEMATICS

УДК: 517.984

УМУМЛАШГАН ФРИДРИХС МОДЕЛИ СПЕКТРИНИНГ ТАДҚИҚИ: БУТУН БЎЛМАГАН СОНЛИ ПАНЖАРА ҲОЛИ

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФРИДРИХСА: СЛУЧАЙ НЕЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКИ

INVESTIGATION OF THE SPECTRUM OF A GENERALIZED FRIEDRICHS MODEL: NON- INTEGRAL LATTICE CASE

Rasulov Tulkin Khusenovich
Dosent at the department of mathematics at Bukhara State University
Nematova Shokhida Bobojonovna
A student of Bukhara State University

Таянч сўзлар: умумлашган Фридрихс модели, Фок фазоси, муҳим ва дискрет спектрлар, хос вектор, қўзғалиш детерминанти.

Ключевые слова: обобщенная модель Фридрихса, пространство Фока, существенный и дискретный спектр, собственный вектор, определитель возмущения.

Key words: generalized Friedrichs model, Fock space, essential and discrete spectra, eigenvector, perturbation determinant.

Аннотация

Мақолада ўз-ўзига қўшма умумлашган Фридрихс моделининг спектри тадқиқ қилинади. Бу модель бутун бўлмаган сонли панжарада сони иккидан ошмайдиган системасига мос келади ва Фок фазосининг қирқилган қисм фазосида таъсир қилади. “Таъсирлашиш параметри”га боғлиқ равишда хос қийматлар сони ва жойлашув ўрни аниқланган. Хос векторларнинг аниқ кўриниши топилган.

Аннотация

В статье исследуются существенный и дискретный спектр самосопряженной обобщенной модели Фридрихса. Эта модель соответствует системе, состоящей из не более чем двух частиц на нецелочисленной решетке, и действует в обрезанном подпространстве пространства Фока. Определено число и место нахождение собственных значений в зависимости "параметра взаимодействия". Найденявный вид собственных векторов.

Abstract

The article investigates the essential and discrete spectrum of the self-adjoint generalized Friedrichs model. This model corresponds to a system consisting of no more than two particles on a non-integral lattice, and operates in a truncated subspace of Fock space. The number and location of eigenvalues is determined according to the "interaction parameter". Anobvious form of the eigenvectors is found.

Введение. Многие научно-прикладные исследования, проводимые на мировом уровне, относятся к исследованию обобщенных моделей Фридрихса, соответствующих системе с несохраняющимся числом частиц на решетке. Модель Бозе-Хаббарда, в частности, двухчастичные операторы Шредингера на решетке, используемые для описания существования устойчивых сложных объектов в упорядоченных средах, являются теоретическим обоснованием экспериментального наблюдения и теоретической базой для применения. Поэтому развитие исследования операторов Шредингера, соответствующих системам частиц на решетке, и обобщенных моделей Фридрихса, которые встречаются в моделях физики твердого тела, а также квантовой теории поля и спектральной теории самосопряженных операторов, является одним из приоритетных направлений. Обобщенная модель Фридрихса [1, 210-223], упомянутая выше, действует в гильбертовом пространстве:

$$H := C \oplus L_2(M, d\mu),$$

где $(M, d\mu)$ – некоторое многообразие с мерой, по правилу

$$(AF)_0 = af_0 + \alpha \int_M \upsilon(t) f_1(t)\, d\mu(t), \quad (1)$$

$$(AF)_1(q) = \alpha \upsilon(q) f_0 + u(q) f_1(q) + \alpha \int_M D(q,t) f_1(t)\, d\mu(t). \quad (2)$$

Здесь $F = (f_0, f_1) \in H$; a – константа; $u(\cdot)$ и $\upsilon(\cdot)$ – некоторые функции на многообразии; $D(\cdot,\cdot)$ – функция от двух переменных на M^2; $\alpha \in R_+$ - "параметр взаимодействия".

Следует отметить, что характер спектра, структура резольвенты, вид собственных векторов, дискретный и непрерывный спектр, проблема существования и полноты волновых операторов полностью или частично изучались [2, 3, 4] применительно к обычной модели Фридрихса, т.е. к самосопряженному оператору вида

$$(A_0 f)(q) = u(q) f(q) + \alpha \int_M D(q,t) f_1(t)\, d\mu(t), \quad f \in L_2(M, dq), \quad M \subset R^d.$$

В работе [2] для случая $M = [-1,1] \subset R$, $u(q) = q$ и малого $\alpha > 0$ было установлено, что с точностью до конечного числа собственных значений оператор A_0 имеет абсолютно непрерывный спектр, и что в своем абсолютно непрерывном подпространстве этот оператор унитарно эквивалентен оператору B_0 такому, что

$$(B_0 f)(q) = a(q) f(q), \; f \in L_2(M, dq).$$

Позже в работе [4] была предложена более общая модель (в которой M – любой промежуток в R, а функции f принимают значения в некотором гильбертовом пространстве H, ядро D при этом заменяется на ограниченный оператор в H) и перенесены на нее результаты работы [2]. Это обобщение существенно расширило область применения теории. В статье [5], дополняющей [4], и уже со всей полнотой - в работе [6] было показано, что при определенных ограничениях на ядро D (а именно при его компактности и гёльдеровости с показателем $\mu > 1/2$) можно исключить требование малости параметра α. При этом спектр оператора A_0 будет состоять из абсолютно непрерывной части, заполняющей промежуток $M \subset R$, и, быть может, конечного числа собственных значений конечной кратности. В [4], [6] было также доказано существование волновых операторов, связанных с A_0. Модели Фридрихса - в [7], [8].

Как таковая обобщенная модель Фридрихса (1)-(2) рассмотрена в [1], где были изучены ее собственные значения и "резонансы" (особенности аналитического продолжения резольвенты). Эта модель рассмотрена также в ряде других работ, из которых мы упомянем [9], [10], в которых результаты, полученные для обобщенной модели Фридрихса, применяются к проблемам случайного блуждания частицы в случайной среде, а также [11], в которой исследованы так называемые связанные состояния для определенного семейства обобщенных моделей Фридрихса. В [12] рассматривается самосопряженный случай с $M = R^d$, где $d = 3,$ евклидовой мерой $d\mu(q) = dq$ в R^d. Там показано, что при достаточно малых значениях параметра α спектр оператора A состоит из абсолютно непрерывной части, совпадающей с множеством I значений функции $a(\cdot)$, и, быть может, одного собственного значения, лежащего левее точки $\kappa = \min_q a(q).$ Построена резольвента оператора A, доказано существование (и полнота) естественно связанных с A-волновых операторов и с их помощью найдены обобщенные собственные векторы непрерывного спектра (вторые компоненты которых являются элементами некоторого явно описанного пространства обобщенных функций).

В настоящее время одной из важнейших задач теории операторов является задача исследования спектров и резонансов самосопряженных операторов. Следует отметить, что эта задача имеет тесную связь с исследованием спектров и резонансов обобщенной модели Фридрихса. Исходя из этого, в данной работе рассматривается оператор вида (1)-(2) со следующими параметрами:

$$M = T_h^d := \left(-\frac{\pi}{h}, \frac{\pi}{h}\right]^d \quad (h > 0), \quad d\mu(x) = dx,$$

$$a := -\varepsilon \quad (\varepsilon > 0), \quad u(x) := -\varepsilon + \omega(x), \quad D(x, y) \equiv 0.$$

Целью данной работы является решение следующих задач: установить связь между определителем Фредгольма и определителем возмущения; исследовать числа и местонахождение собственных значений оператора A; найти явный вид собственных векторов оператора A.

На протяжении всей работы под обозначениями $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{ess}(\cdot)$ и $\sigma_{disc}(\cdot)$ понимаются соответственно спектр, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряженного оператора.

2. Обобщенная модель Фридрихса и его существенный спектр. Пусть C, R и Z - множество всехкомплексных, вещественных и целых чисел, соответственно. Для каждого фиксированного $h>0$ через T_h^d обозначим d-мерный куб $(-\pi/h;\pi/h]^d$ с соответствующим от ождествлением противоположных граней. Всюду в работе T_h^d рассматривается как абелева группа, в которойоперации сложения и умножения на вещественное число введены какоперации сложения и умножения на вещественное число в R^d по модулю $((2\pi/h)Z)^d$. Например, если $d=3$ и

$$a=\left(\frac{\pi}{2h},-\frac{2\pi}{3h},\frac{5\pi}{6h}\right),\quad b=\left(\frac{2\pi}{3h},-\frac{\pi}{6h},\frac{\pi}{2h}\right),$$

то

$$a+b=\left(-\frac{5\pi}{6h},-\frac{5\pi}{6h},-\frac{2\pi}{3h}\right),\quad 6a=\left(\frac{\pi}{h},0,\frac{\pi}{h}\right)\in T_h^3.$$

По строению множества T_h^d видно, что для любого $B\subset R^3$ существует $h=(B)>0$ такое, что $B\subset T_h^d$, т.е. $\lim\limits_{h\to 0} T_h^d=R^3.$

Пусть $L_2(T_h^d)$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплексно-значных) функций, определенных на T_h^d. Обозначим через H прямую сумму пространств $H_0:=C$ и $H_1:=L_2(T_h^d)$, т.е. $H:=H_0\oplus H_1$. Пространства H_0 и H_1 называются нульчастичным и одночастичным подпространствами фоковского пространства $F(L_2(T_h^d))$ по $L_2(T_h^d)$, соответственно.

Рассмотрим обобщенную модель Фридрихса A, действующую в H по правилу

$$A:=\begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{01}^* & A_{11}\end{pmatrix},$$

с матричными элементами $A_{ij}:H_j\to H_i,\ i\le j, i,j=0,1:$

$$A_{00}\,f_0=-\varepsilon f_0,\quad A_{01}\,f_1=\alpha\int \upsilon(t)f_1(t)dt,$$

$$(A_{11}\,f_1)(x)=(-\varepsilon+\omega(x))\,f_1(x),\quad f=(f_0,f_1)\in H,$$

где $\omega(\cdot)$ и $\upsilon(\cdot)$ - вещественно значные непрерывные функции на T_h^d, причем

$$\min_{x\in T_h^d}\omega(x)=0,$$

а $\alpha>0$ - "параметр взаимодействия". Здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования. Очевидно, что при этих предположениях оператор A ограничен и самосопряжён в H.

Следует отметить, что рассматриваемая обобщенная модель Фридрихса соответствует системе, состоящей из не более чем двух частиц на нецелочисленной d-мерной решетки, определенннойс помощью операторов рождения и уничтожения.

Пусть оператор A_0 действует в H как

$$A_0:=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A_{11} \end{pmatrix}.$$

Оператор возмущения $A-A_0$ оператора A_0 является самосопряженным оператором ранга 2. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр оператора A совпадает с существенным спектром оператора A_0. Известно, что

$$\sigma_{ess}(A_0)=[-\varepsilon;-\varepsilon+M], \quad M:=\max_{x\in T_h^d}\omega(x).$$

Из последних фактов следует, что

$$\sigma_{ess}(A)=[-\varepsilon:-\varepsilon+M].$$

3. Определитель Фредгольма и определитель возмущения. Определим регулярную в $C\setminus[-\varepsilon;-\varepsilon+M]$ функцию

$$\Delta(z):=-\varepsilon-z-\alpha^2\int\frac{\upsilon^2(t)dt}{-\varepsilon+\omega(t)-z}.$$

Обычно функция $\Delta(\cdot)$ называется определителем Фредгольма, ассоциированным с оператором A. Следующая лемма установит связь между собственными значениями оператора A и нулями функции $\Delta(\cdot)$.

Лемма 1. Число $z\in C\setminus\sigma_{ess}(A)$ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда $\Delta(z)=0$.

Доказательство. Пусть число $z \in C \setminus \sigma_{ess}(A)$ - есть собственное значение оператора A и пусть $f=(f_0, f_1) \in H$ - соответствующая собственная вектор-функция. Тогда эта вектор-функция удовлетворяет уравнению $Af = zf$ или системе уравнений

$$\begin{cases} (-\varepsilon - z) f_0 + \alpha \int \upsilon(t) f_1(t) dt = 0 \\ \alpha \upsilon(x) f_0 + (-\varepsilon + \omega(x) - z) f_1(x) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Так как при всех $x \in T_h^d$ и $z \notin [-\varepsilon; M-\varepsilon]$ имеет место соотношение $-\varepsilon + \omega(x) - z \neq 0$, из второго уравнения системы (3) для f_1 имеем

$$f_1(x) = -\frac{\alpha \upsilon(x) f_0}{-\varepsilon + \omega(x) - z}. \quad (4)$$

Подставляя выражение (4) для f_1 в первое уравнение системы (3), заключаем, что система уравнений (3) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\Delta(z) = 0.$ Лемма 1 доказана.

Из леммы 1 вытекает, что

$$\sigma_{disc}(A) = \{z \in C \setminus \sigma_{ess}(A) : \Delta(z) = 0\}.$$

Теперь переходим к построению определителя возмущения.

Теорема 1. Определитель возмущения $\Delta_{A/A_0}(z)$, соответствующий паре операторов $\{A, A_0\}$, имеет вид $\Delta_{A/A_0}(z) = -\frac{1}{z}\Delta(z), \quad z \in C \setminus \sigma(A_0).$

Доказательство. Пусть $I -$ единичный оператор в H. Так как оператор $A - A_0$ является оператором ранга 2, определитель возмущения $\Delta_{A/A_0}(z)$ имеет смысл и хорошо определен по формуле (см. например [13]) $\Delta_{A/A_0}(z) := \det\left(I + (A - A_0)(A_0 - z)^{-1}\right).$

Не нарушая общности, предположим, что $\|\upsilon\| = 1$. Выбираем ортонормальный базис $\{\varphi_n\}_n \subset H$ следующим образом: $\varphi_1 := \upsilon$ и $\varphi_j \perp \upsilon$ для любых $j \geq 2.$ Введем ортонормальный базис

$$\psi_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \psi_j := \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots$$

в H, и оно является полным.

Пусть $a_{ij}(z) := \left((A - A_0)(A_0 - z)^{-1} \psi_i, \psi_j\right), \quad i, j \in N_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}.$

С помощью простых вычислений получим

$$(A-A_0)(A_0-z)^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{z}A_{00} & A_{01}(A_{11}-z)^{-1} \\ -\frac{1}{z}A_{01}^{*} & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$a_{00}(z):=\frac{\varepsilon}{z},\quad a_{0j}(z):=-\frac{1}{z}(\varphi_1,\varphi_j)=-\frac{1}{z}\delta_{1j},\ j\in N, \qquad (5)$$

$$a_{i0}(z)=\int\frac{\upsilon(t)\varphi_i(t)}{-\varepsilon+\omega(t)-z}\,dt,\quad i\in N,$$

$$a_{ij}(z)=0,\ i,j\in N.$$

Здесь δ_{ij} - символ Кроникера.

Положим $A_n(z):=(a_{ij}(z))_{0\le i,j\le n}$ и $I_n:=(\delta_{ij})_{0\le i,j\le n},\ n\in N_0.$

Заметим, что $\det(I_n+A_n(z))=\det\begin{pmatrix}1+a_{00}(z) & a_{01}(z)\\ a_{10}(z) & 1\end{pmatrix},\quad n\ge 1.$

Используя равенство $\Delta_{A/A_0}(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\det(I_n+A_n(z))$, имеем

$$\Delta_{A/A_0}(z)=1+a_{00}(z)-a_{10}(z)a_{01}(z). \qquad (6)$$

Подставляя (5) в (6), получаем доказательство теоремы 1.

4. Число и местонахождение собственных значений обобщенной модели Фридрихса. С целью исследования собственных значений оператора A предположим, что $\int\frac{\upsilon^2(t)dt}{M-\omega(t)}<\infty$, и положим $\alpha_0:=\sqrt{M}\left(\int\frac{\upsilon^2(t)dt}{M-\omega(t)}\right)^{-1/2}.$

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2. При всех значениях $\alpha>0$ и $h>0$ оператор A имеет не менее одного и не более двух собственных значений. Более того, если $\alpha\in(0;\ \alpha_0]$, то оператор A имеет единственное простое (изолированное) собственное значение, и онолежит левее $-\varepsilon$, а при $\alpha\in(\alpha_0;+\infty)$ оператор A имеет два собственных значений, лежащих левее $-\varepsilon$ и правее $M-\varepsilon$, соответственно.

Доказательство. Очевидно, что функция $\Delta(\cdot)$ строго убывает от $+\infty$ до $\Delta(z_0)$ на промежутке $(-\infty;z_0),\quad z_0\le-\varepsilon$ и от $\Delta(z_1)$ до $-\infty$ на промежутке $(z_1;+\infty)$, $z_1\ge M-\varepsilon.$

Следовательно, оператор A имеет собственное значение $e_0 < z_0$ тогда и только тогда, когда $\Delta(z_0) < 0$. Аналогично, оператор A имеет собственное значение $e_1 > z_1$ тогда и только тогда, когда $\Delta(z_1) > 0$. Поэтому из соотношения $\Delta(-\varepsilon) = -\alpha^2 \int \frac{\upsilon^2(t)dt}{\omega(t)} < 0$

следует, что при всех значениях $\alpha > 0$ и $h > 0$ оператор A имеет единственное собственное значение, ниже $-\varepsilon$. По определению числа α_0 имеем

$$\Delta(M-\varepsilon) = -M + \alpha^2 \int \frac{\upsilon^2(t)dt}{M-\omega(t)} \le 0, \qquad \alpha \in (0, \alpha_0].$$

В силу леммы 1, если $\alpha \in (0, \alpha_0]$, то оператор A не имеет собственных значений, лежащих правее $M-\varepsilon$.

Очевидно, что при $\alpha \in (\alpha_0;\ \infty)$ имеет место соотношение $\Delta(M-\varepsilon) = -M + \alpha^2 \int \frac{\upsilon^2(t)dt}{M-\omega(t)} > 0$.

Так как $\Delta(\cdot)-$ есть непрерывная монотонная функция в $(M-\varepsilon, +\infty)$ и

$$\lim_{z\to+\infty} \Delta(z) = -\infty,$$

она имеет простой нуль $z = E$ в $(M-\varepsilon, \infty)$. В силу леммы 1 число $z = E$ является собственным значением оператора A. Теорема 2 доказана.

Замечание 1. В теореме 2 собственное значение E_0 оператора A, которое существует при всех $\alpha > 0$, обычно называется основным состояниеми в этом случае компоненты соответствующего собственного вектора-функции выглядят так:

$$f_0 = const \ne 0, \qquad f_1(x) = -\frac{\alpha\upsilon(x) f_0}{-\varepsilon + \omega(x) - E_0}.$$

Замечание 2. Из доказательства теоремы 2 видно, что если интеграл $\int \frac{\upsilon^2(t)ds}{M-\omega(t)}$ расходится, то при всех $\alpha > 0$ оператор A имеет два собственных значений, лежащих левее $-\varepsilon$ и правее $M-\varepsilon$.

REFERENCES

1. Lakaev S.N. Nekotorie spektralnie svoystva modeli Fridrixsa //Trudi seminaraim. I.G. Petrovskogo. - 1986. - S. 210-223.

2. Friedrichs K.O. Uber die Spectralzerlegung einee Integral operators. Math. Ann., 115:1 (1938). – C. 249-272.

3. Fridrixs K.O. Vozmushenie spektra operatorov v gil bertovom prostranstve. - M.: Mir, 1969. - S. 232.
4. Friedrichs K.O. On the perturbation of continuous spectra. Comm. Pure Appl. Math., 1:4 (1948). – C. 361-406.
5. Faddeev L.D. K teorii vozmusheniy neprerivnogo spektra //Dokl. AN SSSR, 145:2. - 1962. - S. 301-304.
6. Faddeev L.D. O modeli Fridrixsa v teorii vozmusheniy neprerivnogo spektra //Trudi MIAN SSSR, 73. - M.: Nauka, 1964. - S. 292-313.
7. Yafaev D.R. Matematicheskaya teoriya rasseyaniya. Obshaya teoriya: Uchebnoe posobie. - SPb.: Izd-vo CPb universiteta, 1994. - 424 s.
8. Merkurev S.P., Faddeev L.D. Kvantovaya teoriya rasseyaniya dlya sistem neskolkix chastits. - M.: Nauka, 1985. - S. 400.
9. Angelescu N., Minlos R.A., Zagrebnov V.A. Lower spectral branches of a particle coupled to a Bose field. Rev. Math. Phys., 17:10 (2005). – P. 1111-1142.
10. Boldrigini K., Minlos R.A., Pellegrinotti A. Sluchaynie blujdaniya v sluchaynoy (fluktuiruyushey) srede //UMN, 62:4(376). - 2007. - S. 27-76.
11. Lakshtanov Ye.L., Minlos R.A. Spektr dvuxchastichnix svyazannix sostoyaniy transfer-matrits gibbsovskix poley (polya na dvumernoy reshetke: prilegayushie urovni) //Funktsionalniy analiz i yego prilojeniya, 38:3. - 2004. - S. 52-69.
12. Akchurin E.R. O spektralnix svoystvax obobshennoy modeli Fridrixsa. Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika. - 2010. - T. 163. - № 1. - S. 17-33.
13. Goxberg I.I., Kreyn M.G. Vvedenie v teoriyu lineynix nesamosopryajennix operatorov. - M.: Nauka, 1965. - S. 378.